Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks

Analysis 2 SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 14

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung $e^t\dot{x} = (1+x)^2$.

(a) Bestimmen Sie die konstanten Lösungen.

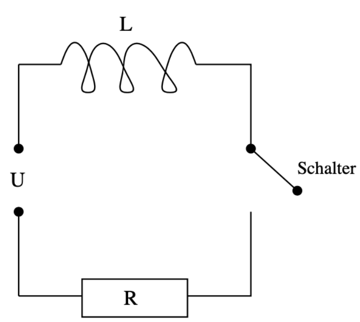
(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $x(0) = x_0$, $x_0 > -1$. Bestimmen Sie das maximale Definitionsintervall der Lösung und untersuchen Sie das Verhalten am Rand des Definitionsintervalls (ggf. auch für $t \to \pm\infty$). Für welche Werte von x_0 ist die Lösung beschränkt?

Aufgabe H2 (3 Punkte)

An einer Spannungsquelle (angelegte Spannung: U) liegen über einem Schalter eine Spule L und ein Ohmscher Widerstand R in Reihe. Der zeitliche Verlauf der Stromstärke nach dem Einschalten wird beschrieben durch das Anfangswertproblem

$$L\dot{I} + RI = U, \quad I(0) = 0.$$

Dabei bezeichnet $I(t)$ die Stromstärke zur Zeit t und $\dot{I}(t) = \frac{d}{dt}I(t)$. L, R und U sind zeitlich konstant.



Lösen Sie das Anfangswertproblem. Wie verhält sich $I(t)$ für $t \to \infty$? Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe H3 (3 Bonuspunkte) (*Die Kettenlinie*)

Die Gleichgewichtskurve eines an zwei Punnkten aufgehängten Seils genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = a\sqrt{1+\dot{x}^2} \quad (a > 0).$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL.

Hinweis: Hyperbelfunktionen (Aufgabe T3, Blatt 11, Analysis 1 WS 2020/21).

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Die *Riccati-Differentialgleichung*

$$(R) \quad \dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$$

mit Koeffizienten $a, b > 0$ ist ein Modell für natürliches Wachstum mit zusätzlichem äußeren Einfluss c. Dabei seien a, b, c stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Im Allgemeinen existiert für diese DGL kein explizites Lösungsverfahren.

Bitte wenden!

(a) Zeigen Sie: Ist eine partikuläre Lösung x_p von (R) bekannt, so führt die Substitution

$$y(t) := \frac{1}{x(t) - x_p(t)} \quad \text{d.h.} \quad x = x_p + \frac{1}{y}$$

auf eine lineare DGL für y. Geben Sie diese an.

(b) Die Riccati-DGL

$$t^2 \dot{x} = t^2 x^2 + tx + 1$$

besitzt die partikuläre Lösung $x_p(t) = -\frac{1}{t}$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung für $t > 0$.

Zusatzaufgabe (3 Punkte)

Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) und $x\colon (a, \infty) \to \Omega$ eine Lösung des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$, welche für $t \to \infty$ gegen ein $x_0 \in \Omega$ konvergiert. Zeigen Sie: $f(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist eine konstante Lösung des Systems.

Tip: Integrieren Sie $\dot{x}(t)$ für grosse Zeiten.

Abgabetermin: Mittwoch, den 21.07.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).