Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 2

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\ln x)}{x(1+\ln^2 x)}\,dx, \quad x>0,$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

Aufgabe H2 (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die Funktion Cosinus hyperbolicus $\cosh\colon [0,\infty)\to[1,\infty)$ besitzt eine stetige Umkehrfunktion

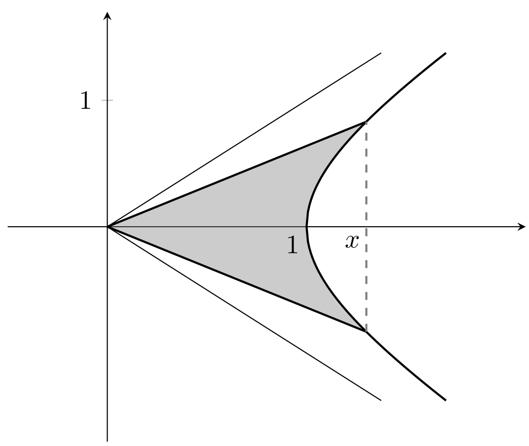
$$\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty)\to[0,\infty),$$

die differenzierbar auf $(1,\infty)$ ist mit $\operatorname{arcosh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Hinweis: Aufgabe T3, Blatt 11, Analysis 1 WS 2020/21.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ für $x\geq 1$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Hyperbelsektors der Hyperbel $y^2=x^2-1$ gemäß Skizze.



Aufgabe H3 (6 Punkte) (*Die Arcustangens-Reihe*)

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, z^{2n+1}.$$

Bitte wenden!

(b) Beweisen Sie:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} \quad \text{für } x \in (-1,1).$$

Anleitung: Differenzieren Sie beide Seiten. Gehen Sie vor wie in der Vorlesung bei der Logarithmusreihe.

(c) Bestimmen sie den Wert der Leibnizreihe, d.h. zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm ... = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe H4 (3 Punkte)

Begründen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$$

konvergiert, und bestimmen Sie seinen Wert.

Zusatzaufgabe (5 Bonuspunkte) (*Die Hermite-Polynome*)

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}.$$

(a) Beweisen Sie die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1).$$

Hinweis: Leibnizsche Produktregel.

(b) Folgern Sie: H_n ist ein Polynom vom Grad n mit höchstem Koeffizient 2^n.

(c) Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \neq m.$$

Abgabetermin: Mittwoch, den 28.04.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).