Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks

Analysis 2 SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 3

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^a}\,dx$$

für alle $a > 0$ konvergiert, und bestimmen Sie seinen Wert mittels Gamma-Funktion.

(b) Was lässt sich über das Integral im Teil (a) im Fall $a \leq 0$ aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H3 (3 Punkte)

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(1+2x)$ das Taylorpolynom 2. Ordnung im Entwicklungspunkt $a = 0$, und geben Sie für $0 < \delta < \frac{1}{2}$ eine obere Schranke für den Fehler $|f(x) - T_2 f(x;0)|$ im Bereich $|x| < \delta$ an.

Aufgabe H4 (7 Punkte)

(a) Beweisen Sie die asymptotische Gleichheit

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} \sim \ln(\ln n) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Hinweis: $\ln(\ln x)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{x\ln x}$ auf $(1,\infty)$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\big(\ln(\ln n)\big)^{100}}$$

auf Konvergenz.

Zusatzaufgabe (5 Bonuspunkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y > 0$ das uneigentliche Integral

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

konvergiert.

Bitte wenden!

(b) Beweisen Sie für $x, y > 0$: $B(x, y) = B(y, x), \quad (x + y)B(x + 1, y) = xB(x, y)$.

(c) Folgern Sie hieraus:

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} \quad \text{für alle} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Die Funktion B heißt *Betafunktion*.

Abgabetermin: Mittwoch, den 5.05.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).