# Hausaufgaben: Blatt 4

**Aufgabe H1 (3 Punkte)**

Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^n(I)$. Zeigen Sie: Hat ein Polynom $P$ eines Grades $\leq n$ in $a \in I$ die Approximationsgüte

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

so ist $P$ das $n$-te Taylorpolynom $T_n f(x; a)$.

**Aufgabe H2 (3 Punkte)**

Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

in $a = 0$ und untersuchen Sie, in welchem Bereich die Reihe konvergiert.

*Hinweis:* Achtung! Die Funktion $x \mapsto e^{-x^2}$ hat keine geschlossen angebbare Stammfunktion.

**Aufgabe H3 (5 Punkte)**

Wir betrachten für $p \in \{1, 2\}$ den Folgenraum

$$\ell^p = \big\{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty\big\}.$$

Beweisen Sie:

(a) $\ell^p$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|a\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p}.$$

(b) $\ell^1 \subseteq \ell^2$.

**Aufgabe H4 (5 Punkte)** *($p$-adischer Betrag auf $\mathbb{Q}$)*

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Für jedes $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt es genau eine ganze Zahl $n =: e_p(x)$, so dass

$$x = p^n \cdot \frac{r}{s} \quad \text{mit } \ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ s \in \mathbb{N}, \ \text{so dass } \ p \nmid r \cdot s.$$

Wir definieren den $p$-adischen Betrag $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}$ durch

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-e_p(x)}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

(b) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Dabei gilt "=", sofern $|x|_p \neq |y|_p$.

(c) Folgern Sie: $d_p(x, y) := |x - y|_p$ ist eine Metrik auf $\mathbb{Q}$.

*Hinweis:* Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat eindeutige Primfaktorzerlegung $n = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$, wobei $p_1, \ldots, p_k$ Primzahlen sind und $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe H5 (4 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen offen, abgeschlossen oder keines von beidem sind und beweisen Sie dies ($\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Norm).

(a) $(0,1] \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

---

**Abgabetermin:** Mittwoch, den 12.05.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).