Hausaufgaben: Blatt 5

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Es sei X eine Menge, versehen mit der diskreten Metrik d. Beweisen Sie:

(a) Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann, wenn es eine Stelle $N \in \mathbb{N}$ gibt, ab der sie konstant ist (d.h. $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$).

(b) Charakterisieren Sie analog die Cauchyfolgen und zeigen Sie, dass (X, d) vollständig ist.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) $x \in \overline{M} \iff$ es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(b) M ist genau dann dicht in X, wenn $U \cap M \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq X$.

Aufgabe H3 (7 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $a \in X$ und $r \geq 0$ die Mengen $\{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ und $\{x \in X : d(x, a) = r\}$ abgeschlossen sind.

(b) Sei nun $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Beweisen Sie, dass für jede offene Kugel $B_r(a) \subseteq X$ gilt:
$$\overline{B_r(a)} = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\} \quad \text{und} \quad \partial B_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| = r\}.$$

(c) Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raums (X, d) mit $\overline{B_r(a)} \neq \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ für geeignete $a \in X$, $r > 0$.

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir
$$d(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$$
mit $\varphi(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Zeigen Sie:

(a) d ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

Zusatzaufgabe (3 Bonuspunkte)

Wir betrachten den Vektorraum
$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} : f \text{ stetig differenzierbar}\}.$$

Begründen Sie, dass $C^1[a, b]$ *nicht* vollständig ist bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 19.05.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).