Hausaufgaben: Blatt 6

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subseteq X$. Setze

$$Y := \{x \in X : d(x, M) = 0\}.$$

Zeigen Sie: $Y = \overline{M}$.

Aufgabe H2 (5 Punkte) (*Stereographische Projektion*)

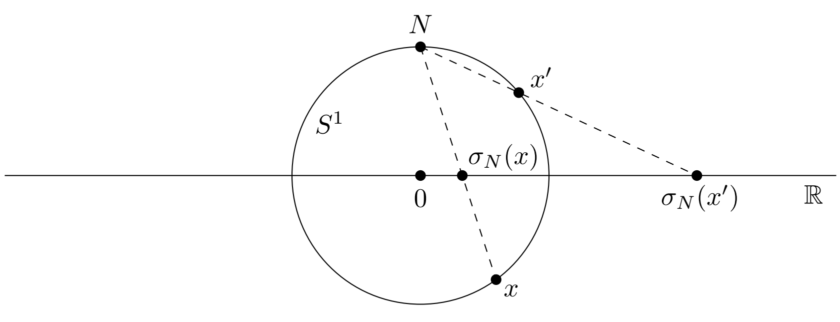
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $N = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren die Inversion mit dem Pol N als die Abbildung

$$i_N \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\}, \quad i_N(x) := N + \frac{2}{\|x - N\|_2^2} \cdot (x - N).$$

(a) Zeigen Sie, dass i_N ein Homöomorphismus ist, und bestimmen Sie i_N^{-1}.

(b) Beweisen Sie: i_N bildet die Hyperebene $\mathbb{R}_0^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ bijektiv auf die "gelochte" Sphäre $S^n \setminus \{N\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\} \setminus \{N\}$ ab.

Bemerkung: Die Abbildung $\sigma_N \colon S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, $\sigma_N(x) := i_N^{-1}(x)$ heißt *stereographische Projektion* von $S^n \setminus \{N\}$ auf $\mathbb{R}^n$. Dabei wird jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}_0^n$ identifiziert.



Stereographische Projektion auf S^1

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Wir identifizieren den Vektorraum $R^{n\times n}$ der reellen $n \times n$-Matrizen mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ via

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn}).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\det \colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$ ist stetig.

Bitte wenden!

(b) $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ ist invertierbar}\}$ ist offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(c) Die Abbildung $A \mapsto A^{-1}$ ist ein Homöomorphismus von $GL(n,\mathbb{R})$ auf sich selbst.
Hinweis: Cramersche Regel.

Zusatzaufgabe (4 Bonuspunkte)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig auf X.

(b) Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 26.05.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).