Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks

Analysis 2 SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 7

Aufgabe H1 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie: Ist I eine nichtleere Indexmenge und $(K_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie kompakter Teilmengen eines metrischen Raums X, so ist der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} K_i$ ebenfalls kompakt.

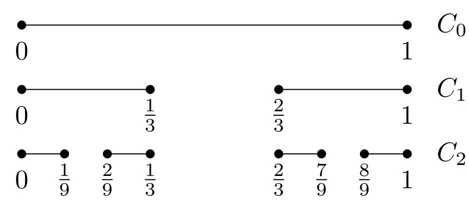
(b) (*Das Cantorsche Diskontinuum*)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch

$$A_0 := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k+1], \quad A_n := \frac{1}{3}A_{n-1} \text{ für } n \geq 1$$

definierte Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$, und sei

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \quad C := A \cap [0,1].$$



Die Menge C heißt Cantorsches Diskontinuum. Die Skizze zeigt die ersten Exemplare der Mengen $C_n := A_0 \cap ... \cap A_n \cap [0,1]$ und $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass C kompakt ist.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Sei X ein vollständiger normierter Raum und sei $g\colon X \to X$ kontrahierend. Zeigen Sie: Die Abbildung $f\colon X \to X$, $f(x) = x + g(x)$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe H3 (6 Punkte) (*Fortsetzung des Themas Abstandsfunktion*)

Für zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen A, B eines metrischen Raums (X, d) ist der Abstand von A und B definiert durch

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Beweisen Sie:

(a) $d(A,B) = \inf\{d(x,B) : x \in A\}$.

(b) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gilt $d(A,B) > 0$.

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass $d(A,B) = 0$ sein kann, wenn A und B zwar disjunkt und abgeschlossen sind, aber weder A noch B kompakt ist.

Aufgabe H4 (4 Punkte)

Wir betrachten den in Blatt 4, Aufgabe H3 untersuchten Folgenraum

$$\ell^2 = \Big\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\Big\} \text{ mit der Norm } \|a\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\Big)^{1/2}.$$

(a) Geben Sie eine Folge von Elementen aus ℓ^2 an, deren Glieder alle in der abgeschlossenen Einheitskugel $B = \{a \in \ell^2 : \|a\|_2 \leq 1\}$ liegen, die aber keine konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Geben Sie (mit Blick auf Teil (a)!) eine Teilmenge des normierten Raums $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ an, die zwar abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe H5 (2 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Wir betrachten die Funktion

$$q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^t Ax.$$

(Dabei bezeichnet x^t den transponierten Vektor.)

(a) Zeigen Sie, dass q auf der Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ Maximum und Minimum annimmt.

(b) **Zusatzaufgabe:** Geben Sie Beispiele für A an, so dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : q(x) = 1\}$ kompakt bzw. nicht kompakt ist.

Abgabetermin: Mittwoch, den 2.06.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).