Hausaufgaben: Blatt 8

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Wir betrachten den Raum $C[0,1]$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei $q \in (0,1)$ fest. Für $f \in C[0,1]$ definieren wir

$$Tf(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (qx)^n f(x/n), \quad x \in [0,1].$$

Beweisen Sie:

(a) $Tf \in C[0,1]$ für jedes $f \in C[0,1]$.
(b) $T \in L(C[0,1])$. Bestimmen Sie die Operatornorm von T.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(x) \to 0$ für $\|x\|_2 \to \infty$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte) (*Logarithmische Spiralen*)

Sei $c > 0$. Die Kurve

$$\gamma(t) = e^{ct} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

heißt *logarithmische Spirale*.

(a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $t \in [-2\pi, 2\pi]$.
(b) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve γ im Parameterbereich $a \le t \le b$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.
(c) Existiert $\lim\limits_{a \to -\infty} L_{a,0}$?

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$. Beweisen Sie:

(a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend.
(b) Die Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist wegzusammenhängend.
(c) $\mathbb{R}^n$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe (3 Bonuspunkte)

Beweisen Sie, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ vollständig ist.
Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von Korollar 5.22.

Abgabetermin: Mittwoch, den 9.06.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).