Hausaufgaben: Blatt 9

Aufgabe H1 (3 Punkte) (*Kurven in Polarkoordinaten*)
In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ stellt man Kurven oft in *Polarkoordinaten* dar, d.h. in der Form

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}, \quad t \in I.$$

(a) Schreiben Sie die Logarithmische Spirale aus Aufgabe H3, Blatt 8 in Polarkoordinaten, und berechnen Sie $\dfrac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}$. Interpretation?

(b) Zeigen Sie für die Bogenlänge einer in Polarkoordinaten gegebenen stetig differenzierbaren Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2}\, dt.$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: f ist stetig sowie partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und besitzt in $(0,0)$ sämtliche Richtungsableitungen.

(b) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Gradienten ∇f für die Funktion $f\colon\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2\cos(y^2 z)$.

(b) Entscheiden Sie, ob es stetig partiell differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ gibt mit

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,y^2z^2 \\ y\,x^2z^2 \\ z\,x^2y^2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches f.

Hinweis: Bei der Berechnung von Stammfunktionen kann die additive Konstante von anderen Variablen abhängen.

Aufgabe H4 (4 Punkte + 3 Bonuspunkte)
Beweisen Sie:

(a) (*Zwischenwertsatz*) Sei X ein wegzusammenhängender metrischer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ferner seien $x, y \in X$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.

Bitte wenden!

(b) Für jede stetige Funktion $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gibt es ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^{n-1}$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beispiel: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, an denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.

(c) **Zusatzaufgabe:** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$. Dann gibt es keine stetige, injektive Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 16.06.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).