Analysis II, SS 2021 Margit Rösler

§ 1 Integration, Teil 2

1. Wiederholung (siehe Skript Analysis I, § 13)

Integral von Treppenfunktionen:

$\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ Treppenfkt $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Unterteilung $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, so dass

$$\varphi|_{(x_{k-1}, x_k)} = \text{konst.} = c_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

Dann: $$\boxed{\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})}$$

Integral von Regelfkt:

$f: [a,b] \to \mathbb{C}$ Regelfkt $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfkt auf $[a,b]$ mit $\|f - \varphi_n\|_\infty \to 0$ $(*)$

dabei $\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (Sup-Norm)

$(*)$ besagt: f ist gleichmäßig auf $[a,b]$ durch Treppenfkt approximierbar.

$$\left.\begin{array}{l} T[a,b] = \{\varphi : \varphi \text{ Treppenfkt auf } [a,b]\} \\ R[a,b] = \{f : f \text{ Regelfkt auf } [a,b]\} \end{array}\right\} \text{ beides sind } \mathbb{C}\text{-VR!}$$

Für $f \in R[a,b]$ und $(\varphi_n) \subseteq T[a,b]$ mit $\|f - \varphi_n\|_\infty \to 0$ setze

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

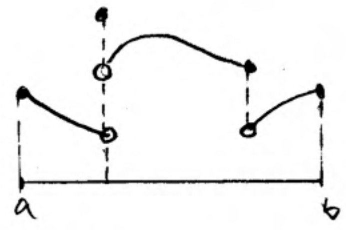
Dieser Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge (φ_n)

Die Integrationsabb. $$\left.\begin{array}{l} I: R[a,b] \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \int_a^b f\,dx \end{array}\right\} \text{ ist linear}$$

Charakterisierungssatz (Satz 13.6, Ana 1):

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist Regelfkt $\Longleftrightarrow$

f besitzt in jedem $x_0 \in [a,b]$ einseitige Grenzwerte.



(Im Ana 1 nur „$\Leftarrow$" bewiesen; „$\Rightarrow$" evtl. demnächst in ZÜ)

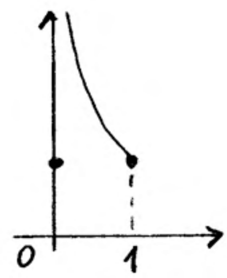
Bsp. von Regelfkt: • stetige Fkt, monotone Fkt auf $[a,b]$

• $f, g \in R[a,b] \Rightarrow |f|, \bar{f}, fg \in R[a,b]$

Gegenbsp. (1) Dirichlet-Fkt: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(2) auf $[0,1]$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty \quad (\notin \mathbb{C})$



2. Einige Eigenschaften des Integrals

1.1. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfkt, $p \geq 0$

$$\Longrightarrow \exists \xi \in [a,b] : \boxed{\int_a^b f(x) p(x)\, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x)\, dx}$$

Beweis: $m := \min\limits_{[a,b]} f$; $M := \max\limits_{[a,b]} f$ (existieren, da f stetig)

$$\underset{p \geq 0}{\Longrightarrow} \quad mp \leq fp \leq Mp \quad \underset{\text{Monotonie des Integrals}}{\Longrightarrow}$$

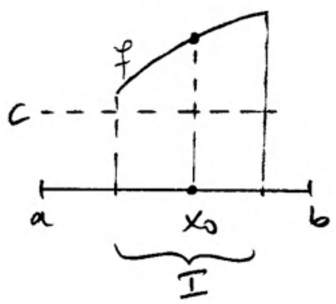
$$m \int_a^b p\, dx \leq \int_a^b fp\, dx \leq M \int_a^b p\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b fp\, dx = c \cdot \int_a^b p\, dx \quad \text{mit gewissem } c \in [m, M]$$

Zwischenwertsatz (ZWS) $\underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in [a,b] : c = f(\xi)$ ∎

1.2. Satz. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f\,dx = 0$
$\Rightarrow f \equiv 0$.

Beweis: Ang. $\exists\, x_0 \in [a,b]: f(x_0) > 0$. f stetig $\Rightarrow$



$\exists$ Intervall $I \subseteq [a,b]$ mit $x_0 \in I$, $|I| > 0$, so dass

$$f(x) \geq \tfrac{1}{2} f(x_0) =: c > 0 \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq \int_I f\,dx \geq c \cdot |I| > 0 \quad ↯$$

3. Integration und Differentiation

Def. Gegeben sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$. Eine Fkt $F: [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, falls F diffbar auf $[a,b]$ mit $F' = f$.

1.3. Lemma F, G Stammfkt von $f \Rightarrow F - G = $ konst. auf $[a,b]$.

Beweis: Folgt mit Satz 10.10, Ana 1 aus $(F-G)' \equiv 0$ ■

1.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $x_0 \in [a,b]$, Setze

$$\boxed{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} \quad \text{für } x \in [a,b] \quad \Longrightarrow$$

(1) F ist Stammfkt von f
(2) Ist $G: [a,b] \to \mathbb{C}$ beliebige Stammfkt von f $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) =: G\Big|_a^b$$

Beweis: O.E. f $\mathbb{R}$-wertig. Sei $x \in [a,b]$. $x+h \in [a,b] \Rightarrow$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x+h} f\,dt - \int_{x_0}^{x} f\,dt\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f\,dt \overset{\text{MWS d. Int. Rechn.}}{=}$$

$= \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi)$ mit $\xi \in [x, x+h]$

$h \to 0 \Rightarrow \xi \to x \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(\xi) \to f(x) \Rightarrow F$ diffbar in x mit $F'(x) = f(x)$.

(2) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \underset{(1)}{\Longrightarrow}$ auch F Stammfkt von $f \underset{\text{Lemma 1.3,}}{\Longrightarrow}$

$F - G = \text{konst} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = G(b) - G(a)$ ∎

<u>Bezeichnung</u>: Ist F Stammfkt von $f \in R[a,b]$, so schreibt man

$$F(x) = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{}$$

„<u>unbestimmtes Integral</u>" von f
(eindeutig nur bis auf additive Konstante)

<u>Bsp</u>: 1. $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow \int_a^b x^s\,dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \Big|_a^b$

Dass $x^s \in R[a,b]$ sein muß, ergibt Einschränkungen an $[a,b]$:

- $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ beliebig, falls $s \in \mathbb{N}_0$;
- $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ oder $(-\infty, 0)$, falls $s \in \mathbb{Z}, s < 0$
- $[a,b] \subseteq (0,\infty)$, falls $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (Beachte: $x^s = e^{s \ln x}$)

Kurz: $\int x^s\,dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$ auf $\mathbb{R}$ bzw auf $(0,\infty)$ etc.

2. $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x \Big|_a^b & \text{falls } a,b > 0 \\ \ln(-x) \Big|_a^b & \text{falls } a,b < 0 \end{cases}$

Kurz: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$ auf $(0,\infty)$ oder $(-\infty,0)$

3. Für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $\int e^{cx}\,dx = \frac{1}{c} e^{cx}$ auf $\mathbb{R}$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x$; $\int \sin x\,dx = -\cos x$ (auf $\mathbb{R}$)

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ auf $(-1,1)$, denn

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $(-1,1)$ (Üb, Ana 1)

6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ auf $\mathbb{R}$ (Ana 1, § 11.3)

4. Integrationstechniken

1.6. Satz (Partielle Integration) Seien $f, g \in C^1[a,b] \Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f\cdot g'\,dx = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dx} \quad \text{bzw. } \int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

Beweis: $(fg)\Big|_a^b \underset{\text{HDI}}{=} \int_a^b (fg)'\,dx = \int_a^b (f'g + fg')\,dx \Rightarrow$ Beh.

Beispiele: 1. $\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x}\,dx = xe^x - \underbrace{\int e^x\,dx}_{=e^x} = (x-1)e^x$

2. $\int \ln x\,dx = \int \underset{g'}{1}\cdot \underset{f}{\ln x}\,dx = x\ln x - \underbrace{\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx}_{=x} = x(\ln x - 1)$

1.7. Satz (Substitutionsregel) Sei $f \in C(I)$ (dh. stetig), $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall, und $\varphi \in C^1[a,b]$ mit $\varphi([a,b]) \subseteq I$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx}$$

Merkregel: $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$, und Grenzen substituieren!

In Praxis oft: φ streng monoton ($\Rightarrow$ bijektiv). Dann:

$$\int_c^d f(x)\,dx \underset{\text{Subst. } x=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Beweis d. Satzes: Sei F Stammfkt von f auf $I \Rightarrow$

$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ (Kettenregel)

$$\underset{\text{HDI}}{\Rightarrow} \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \underset{\text{HDI}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Beispiele: 1. Sei $f \in C(\mathbb{R})$.

$c \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \int_a^b f(ct)\,dt \underset{x=ct,\,dx=c\,dt}{=} \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$

$c \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b f(t+c)\,dt \underset{x=t+c,\,dx=dt}{=} \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$

2. Sei $\varphi \in C^1[a,b]$ nullstellenfrei $\Rightarrow$

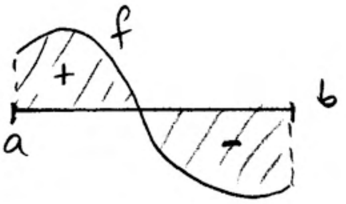
$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt \underset{f(x)=\frac{1}{x}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right|$$

3. <u>Fläche des Einheitskreises</u> (Radius 1)

<u>Vorab</u>: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfkt.

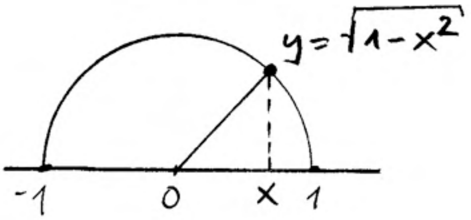
Flächeninhalt, der durch den Graphen von f und die x-Achse bestimmt ist:

$$A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition!}}}{:=} \int_a^b f(x)\,dx$$



(Mehr zu Flächeninhalt + Volumen $\to$ Analysis 3)

Einheitskreis: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

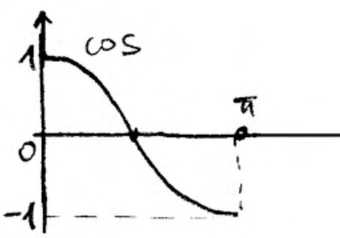


Flächeninhalt.

$$A = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

Subst. $x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$

$\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$ streng m.



$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt$$

$$\int \sin^2 t\,dt = \int \underset{f}{\sin t} \cdot \underset{g'}{\sin t}\,dt \underset{\text{part. Int.}}{=} -\sin t\cos t + \int \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t)$$

$$\Rightarrow \quad A = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = (t - \sin t\cos t)\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}}$$

<u>Bem</u>: $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n e^x\,dx$ etc:

Sukzessives Verkleinern des Exponenten n durch part. Int.

Bsp: $\int \underset{f}{x^n} \underset{g'}{e^x}\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx = \ldots$

4. Integration rationaler Fkt

Sei $R = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$, dh. Polynome mit reellen Koeff.

Fund. Satz d. Algebra (Ana 1) $\Rightarrow$ Q faktorisiert als Polynom über $\mathbb{C}$. Falls $Q(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ $\underset{Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}}{\Rightarrow}$ $Q(\bar\alpha) = \overline{Q(\alpha)} = 0$.

Dh. die nicht-reellen NS von Q treten als Paare konjugiert komplexer auf:

$$Q(x) = c \cdot \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i) \cdot \prod_{j=1}^{l} (x - \beta_j)(x - \bar\beta_j), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ \beta_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ k, l \in \mathbb{N}_0$$

Mit sog. Partialbruchzerlegung ($\rightarrow$ ZÜ) zeigt man:

$R(x)$ ist endliche Summe von Fkt der Form

- $S(x)$, S reelles Polynom ($\Rightarrow$ Stammfkt ebenso)
- $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $A, \alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$
- $\frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{\bar A}{(x-\bar\alpha)^k}$, $A \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$k \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$

$k = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$

$k = 1$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{\bar A}{x - \bar\alpha} = \frac{ax+b}{\underbrace{x^2+cx+d}_{>0 \text{ auf } \mathbb{R}}}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Integration mit $\ln$, $\arctan$ (ggf. nach Substitut.)

Details: Königsberger, Analysis 1

<u>Vorsicht</u>: Oft gibt es selbst zu einfachen Integranden keine geschlossen angebbare Stammfkt!

Bsp: $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$

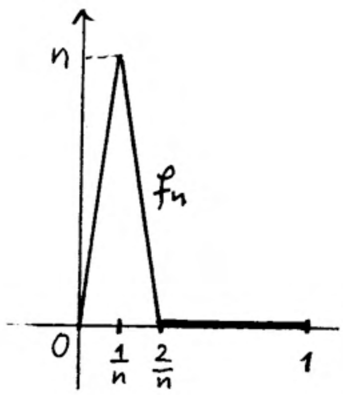
Klassische Sammlung von Stammfunktionen (+ vieles mehr):

<u>Bronstein</u> et al, Taschenbuch d. Mathematik, Ed. Harri Deutsch

Desktop Version (2016) online in unserer Bibliothek!

5. Integration und Limesbildung

Betrachte die Fkt-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1]$ gemäß Skizze.



$f_n \to f \equiv 0$ punktweise auf $[0,1]$

Aber: $\int_0^1 f_n dx = 1 \not\to \int_0^1 f dx = 0$

<u>Problem</u>: (f_n) ist nicht gleichmäßig konvergent.

Bei glm. Konvergenz darf man Integral und Limes vertauschen.

<u>Erinnerung</u> (Ana 1): Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Fkt $f_n: D \to \mathbb{C}$.

(f_n) konv. glm. gegen $f: D \to \mathbb{C}$ $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$ <u>und</u> $\forall x \in D$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, wobei $\|.\|_\infty = \|.\|_{\infty,D}$

1.8. <u>Satz</u> Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R[a,b]$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$ gegen $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f \in R[a,b]$, und

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Wähle Treppenfkt $\varphi_N \in T[a,b]$ mit $\|f_N - \varphi_N\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f - \varphi_N\|_\infty \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N - \varphi_N\|_\infty < 2\varepsilon \Rightarrow f \in R[a,b]$

Ferner: $\left|\int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx\right| \underset{\text{Standard-Abschätz.}}{\leq} (b-a)\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon(b-a) \; \forall n \geq N$

$\Rightarrow (*)$ ∎

6. Differentiation und Limesbildung

Bsp: $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$. $\quad f_n \to 0$ glm. auf $\mathbb{R}$

$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx) \Rightarrow (f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$!

Denn: Angenommen $\exists x \in \mathbb{R}: \sqrt{n}\cos(nx) \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\cos(nx) \to 0$ für $n \to \infty \Rightarrow \cos(2nx) \to 0 \quad (n \to \infty)$

Andererseits: $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1 \to -1$ ↯

1.9. Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1(I)$ mit

(i) (f_n) konvergiert punktweise gegen $f: I \to \mathbb{C}$

(ii) (f_n') " gleichmäßig auf I

Dann ist $f \in C^1(I)$, und $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \; \forall x \in I$.

Beweis: $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. (ii) $\Rightarrow$ g stetig auf I

(nach Satz 12.4, Ana 1)

Fixiere $x_0 \in I$, $x \in I$ bel. $\Rightarrow$ (mit HDI):

$$\begin{array}{ccccc} f_n(x) & = & f_n(x_0) & + & \underbrace{\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt} \\ {\scriptstyle n\to\infty}\downarrow & & \downarrow & & \\ f(x) & & f(x_0) & & \to \int_{x_0}^x g(t)\,dt \end{array}$$

nach Satz 1.8

Also: $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)\,dt \quad \forall x \in I$.

$\underset{\text{HDI}}{\Longrightarrow}$ f diffbar auf I mit $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Ferner: $f' = g$ stetig auf $I \Rightarrow f \in C^1(I)$ ∎

Satz 1.8 und 1.9 gelten insbesondere auch für Funktionenreihen.

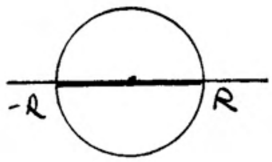
Speziell für Potenzreihen hat man:

1.10. Satz Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konv. Radius $R > 0$

$\Rightarrow$ (1) die gliedweise differenzierte Potenzreihe (PR)

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hat ebenfalls K.R. R

(2) f ist stetig diffbar auf dem offenen Intervall $(-R, R) \subseteq \mathbb{R}$ mit



$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Beweis: (1) Sei $\tilde{R}$ der KR von $\sum n a_n x^{n-1}$. Wurzelkrit. $\Rightarrow$

$$\tilde{R} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}\right)^{-1} \underset{\lim \sqrt[n]{n} = 1}{=} \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = R$$

(2) Betrachte die Partialsummen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Sei $0 < r < R \Rightarrow f_n \to f$ gleichmäßig auf $[-r, r]$ (Satz 12.9, Ana 1)

und (f_n') konvergiert ebenfalls glm. auf $[-r, r]$ (selber Satz)

Satz 1.9 $\underset{r<R \text{ bel.}}{\Longrightarrow}$ $f \in C^1(-R, R)$, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \sum_{1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ ∎

Iteration zeigt: die PR f ist beliebig oft diffbar auf $(-R, R)$ und darf jeweils gliedweise differenziert werden

Beispiel 1: Die Logarithmus-Reihe

$$L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{Konv. Radius } R = 1 \text{ (Quot. krit.)}$$

Satz 1.10 $\Rightarrow$ L stetig diffbar auf $(-1, 1)$ mit

$$\left.\begin{array}{l} L'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \dfrac{1}{1+x} \\ \text{Andererseits: } \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{d}{dx} \ln(1+x) \end{array}\right\} \underset{\text{Satz 10.10 Ana 1}}{\Longrightarrow}$$

$L(x) = c + \ln(1+x)$ auf $(-1,1)$ mit $c \in \mathbb{R}$

Bestimme c: $L(0) = 0 = \ln(1+0) \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Die Log-Reihe konvergiert (nach Leibniz-Krit.) auch für $x=1$:

$$L(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

alternierende harmonische Reihe

<u>Vermutung</u>: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$

<u>Beweis</u>: $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ konv. <u>glm.</u> auf ganz $[0,1]$, denn: Leibniz-Krit. $\Rightarrow \forall x \in [0,1]$ gilt: $L(x)$ konv., und $\left| L(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1} |x^{n+1}| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0,1]$

Konsequenz: L ist stetig auf $[0,1]$

$$\Rightarrow L(1) = \lim_{x \uparrow 1} L(x) = \lim_{x \uparrow 1} \ln(1+x) \overset{\ln(1+x) \text{ stetig in } x=1}{=} \ln 2. \qquad \blacksquare$$

<u>Beispiel 2</u>: <u>Die Binomialreihe</u> Sei $s \in \mathbb{C}$.

$$B_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n \quad ; \quad \text{KR } R \geq 1 \text{ (Ana 1)}$$

$\binom{s}{n} = \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-n+1)}{n!}$ $(n \neq 0)$; $\binom{s}{0} = 1$. $s \in \mathbb{N} \Rightarrow B_s(x) = (1+x)^s$

Satz 1.10 $\Rightarrow B_s \in C^1(-1,1)$ mit $B_s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{s}{n} x^{n-1}$

Beh: $B_s'(x) = \frac{s}{1+x} B_s(x) \quad \forall x \in (-1,1) \quad (*)$

Beweis: $(1+x) B_s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[(n+1)\binom{s}{n+1} + n \binom{s}{n} \right]}_{= s \cdot \binom{s}{n}} x^n = s B_s(x).$

<u>Beh</u>: $\boxed{\forall x \in (-1,1): \quad (1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^s}$

<u>Beweis</u>: Betrachte $g(x) := \frac{B_s(x)}{(1+x)^s}$, C^1 auf $(-1,1)$.

$$g'(x) = \frac{B_s'(x)\cdot(1+x)^s - s(1+x)^{s-1}B_s(x)}{(1+x)^{2s}} \underset{(*)}{=} 0$$

$$\Rightarrow g = \text{konst} = g(0) = B_s(0) = 1 \Rightarrow \text{Beh} \blacksquare$$

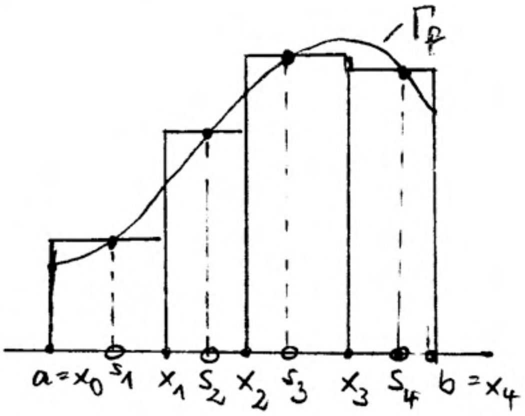
Also: $(1+x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2}x^2 + \dots, \quad x \in (-1,1)$

Wie groß ist der Fehler, wenn man nach dem n-ten Summanden abbricht? $\to$ später! (Taylorreihen)

7. Riemannsche Summen

Nützlich zur Approximation von Integralen.

Sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a,b]$



Sei $f \in R[a,b]$

Wähle „Stützstellen" $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(1 \le k \le n)$

Dann heißt
$$\sum_{k=1}^n f(s_k)(x_k - x_{k-1})$$
die Riemann-Summe von f zu Z und den Stützstellen $s_1, \dots, s_n$.

Feinheit von Z: $\quad \Delta(Z) := \max_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1})$

1.11. Approximationssatz Sei $f \in R[a,b]$. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ und beliebige Stützstellen $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt:
$$\left| \sum_{k=1}^n f(s_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Beweis: (I) f sei Treppenfkt mit $r \in \mathbb{N}$ Sprungstellen. (o.E. $f \neq$ konst.!). Wir haben

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(s_k)(x_k-x_{k-1}) - \int_a^b f\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(f(s_k)(x_k-x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\right)}_{=:a_k}\right|$$

1. Fall: $[x_{k-1}, x_k]$ enthält keine Sprungstelle von $f \Rightarrow a_k = 0$

2. Fall: " " Sprungstellen von $f \Rightarrow$

$$|a_k| \le 2\|f\|_\infty \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{<\delta} < \frac{\varepsilon}{2r}, \text{ sofern } \delta \le \frac{\varepsilon}{4r\|f\|_\infty} \quad (*)$$

Die r Sprungstellen gehören zu max. $2r$ Intervallen $[x_{k-1}, x_k]$

Mit δ gemäß $(*)$ gilt daher:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < 2r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} = \varepsilon, \text{ fertig.}$$

(II) $f \in R[a,b]$ beliebig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\varphi \in T[a,b]$ mit $\|f-\varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Zu φ exist. nach Teil (I) ein $\delta > 0$, so dass $\forall Z$ mit $\Delta(Z) < \delta$ und bel. $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt:

$$D := \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_1^n f(s_k)(x_k-x_{k-1}) - \int_a^b f\,dx\right| \le_{\Delta\text{-Ungl.}}$$

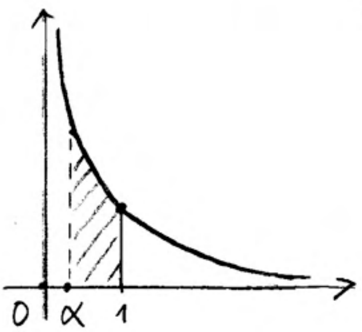
$$\le \underbrace{\left|\sum_1^n (f(s_k)-\varphi(s_k))(x_k-x_{k-1})\right|}_{\le \|f-\varphi\|_\infty \cdot (b-a) < \frac{\varepsilon}{3}} + D + \underbrace{\left|\int_a^b \varphi\,dx - \int_a^b f\,dx\right|}_{\le \int_a^b \|f-\varphi\|_\infty dx < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \quad \blacksquare$$

§ 2 Uneigentliche Integrale

Bisher: Integration über kompakte Intervalle $[a,b]$.
Integranden: Regelfunktionen auf $[a,b]$ (stets beschränkt)

Jetzt:
- Ausdehnung auf allgemeine Intervalle
- unbeschränkte Integranden

Bsp: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$. Problem: $\frac{1}{x^2}$ in 0 nicht definiert!



Idee: Betrachte
$$\int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}dx \quad \text{mit } \alpha \downarrow 0$$

Existiert der Limes? Falls ja, setze
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx := \lim_{\alpha\downarrow 0} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}dx.$$

Anderes Bsp: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$; betrachte $\int_1^R \frac{1}{x^2}dx$ mit $R\to\infty$

Bezeichnung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (beliebiges) Intervall. $f: I \to \mathbb{C}$ heißt Regelfkt, falls die Restriktion $f|_{[a,b]}$ Regelfkt ist für jedes kompakte Teilintervall $[a,b]\subseteq I$. (*) s. unten

Def. (1) Sei $f:(a,b] \to \mathbb{C}$ Regelfkt, $-\infty \leq a < b < \infty$
($a=-\infty$ möglich)

Setze $\int_a^b f(x)dx := \lim_{\alpha\downarrow a}\int_\alpha^b f(x)dx$, sofern der Limes (in $\mathbb{C}$) existiert.

Man sagt dann: das uneigentliche Integral $\int_a^b f dx$ existiert/konvergiert. a heißt kritische Grenze

(2) Analog für Regelfkt $f:[a,b) \to \mathbb{C}$, $-\infty < a < b \leq \infty$:
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta\uparrow b}\int_a^\beta f(x)dx,$$ sofern der Limes (in $\mathbb{C}$) existiert

(*) Regelfkt auf I sind z.B. alle stetigen oder monotonen Fkt auf I.

(3) Für Regelfkt $f:(a,b)\to\mathbb{C}$, $-\infty\le a<b\le\infty$:
Wähle $c\in(a,b)$ und setze

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

sofern beide uneigentlichen Integrale rechts konvergieren.
Wegen der Intervalladditivität des Int. ist diese Def. unabhängig von der Wahl von c.

2.1. Beispiele

(1) $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$, $a\in\mathbb{R}$. Kritisch: ∞

(i) $a\le 0$: $\int_0^p e^{-ax}\,dx \underset{p>0}{\geq} \int_0^p 1\,dx = p \underset{p\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ divergiert

(ii) $a>0$: $\int_0^p e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^p = \frac{1}{a}(1-e^{-ap}) \underset{p\to\infty}{\to} \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ $(s\in\mathbb{R})$; $x^s = e^{s\ln x}$. Kritisch: ∞

$$p>1 \Rightarrow \int_1^p \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\Big|_1^p = \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right), & \text{falls } s\neq 1 \\ \ln x\Big|_1^p = \ln p, & \text{falls } s=1 \end{cases}$$

$p\to\infty$ zeigt: $$\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & \text{falls } s>1 \\ \text{divergent, falls } s\le 1 \end{cases}}$$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ $(s\in\mathbb{R})$. Kritisch: 0 (sofern $s>0$)

$$0<\alpha<1 \Rightarrow \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}(1-\alpha^{1-s}), & \text{falls } s\neq 1 \\ -\ln\alpha, & \text{falls } s=1 \end{cases}$$

$\alpha\downarrow 0$ zeigt: $$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & \text{falls } s<1 \\ \text{divergent, falls } s\geq 1 \end{cases}}$$

(4) Ein Bsp. zur Vorsicht: $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ existiert nicht, obwohl

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-R}^{R} \right) = 0$$

Denn: die Limiten $+\infty, -\infty$ muß man getrennt betrachten, und $\int_0^\infty x\,dx$ existiert nicht. (gemäß Bsp (2)).

Wichtiges Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale:

2.2. Majorantenkriterium

Seien $f, g : [a,b) \to \mathbb{C}$ Regelfkt mit $g \geq 0$ und $|f| \leq g$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kritische Grenze)

Angenommen, $\int_a^b g\,dx$ existiert $\Rightarrow$ auch $\int_a^b f\,dx$ existiert.

Entsprechend auch für Intervalle $(a,b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Der Beweis beruht auf folgendem allgemeinen Satz:

2.3. Cauchy-Kriterium für Grenzwerte

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Fkt und $x_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufpkt von D.

Dann gilt:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\Longleftrightarrow$

(*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in U_\delta^*(x_0)$,

wobei $U_\delta^*(x_0) := \{x \in D - \{x_0\} : |x - x_0| < \delta\}$

„punktierte" δ-Umgebung von x_0 in D

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$" Sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0 \xRightarrow{\text{Grenzwert-Def.}}$

$\exists \delta > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in U_\delta^*(x_0) \xRightarrow[\Delta\text{-Ungl.}]{}$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in U_\delta^*(x_0)$

„$\Leftarrow$" x_0 HP von $D \Rightarrow \exists$ Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.

Wegen (*) gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$,

dh. $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Sei $a := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Mit $y = x_n$ in $(*)$ und $n \to \infty$ folgt dann:

$|f(x) - a| \leq \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta^*(x_0)$, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ ∎

<u>Beweis des Majorantenkriteriums:</u>

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \;;\quad G(x) := \int_a^x g(t)\,dt\,,\quad a \leq x < b\,.$$

Zu zeigen: $\lim\limits_{x \uparrow b} F(x)$ existiert. Dazu: $a \leq x \leq y < b$

$$\Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y g(t)\,dt = |G(y) - G(x)| \quad \otimes$$

$\lim\limits_{x \uparrow b} G(x)$ exist. (nach Vorauss.) $\Rightarrow$ G erfüllt das Cauchykrit. in $x_0 = b$ (= HP von $[a,b)$!) $\underset{\otimes}{\Rightarrow}$ auch F erfüllt das Cauchykrit. im $x_0 = b$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \uparrow b} F(x)$ exist. ∎

<u>Bsp:</u> <u>Beh:</u> $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert.

<u>Beweis:</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist stetig in 0 fortsetzbar mit $f(0) = 1$

Also: nur ∞ ist (echt) kritische Grenze.

$$R > 1 \Rightarrow \int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{\substack{\text{part. Int.} \\ \text{(erhöhe Potenz} \\ \text{im Nenner!)}}}{=} \underbrace{-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^R}_{= \cos 1 - \frac{\cos R}{R} \xrightarrow[R \to \infty]{} \cos 1} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Ferner: $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$ (Bsp 2.1) $\underset{\text{Majorantenkrit.}}{\Longrightarrow}$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergiert

Zusammen folgt: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert $\Rightarrow$ Beh ∎ (da auch $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ konv.)

<u>Aber:</u> $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert <u>nicht absolut</u>, d.h.

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \text{ divergiert!}$$

Denn: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq$

$$\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx}_{=2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to \infty \text{ für } n \to \infty \quad ∎$$

Noch ein nützliches Konvergenzkriterium:

2.4. Grenzwertkriterium

Seien $f, g : [a,b) \to \mathbb{C}$ Regelfkt, $g > 0$.
Angenommen, $\int_a^b g\,dx$ und $\lim\limits_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} =: c \in \mathbb{C}$ existieren

$\Rightarrow \int_a^b f\,dx$ existiert ebenfalls.

(Analog untere kritische Grenze)

Beweis: Voraussetz. $\Rightarrow \exists s \in [a,b) : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq |c| + 1 \;\; \forall x \in [s,b)$,
d.h. $|f| \leq (|c|+1) g$ auf $[s,b)$. $\int_s^b g\,dx$ exist. $\underset{\text{Maj.krit.}}{\Longrightarrow}$ Beh. ∎

2.5. Beispiel: Die Gamma-Funktion

Euler 1729: Suche nach einer Fkt mit kontinuierlichem Def.bereich, welche die Fakultät $n \mapsto n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ interpoliert.

Def. $\boxed{\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx}$ für $s \in \mathbb{R}, s > 0$.

Zur Konvergenz des Integrals (beide Grenzen kritisch):
Fixiere $s > 0$.

1. Auf $(0,1]$: $|x^{s-1} e^{-x}| \leq x^{s-1}$, $\int_0^1 x^{s-1}\,dx$ konv. (Bsp 2.1)

$\underset{\text{Majorantenkrit.}}{\Longrightarrow} \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx$ konv.

2. Auf $[1,\infty)$: Mit Grenzwertkrit ($b = \infty$). Vergleichsfkt:
$g(x) := e^{-x/2}$. $\int_1^\infty e^{-x/2}\,dx$ konv.;
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{s-1}}{e^{x/2}} = 0 \underset{\text{Grenzwertkrit.}}{\Longrightarrow}$
$\int_1^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ konvergiert ∎

Eigenschaften von Γ:

(1) $\Gamma(1) = 1$

(2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$ Funktionalgleichung

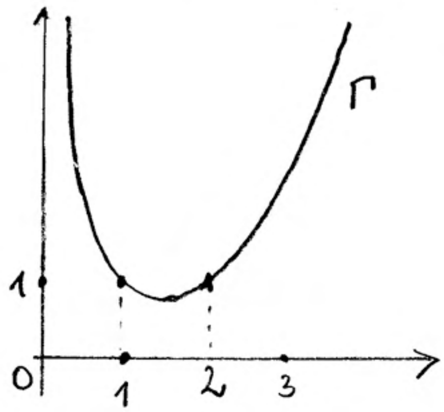
(3) $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, dh. Γ interpoliert die Fakultät

Beweis: (1) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ (siehe Bsp 2.1 (1))

(2) $\Gamma(s+1) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0, R \to \infty} \int_\varepsilon^R x^s e^{-x}\,dx$.

$$\int_\varepsilon^R x^s e^{-x}\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{-x^s e^{-x}\Big|_\varepsilon^R}_{\to 0} + s \cdot \underbrace{\int_\varepsilon^R x^{s-1} e^{-x}\,dx}_{\to \Gamma(s)}$$

jeweils für $\varepsilon \downarrow 0$, $R \to \infty$ $\Rightarrow$ Beh ∎



Γ ist eine der wichtigsten Funktionen in der Analysis, taucht oft in Normierungskonstanten auf.

Bemerkung zum Wachstum von $n!$

Stirlingsche Formel: $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}$

Dabei schreibt man für 2 Folgen $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$:

$a_n \sim b_n \;:\Longleftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (asymptotische Gleichheit)

Beweis d. Stirlingschen Formel: Proseminar!

(→ Forster, Analysis 1 oder Königsberger, Analysis 1)

Anwendung: Das Integralkriterium für Reihen

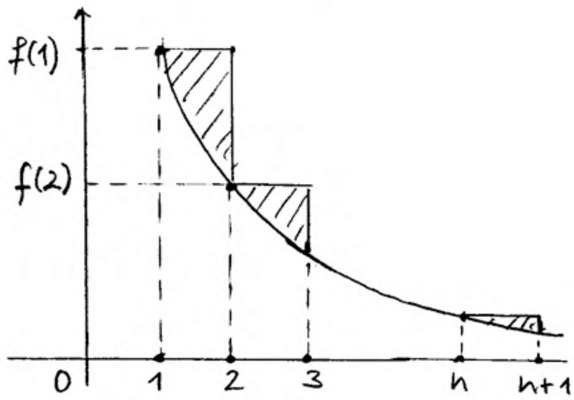
Motivation: Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$.

Für welche $s \in \mathbb{R}$ konv. die Reihe? Bekannt:

- $s \geq 2 \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$
- $s \leq 1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s} \geq \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ($\Rightarrow$ divergent)

2.6. Integralkriterium

Sei $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $f \geq 0$ ($\Rightarrow f$ Regelfkt!)



$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow a := \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, und

$0 \leq a \leq f(1)$

Ferner gilt:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

Beweis: f monoton fallend $\Rightarrow f(k) \geq \int_k^{k+1} \underbrace{f(x)}_{\in [f(k+1), f(k)]} dx \geq f(k+1)$

$\Rightarrow (a_n)$ ist monoton wachsend + beschr. mit $0 \leq a_n \leq f(1)$

$\underset{\text{Monotoniekrit.}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n =: a$ exist., und $0 \leq a \leq f(1)$

$(*)$ folgt nun mit der Def. von (a_n) ∎

Beispiel: (1) Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty \Leftrightarrow s > 1}$

Denn: o.E. $s > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^s}$ ist monoton fallend auf $[1,\infty)$ und $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ konv. für $s > 1$, div. $\forall\, 0 \leq s \leq 1$ ∎

(2) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) =: \gamma \in [0,1]$ existiert

$\uparrow$

Euler-Mascheroni-Konstante

Insbes.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ für $n \to \infty$

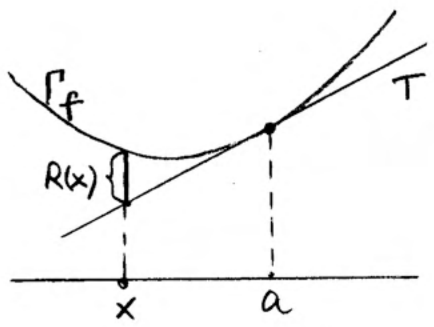
Denn: $$\frac{\sum_1^n \frac{1}{k}}{\ln n} = \underbrace{\frac{\sum_1^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)}{\ln n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}_{\to 1}$$

§ 3 Taylorreihen

1. Taylorpolynome

Lineare Approximation einer differenzierbaren Fkt:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in I$.



Tangente an den Graphen Γ_f von f im Pkt $(a, f(a))$:

$$T(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

Wie gut approximiert T den Graphen Γ_f?

Fehler: $R(x) = f(x) - T(x)$, $x \in I$

$R(a) = 0$

$$x \neq a \Rightarrow \frac{R(x)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a) \text{ für } x \to a} - f'(a) \quad \to 0 \quad \text{für } x \to a$$

d.h. $R(x)$ geht für $x \to a$ deutlich schneller gegen 0 als $x-a$

Ziel: Noch bessere Approximation von Γ_f nahe a durch Polynome höheren Grades, sofern f glatt genug.

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ n-mal diffbar in $a \in I$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall)

Gesucht: Polynom T, grad $T \leq n$, mit:

$$T(a) = f(a), \; T'(a) = f'(a), \ldots, \underbrace{T^{(n)}}_{n\text{-te Ableitung}}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (*)$$

Ansatz: $T(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$, $c_k \in \mathbb{C}$

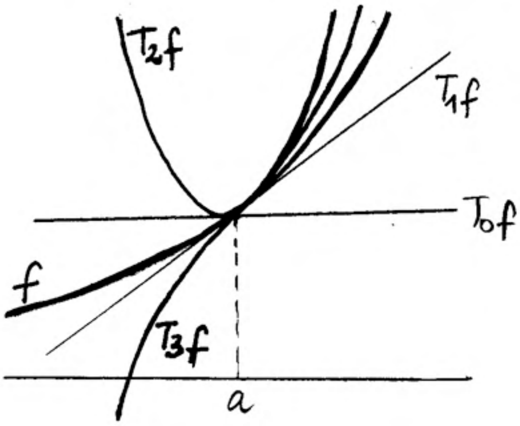
$$\Rightarrow T^{(k)}(a) = k!\, c_k \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

Konsequenz: $\exists!$ Polynom $T = T_n f$ vom Grad $\leq n$ mit $(*)$, nämlich

$$\boxed{T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}$$

Taylorpolynom n-ter Ordnung von f in a

$$T_n f(x;a) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$



$T_0 f$ hat selben Wert wie f in a

$T_1 f$ hat selben Wert + selbe Steigung wie f in a

$T_2 f$: selber Wert, selbe Steigung, selbe Krümmung

etc.

<u>Bsp</u>: $f(x) = \sqrt{1+x}$ auf $I = (-1,1)$ (beliebig oft diffbar)

Taylorpolynom 2. Ordnung von f in $a = 0$?

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$

$\Longrightarrow T_2 f(x;0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$

Wie gut approximiert $T_n f(x;a)$ den Graphen Γ_f nahe a?

Erwartung: Umso besser, je größer n

<u>Restglied</u>: $\boxed{R_{n+1}(x) := f(x) - T_n f(x;a)}$ $(x \in I)$

Erinnerung: Für Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$:

$C^n(I) := \{ f: I \to \mathbb{C} \text{ n-mal stetig diffbar} \}$

3.1. <u>Satz</u> (<u>Integralformel für das Restglied</u>)

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in I$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt} \quad \forall x \in I$$

<u>Beweis</u>: Induktion nach n.

$n = 0$: $R_1(x) = f(x) - T_0 f(x;a) = f(x) - f(a) \overset{HDI}{=} \int_a^x f'(t)\,dt$ ✓

$n-1 \to n$: $\quad f(x) - T_{n-1}f(x;a) = R_n(x) \underset{\text{I.V.}}{=}$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \quad = \quad (\text{part. Int.})$$

$$= \underbrace{-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{x}}_{= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

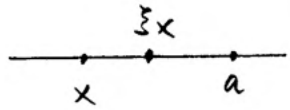
diesen Term nach links $\Rightarrow$ Beh. für n ∎

3.2. Korollar Sei $f \in C^{n+1}(I)$ mit $f^{(n+1)} \equiv 0$ auf I
$\Longrightarrow$ f ist Polynom vom Grad $\leq n$, nämlich

$$f(x) = T_n f(x;a) \qquad \text{mit beliebigem } a \in I.$$

3.3. Satz (Lagrange-Form des Restglieds)
Sei $f \in C^{n+1}(I)$ $\mathbb{R}$-wertig, $a \in I$. $\Longrightarrow$ zu jedem $x \in I$ existiert ein ξ_x zwischen a und x, so dass

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\cdot (x-a)^{n+1}}$$



$\xi_x \in [x,a]$ falls $x \leq a$

Speziell für $n=0$: $R_1(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_x)\cdot(x-a)$
$\hat{=}$ Mittelwertsatz (der Diff.R.)

Beweis: $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{} f^{(n+1)}(t)\,dt$
hat als Fkt von t einheitliches Vorzeichen zwischen a und x (da x einzige NS)

MWS d. Integralrechnung $\Longrightarrow$ $\exists\, \xi_x \in [a,x]$ (bzw $\in [x,a]$):

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_x) \underbrace{\int_a^x (x-t)^n\,dt}_{= \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}}$$ ∎

Anwendung von Satz 3.3:
Abschätzung von $|R_{n+1}(x)|$, Bestimmung des Vorzeichens von $R_{n+1}(x)$.

Bsp 1: $f(x) = \sin x$

Taylorentwicklung um $a = 0$: $\quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{= T_{2n+1} f(x;0) = T_{2n+2} f(x;0)} + R_{2n+3}(x)$$

$$|R_{2n+3}(x)| \underset{\text{Lagrange}}{\leq} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad \text{da } |f^{(2n+3)}(\xi)| \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Die Taylorpolynome stimmen überein mit den Partialsummen der Potenzreihe von $\sin x$. Dies ist kein Zufall, mehr dazu im nächsten Abschnitt!

Bsp 2: Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Sei $f \in C^{n+1}(I)$ $\mathbb{R}$-wertig, $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall. In $a \in I$ gelte

$$f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0, \quad \text{aber } f^{(n+1)}(a) \neq 0$$

$\Rightarrow f$ hat in a

(i) ein (isoliertes) lokales Minimum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(a) > 0$

(ii) " " Maximum, " " " " $f^{(n+1)}(a) < 0$

(iii) kein Extremum, falls n gerade

In Ana 1 hatten wir (i), (ii) für $n = 1$ (Satz 10.12).

Bsp: $f(x) = x^4$ auf $\mathbb{R}$. $f'(0) = \dots = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) > 0$

$\Rightarrow f$ hat lok. Min. in 0

Beweis: Lagrange-Formel $\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \otimes$

(ξ_x zwischen a und x)

(i) $f^{(n+1)}$ stetig $\Rightarrow f^{(n+1)} > 0$ in offenem Intervall $J \subseteq I$ um a

$\underset{n \text{ ungerade}}{\Longrightarrow} f(x) > f(a) \quad \forall x \in J \setminus \{a\}$. (ii) analog.

Zu (iii): $\otimes \Rightarrow f(x) - f(a)$ wechselt das Vorzeichen in a ∎

Qualitative Betrachtung:

Vorbemerkung: Landau-Symbole

Seien $f, g: D \to \mathbb{C}$ Fkt, $D \subseteq \mathbb{R}$, a Häufungspkt von D

Man schreibt

(1) $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$, falls $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(2) $f(x) = O(g(x))$ für $x \to a$, falls $\exists\, \delta > 0$ und $C > 0$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C \quad \forall x \in D \setminus \{a\} \text{ mit } |x-a| < \delta$$

Analog für $x \to \pm\infty$, sofern D nach oben bzw unten unbeschr.

Bsp: $|x|^{3/2} = o(x)$ für $x \to 0$, $x^3 - 2x^2 + 4 = O(x^3)$ für $x \to \infty$

3.4. Satz (Qualitative Taylorformel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C^n(I)$ (nicht notwendig $C^{n+1}(I)$!); $a \in I$.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f(x) = T_n f(x;a) + o((x-a)^n)} \quad \text{für } x \to a$$

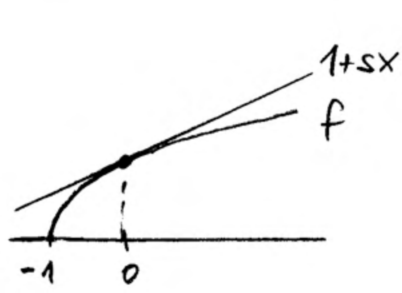
Beweis: o.E. f $\mathbb{R}$-wertig. $T_n f(x;a) = T_{n-1} f(x;a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

$$\Longrightarrow r(x) := \frac{f(x) - T_n f(x;a)}{(x-a)^n} = \underbrace{\frac{f(x) - T_{n-1} f(x;a)}{(x-a)^n}}_{\overset{=}{\text{Lagrange}}\ \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(ξ zwischen a, x)

$x \to a \Rightarrow \xi \to a \Longrightarrow f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(a)$, da $f^{(n)}$ stetig

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} r(x) = 0$ ∎



Bsp: $f(x) = (1+x)^s$, $x > -1$, $s \in \mathbb{R}$

$a := 0$

$f(0) = 1$, $f'(x) = s(1+x)^{s-1}$, $f'(0) = s$

$\Longrightarrow (1+x)^s = 1 + sx + o(x)$ für $x \to 0$

z.B.: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$; $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

2. Taylorreihen

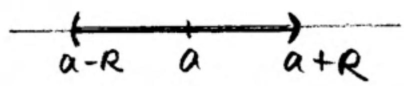
Def. Sei $f \in C^\infty(I)$, I Intervall. Taylorreihe von f um $a \in I$:

$$\boxed{Tf(x;a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

Beachte: $Tf(x;a)$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspkt a
(nur für reelle x betrachtet)

$Tf(x;a)$ konvergiert $\iff \lim_{n\to\infty} T_n f(x;a)$ existiert
Es kann vorkommen, dass $Tf(x;a)$ nur für $x=a$ konvergiert
(falls der konv. Radius der PR 0 ist)
Falls es ein offenes Intervall J um a gibt, so dass die Reihe $Tf(x;a)$ für alle $x \in J$ gegen $f(x)$ konvergiert, so sagt man:
f besitzt in J eine Taylorentwicklung um den Pkt a

3.5. Satz Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: (a-R, a+R) \to \mathbb{C}$ werde dargestellt durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$
mit Konv. Radius $R > 0$.



$\Rightarrow f \in C^\infty(a-R, a+R)$, und diese Reihe ist die Taylorreihe von f um a.

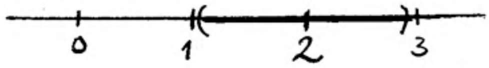
Beweis: Satz 1.10 $\Rightarrow f \in C^\infty(\dots)$, differenzieren gliedweise.
$k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(x-a)^{n-k}$
$\Rightarrow f^{(k)}(a) = c_k \cdot k! \Rightarrow$ Beh ■

Bsp: 1 $f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x) = Tf(x;0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
f wird auf ganz $\mathbb{R}$ durch seine Taylorreihe dargestellt.

2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $a = 2$ $\quad f \in C^\infty(1,\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{-1-(x-2)} = -\frac{1}{1+(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n \quad \text{für } |x-2| < 1$$

Dies ist die Taylorreihe von f um a.

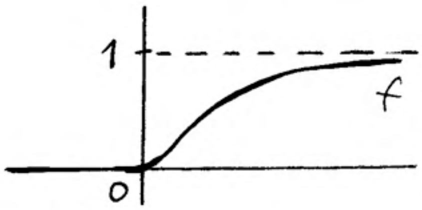


<u>Vorsicht</u>: Es kann passieren, dass für $f \in C^\infty(I)$ die Taylorreihe $Tf(x;a)$ in $x \neq a$ zwar konvergiert, aber <u>nicht</u> gegen $f(x)$, egal wie nahe x an a ist!

Aus $f \in C^\infty(I)$ folgt also <u>nicht</u>, dass f sich um jedes $a \in I$ lokal (d.h. in genug kleiner Umgebung von a) in eine Taylorreihe entwickeln ließe!

<u>Parade-Bsp</u>:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ (Übung)

Also: $Tf(x;0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, daher $f(x) \neq Tf(x;0) \ \forall x > 0$

$\Rightarrow$ f besitzt in keiner (noch so kleinen) Umgeb. von 0 eine Taylorentwicklung um 0.

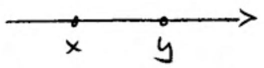
§ 4 Topologie metrischer Räume

Topologie: von griechisch „topos“: Ort

Um im $\mathbb{R}^n$ (oder noch allgemeineren Räumen) Analysis betreiben zu können, benötigt man Begriffe wie Abstand, Umgebungen, Konvergenz in solchen Räumen.

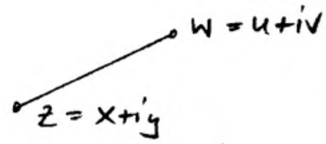
1. Metrische und normierte Räume

Üblicher Abstand in $\mathbb{R}$:



$$d(x,y) = |x-y|$$

in $\mathbb{C}$:



$$d(z,w) = |z-w| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

In beiden Fällen ist d eine sogenannte Metrik („Abstandsfkt“):

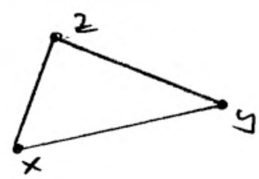
Def. Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to [0, \infty) \quad \text{mit}$$

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
(Dreiecks-Ungleichung)



(X, d) heißt metrischer Raum

Bsp: 1. $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$, $X = \mathbb{C}$ mit $d(z,w) = |z-w|$
(Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$, bekannt aus Ana 1)

2. X sei eine beliebige Menge. Dann definiert

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X (leicht zu sehen), die sog. diskrete Metrik

3. $X = \{0,1\}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0,1\}\}$ Binäre Folgen der Länge n

Hamming-Abstand auf X:

$d(x,y) := |\{i : x_i \neq y_i\}|$ (wichtig in Codierungstheorie)

Zur Δ-Ungl.: Angen. x, z unterscheiden sich in k Stellen

" y, z " " " ℓ "

$\Rightarrow$ x, y unterscheiden sich in höchstens $k + \ell$ Stellen

4. Sei (X, d) metrischer Raum, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ ist metr. Raum mit der von d <u>induzierten Metrik</u> $d_Y := d|_{Y \times Y}$

Viele metrische Räume entstehen aus Vektorräumen mit einer Norm (vgl. Analysis 1, § 12)

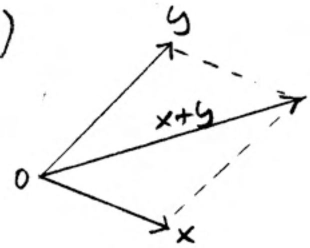
<u>Def.</u> Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine <u>Norm</u> auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to [0, \infty)$ mit

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (<u>Definitheit</u>)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (<u>Homogenität</u>)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (<u>Dreiecks-Ungl.</u>)

$(V, \|.\|)$ heißt <u>normierter Raum</u> (über $\mathbb{K}$)



4.1. <u>Lemma</u>. Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum $\Rightarrow$

$d(x,y) := \|x - y\|$ definiert eine Metrik auf V

<u>Beweis</u>: $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \underset{(N1)}{\Leftrightarrow} x = y$

$d(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| \underset{(N2)}{=} \|y - x\| = d(y,x)$

Δ-Ungl. $d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq$

$\underset{(N3)}{\leq} \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$ ∎

Bereits bekannte Beispiele normierter Räume: (vgl. Ana 1)

1. $V = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit üblichem Betrag $|\cdot|$ (induziert die Standardmetrik)

2. D Menge, $B(D) := \{f : D \to \mathbb{K},\ f \text{ beschränkt}\}$

   d.h. $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \ \forall x \in D$

   $B(D)$ ist normierter $\mathbb{K}$-VR mit punktweisen VR-Operationen und der Supremumsnorm

   $$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)| \qquad (\to \text{Ana 1, § 12 für } \mathbb{K} = \mathbb{C};\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ analog})$$

3. $D \subseteq \mathbb{R}$, $C_b(D) := \{f : D \to \mathbb{K} \text{ stetig + beschränkt}\}$

   $C_b(D)$ ist Unter-VR von $B(D)$, ebenfalls norm. Raum mit $\|\cdot\|_\infty$

Wichtige Normen auf $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$)

Def. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ setze

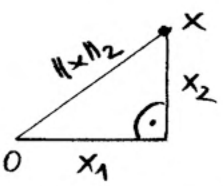
$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ Maximumsnorm, ∞-Norm

$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ Summennorm, 1-Norm

$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ Euklidische Norm, 2-Norm

Euklidische Metrik: $d(x,y) = \|x-y\|_2$

Im $\mathbb{R}^n$ ist dies der übliche Abstandsbegriff



(im $\mathbb{R}^2$: Pythagoras!)

Wir müssen noch zeigen, dass es sich tatsächlich um Normen handelt. Vorbereitung für $\|\cdot\|_2$:

Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ setze $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ $\left(= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}\right)$

„Standardskalarprodukt" im $\mathbb{K}^n$

Damit: $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2$; $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

4.2. Lemma (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\forall x,y \in \mathbb{K}^n: \quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Beweis: Zentralübung (siehe auch Lin. Alg. 2)

4.3. Satz Für $p = 1, 2, \infty$ ist $\|.\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.

Beweis: $\|x\|_p \ge 0$, $\|x\|_p = 0 \iff x_i = 0 \; \forall i \iff x = 0$

$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist klar

Δ-Ungl.: für $\|.\|_1$: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

für $\|.\|_\infty$: $\|x+y\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

für $\|.\|_2$: $\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + x_i\bar{y}_i + \bar{x}_i y_i + |y_i|^2)$

$$= \|x\|_2^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}_{\le 2|\langle x,y\rangle| \underset{\text{Cauchy-S.}}{\le} 2\|x\|_2\|y\|_2} + \|y\|_2^2$$

$\Rightarrow \|x+y\|_2^2 \le (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Rightarrow$ Beh ■

Bem 1. Allgemeiner ist für $1 \le p < \infty$ durch

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}$$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ definiert (p-Norm)

2. Zwischen $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ auf $\mathbb{K}^n$ bestehen Relationen.

Bsp: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Denn: $\max |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le n \cdot \max |x_i|^2$

Integralnormen

$R[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ Regelfkt}\}$ ist $\mathbb{C}$-VR

Für $f \in R[a,b]$ setze

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \|f\|_2 := \Big(\int_a^b |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

Sei $p \in \{1,2\}$. Dann: $\|f\|_p \ge 0$, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (klar)

Aber: $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f = 0$: Falls z.B. $f(x) \neq 0$ an endlich vielen Stellen $x \in [a,b]$, sonst $f(x) = 0$, so ist $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Rightarrow \|f\|_p = 0$

Dagegen: Falls $f \in C[a,b]$ (dh. stetig) mit $\|f\|_p = 0$

$\Longrightarrow f = 0$ (Satz 1.2)

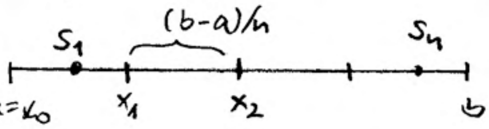
4.4. Satz Seien $f, g \in R[a,b] \Rightarrow$

(1) $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

(2) Für $p = 1, 2$ gilt: $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ (Δ-Ungl.)

4.5. Korollar $\|.\|_1, \|.\|_2$ sind Normen auf $C[a,b]$.
Auf $R[a,b]$ sind es nur sog. Halbnormen, dh. es gelten (N2), (N3), aber nicht die Definitheitsbed. (N1)

Beweis von Satz 4.4: Mit Riemann-Summen-Approx. (S. 1.11) aus Cauchy-Schwarz-Ungl. und Δ-Ungl. für $\|.\|_1, \|.\|_2$ im $\mathbb{K}^n$:
Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachte äquidistante Zerleg. von $[a,b]$ in n Intervalle. Dazu Stützstellen $s_1, .., s_n$



(1):

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n |f(s_k)g(s_k)| \cdot \frac{b-a}{n}}_{\downarrow n\to\infty \atop \int_a^b |f(x)g(x)|dx} \underset{\text{C.S in } \mathbb{C}^n}{\le} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |f(s_k)|^2 \cdot \frac{b-a}{n}\right)^{1/2}}_{\downarrow n\to\infty \atop \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |g(s_k)|^2 \cdot \frac{b-a}{n}\right)^{1/2}}_{\downarrow n\to\infty \atop \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}}$$

(2) analog ■

2. Topologische Grundbegriffe

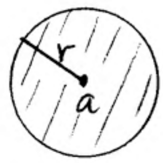
Stets: (X,d) metrischer Raum

z.B. X normierter Raum mit Norm $\|.\|$, $d(x,y) = \|x-y\|$

<u>Bezeichnung</u>: Zu $a \in X$ und $r > 0$ heißt

$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$

die <u>offene Kugel</u> mit Mittelpunkt a und Radius r.



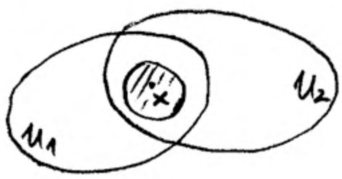
<u>Def.</u> Sei $x \in X$. $U \subseteq X$ heißt <u>Umgebung</u> von x :⟺

$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$

Insbes: $B_\varepsilon(x)$ ist selbst eine Umgebung von x („<u>ε-Umgebung</u>" von x)

4.6. <u>Lemma</u> (1) Sei U Umgebung von $x \in X$ und $W \subseteq X$ mit $W \supseteq U$ ⟹ auch W ist Umgeb. von x (klar)

(2) Seien U_1, U_2 Umgebungen von x ⟹ $U_1 \cap U_2$ ist auch Umgeb. von x



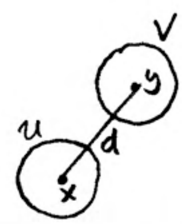
Zu (2): Sei $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U_1$, $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq U_2$,

$\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$ ▪

4.7. <u>Satz</u> (<u>Hausdorffsche Trennungseigenschaft</u>)

Zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$

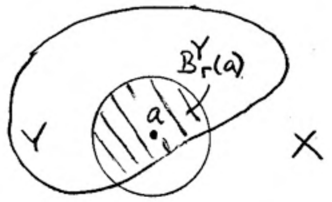
<u>Beweis</u>: $x \neq y \Rightarrow d := d(x,y) > 0$. Sei $0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$ ⟹



$\underbrace{B_\varepsilon(x)}_{=:U} \cap \underbrace{B_\varepsilon(y)}_{=:V} = \emptyset$, denn angen. $\exists z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$

$\Rightarrow d(x,z) < \varepsilon,\ d(y,z) < \varepsilon \xRightarrow[\Delta\text{-Ungl.}]{} d(x,y) < d$ ↯

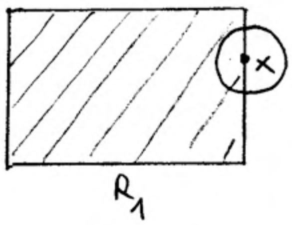
<u>Bemerkung</u>: Sei (X,d) metr. Raum, $Y \subseteq X$ mit induzierter Metrik d_Y



<u>Kugeln in Y</u> um $a \in Y$:

$$B_r^Y(a) = \{y \in Y : \underbrace{d_Y(y,a)}_{= d(y,a)} < r\} = B_r(a) \cap Y$$

Zur Motivation des Folgenden: Betrachte im $\mathbb{R}^2$ (mit euklid. Metrik) Rechtecke mit und ohne Rand:



R_1

R_2

$x \in R_1$, aber R_1 ist keine Umgebung von x (denn jede Kugel um x enthält Pkte aus $\mathbb{R}^2 \setminus R_1$)

Aber: R_2 ist Umgebung eines jeden seiner Punkte.

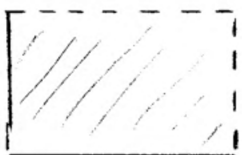
<u>Def.</u> Sei (X,d) metrischer Raum. $U \subseteq X$ heißt <u>offen</u>, falls U Umgebung eines jeden seiner Punkte ist, dh. falls gilt:

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

U offen

$A \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $X \setminus A =: A^c$ offen.

<u>Bsp</u>: 1. R_2 ist offen in $\mathbb{R}^2$, R_1 nicht offen, aber abgeschlossen (präzise Begründ. für abgeschl.: nächste Stunde!)

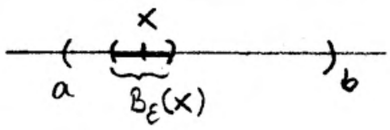


R_3

R_3 ist weder offen noch abgeschlossen ($\to$ Übung)

2. (X,d) metr. Raum $\Rightarrow$ $\emptyset, X$ sind sowohl offen als auch abgeschl. (X ist Umgeb. eines jeden $x \in X$ $\Rightarrow$ X offen $\Rightarrow$ $\emptyset$ abgeschl.; $\emptyset$ auch offen $\Rightarrow$ X abgeschl.)

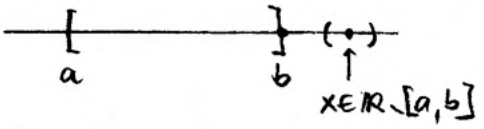
3. Intervalle in $\mathbb{R}$ (mit euklid. Metrik):



$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ offen, denn: sei $x \in (a,b)$

$\varepsilon < \min(|x-a|, |x-b|) \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq (a,b)$

Ebenso: (a,∞), $(-\infty,a)$ offen.



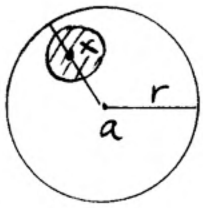
$[a,b]$ abgeschlossen, da $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ offen (analog wie oben)

$\underbrace{[a,\infty)}_{= \mathbb{R} \setminus (-\infty,a)}$, $(-\infty,a]$ ebenfalls abgeschlossen.

$[a,b)$, $(a,b]$: weder offen noch abgeschl.

4.8. Lemma Sei (X,d) metr. Raum, $a \in X$, $r > 0 \Rightarrow$
$B_r(a) \subseteq X$ ist offen (offene Kugeln sind offen)

Beweis (nicht selbstverständlich!)



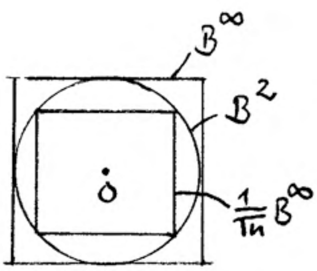
Sei $x \in B_r(a)$. z.z: $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$

Wähle $\varepsilon < r - d(x,a)$.

$y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(y,a) \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{d(y,x)}_{<\varepsilon} + d(x,a) < r \Rightarrow y \in B_r(a)$

Also $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$ ∎

Beobachtung: Im $\mathbb{R}^n$ haben wir:

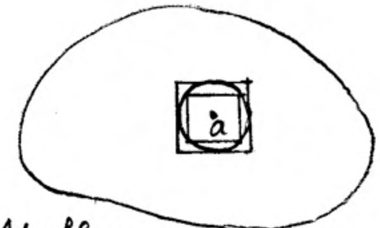


$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

Also: Falls $\|x\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|x\|_2 < 1 \Rightarrow \|x\|_\infty < 1$

Kugeln vom Radius 1 um 0: B^2, B^∞

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} B^\infty \subseteq B^2 \subseteq B^\infty$



U offen

Es folgt: jede offene $\|.\|_\infty$-Kugel enthält eine offene $\|.\|_2$-Kugel, und umgekehrt.

Konsequenz: die offenen Mengen bzgl. $\|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ sind dieselben!

Def. 2 Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem VR V heißen äquivalent, kurz: $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Konstanten $m, M > 0$:

$$\otimes \qquad m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1 \quad \forall\, x \in V$$

Beachte: aus $\otimes$ folgt: $\frac{1}{M}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{m}\|x\|_2$. (leicht: $\sim$ ist Äquivalenzrel.)

Wie im Bsp. zuvor sieht man: $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ auf V $\Rightarrow$ die offenen Mengen bzgl. $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ sind dieselben.

Für p-Normen im $\mathbb{R}^n$: $\|.\|_\infty \sim \|.\|_2$ (s. oben), $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ (Üb)

Allg. gilt sogar: je 2 Normen auf einem endlichdim. VR sind äquivalent (Beweis später)

Im Folgenden stets (sofern nichts anderes vermerkt):

$\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklid. Metrik (induziert durch $\underbrace{\|.\|_2}_{=|.|\text{ falls } n=1}$)

$\mathbb{C}$ mit Standardmetrik $d(z,w) = |z-w|$

4.9. Satz Sei (X,d) metr. Raum $\Rightarrow$

(i) $\emptyset$ und X sind offen (schon gezeigt)

(ii) $U, V \subseteq X$ offen $\Rightarrow$ $U \cap V$ ist offen

(iii) $U_i \subseteq X$ offen, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge) $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist offen (bel. Vereinigungen offener Mengen sind offen)

Iteration von (ii) zeigt: der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Dies gilt nicht für unendliche Schnitte!

Bsp in $\mathbb{R}$: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ nicht offen

Beweis d. Satzes: (ii) Sei $x \in U \cap V$. U, V offen $\Rightarrow$ U, V sind Umgebungen von x, also auch $U \cap V$ nach Lemma 4.6 $\Rightarrow$ $U \cap V$ offen

(iii) Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ $\Rightarrow$ $\exists\, i_0 \in I$: $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} ist offen, also

Umgeb. von $x \underset{\text{Lemma 4.6.}}{\Longrightarrow}$ auch $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq U_{i_0}$ ist Umgeb. von x ∎

4.10. <u>Korollar</u> Sei (X,d) metr. Raum $\Rightarrow$ die Vereinigung endlich vieler, sowie der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen in X sind abgeschlossen

<u>Beweis</u>: 1. $A_1,\dots,A_n \subseteq X$ abg. $\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c \underset{\text{de Morgan}}{=} \bigcap_{i=1}^n \underbrace{A_i^c}_{\text{offen}}$, also offen nach (ii)

2. A_i abgeschl., $i\in I \Rightarrow \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$, offen nach (iii) ∎

<u>Begriff der Topologie:</u>

Sei (X,d) metr. Raum. Betrachte das Mengensystem

$$\tau_d := \{U \subseteq X : U \text{ offen (bzgl. } d)\}$$

τ_d bildet eine sog. Topologie auf X, im Sinne der

<u>Def.</u> Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\tau \subseteq \underset{\text{Potenzmenge von } X}{\mathcal{P}(X)}$ heißt <u>Topologie</u> auf X, falls

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

(iii) $U_i \in \tau$, $i \in I$ (I bel. Indexmenge) $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$

(X,τ) heißt <u>topologischer Raum</u>

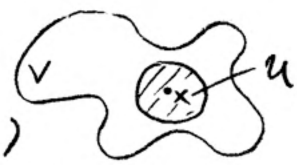
<u>Bezeichnungen</u>: Sei (X,τ) top. Raum.

$U \subseteq X$ heißt offen, falls $U \in \tau$

$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $A^c = X \setminus A \in \tau$

$V \subseteq X$ heißt Umgebung von $x\in X$:$\Leftrightarrow$

$\exists U \in \tau : x \in U \subseteq V$ (V muß nicht offen sein!)



(X,τ) heißt <u>Hausdorff-Raum</u>, falls je 2 verschiedene Punkte aus X disjunkte Umgebungen besitzen.

Ist (X,d) metr. Raum, so heißt τ_d (siehe oben) die von der Metrik d induzierte Topologie auf X

Vorsicht: nicht jede Topologie wird von einer Metrik induziert!

Def (Produktmetrik) Seien (X_1,d_1), (X_2,d_2) metr. Räume, $X := X_1 \times X_2 = \{x = (x_1,x_2) : x_i \in X_i\}$. Produktmetrik auf X:

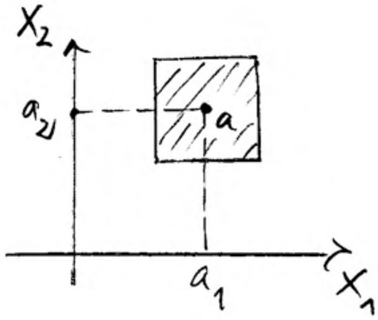
$$d(x,y) := \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2))$$

Tatsächlich Metrik: Übung

Offene Kugeln bzgl. d: $a = (a_1,a_2) \in X \Rightarrow$

$$B_r(a) = \{x \in X : d_1(x_1,a_1) < r \wedge d_2(x_2,a_2) < r\}$$
$$= \underset{\nwarrow}{B_r(a_1)} \times \underset{\nearrow}{B_r(a_2)}$$

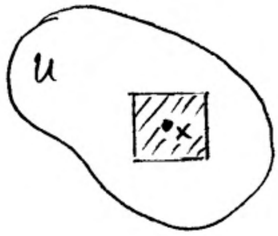
bzgl. d_1, d_2



Die von d induzierte Topologie τ_d auf X heißt Produkttopologie

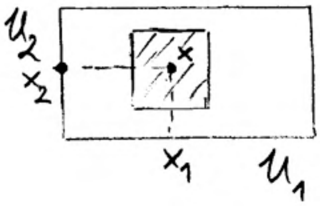
Offene Mengen in (X,d)? Sei $U \subseteq X$. Dann:

$$U \in \tau_d \iff \forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B_\varepsilon(x)}_{= B_\varepsilon(x_1) \times B_\varepsilon(x_2)} \subseteq U$$



Insbes: $U_i \subseteq X_i$ offen, $i = 1,2 \Rightarrow$
$U_1 \times U_2 \subseteq X$ offen

(denn: $x \in U_1 \times U_2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_i) \subseteq U_i$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \times U_2$)

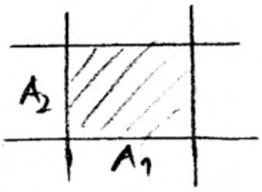


Aber: es gibt wesentlich mehr offene Mengen als diese Produkte!

Ferner: $A_i \subseteq X_i$ abgeschl. $(i = 1,2) \Rightarrow A_1 \times A_2 \subseteq X$ abgeschl.

Denn: $(A_1 \times A_2)^c = (A_1^c \times X_2) \cup (X_1 \times A_2^c)$

offen



Bsp: $X_1 = \mathbb{K}^n$, $X_2 = \mathbb{K}^m$ mit $\|.\|_\infty$ (induziert euklid. Topologie, da $\|.\|_\infty \sim \|.\|_2$)

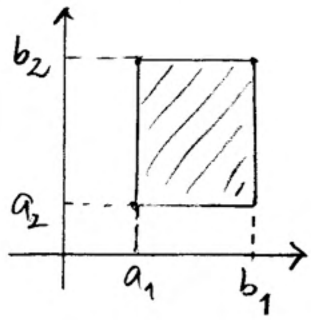
Produktmetrik auf $X = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \underset{\text{als VR}}{\cong} \mathbb{K}^{n+m}$: $\quad x = (x', x'')$, $x' \in \mathbb{K}^n$, $x'' \in \mathbb{K}^m$

$d(x,y) = \max(\|x'-y'\|_\infty, \|x''-y''\|_\infty) = \|x-y\|_\infty$

$\Rightarrow$ die Produkttop. ist die übliche euklid. Topologie auf X!

Bsp: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl., $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abg. $\Rightarrow A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ abgeschl. (in euklid. Metrik); ebenso für offen.

Iteration zeigt: Quader $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ sind abgeschl.; $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ offen



Def. Sei (X,d) metr. Raum, $M \subseteq X$.

(a) $\overline{M} := \bigcap \{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen}, M \subseteq A\}$

Abschluss von M, abgeschlossene Hülle von M

$\overline{M}$ ist abgeschl. nach Kor. 4.10, und zwar die kleinste abgeschl. Menge in X, die M enthält.

(b) $\mathring{M} := \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ offen}, U \subseteq M\}$

Inneres von M, offener Kern von M

$\mathring{M}$ ist offen nach Satz 4.9, und zwar die größte offene Menge, die in M enthalten ist.

(c) $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$ $\quad$ Rand von M

4.11. Lemma 1. $\mathring{M} \subseteq M \subseteq \overline{M}$ $\quad$ (klar)

2. $\overline{M} \underset{(c)}{=} \mathring{M} \cup \partial M \underset{\text{da } M \subseteq \overline{M}}{=} M \cup \partial M$; $\quad \mathring{M} \underset{(c)}{=} \overline{M} \setminus \partial M \overset{\text{da } \mathring{M} \subseteq M}{=} M \setminus \partial M$

3. M abgeschlossen $\Leftrightarrow M = \overline{M}$ $\quad$ („$\Rightarrow$" mit $A = M$ in (a))

4. M offen $\Leftrightarrow M = \mathring{M}$ $\quad$ („$\Rightarrow$" mit $U = M$ in (b))

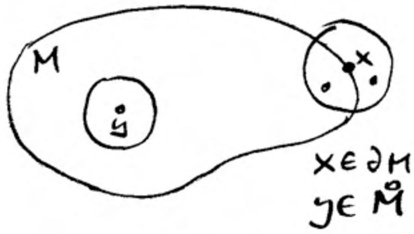
$\underset{2.}{\Leftrightarrow} M \cap \partial M = \emptyset$

Nützliche Charakterisierung:

4.12. <u>Satz</u> (1) $x \in \overline{M} \Leftrightarrow$ jede Umgebung von x enthält Punkte aus M.

(2) $x \in \mathring{M} \Leftrightarrow M$ ist Umgebung von $x \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: \; B_\varepsilon(x) \subseteq M$

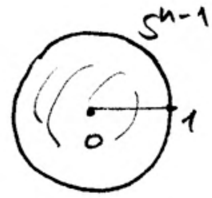
(3) $x \in \partial M \Leftrightarrow$ jede Umgeb. von x enthält Punkte aus M <u>und</u> aus $X \setminus M$



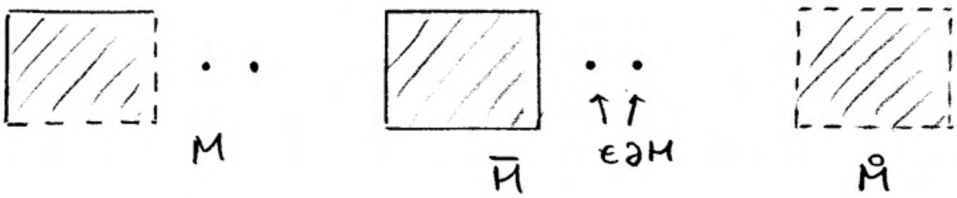
Konsequenz aus (3): $\partial M = \partial(X \setminus M)$

<u>Bsp</u>: 1. Sei $M = [a,b], [a,b), (a,b], (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ (mit Standardmetr.)
$\Rightarrow \overline{M} = [a,b], \; \mathring{M} = (a,b), \; \partial M = \{a,b\}$

2. $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\} \Rightarrow K$ abgeschl.
$\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} =: S^{n-1}$ $\Big\}$ Üb.!
Einheitssphäre



3.



<u>Beweis v. Satz 4.12</u>: (1) Wir zeigen:

$x \notin \overline{M} \Leftrightarrow x$ hat Umgebung V mit $V \cap M = \emptyset$ $(*)$

Dazu: $(*) \Leftrightarrow x$ hat offene Umgeb. $U = B_\varepsilon(x)$ mit $U \cap M = \emptyset$

$\underset{A := X \setminus U}{\Longleftrightarrow} \exists$ abgeschl. $A \subseteq X$ mit $M \subseteq A$ und $x \notin A$

$\Longleftrightarrow x \notin \bigcap \{A \subseteq X$ abgeschl., $M \subseteq A\} = \overline{M}$

(2) $x \in \mathring{M} \underset{\text{Def. von } \mathring{M}}{\Longleftrightarrow} \exists U \subseteq M: \; U$ offen, $x \in U$

$\Longleftrightarrow M$ ist Umgeb. von x.

(3) $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$ und (1) + (2) zeigen: $x \in \partial M \iff$
jede Umgeb. von x schneidet M, ist aber nicht ganz in M enthalten. $\blacksquare$

<u>Def.</u> $M \subseteq X$ heißt <u>dicht</u> in X, falls $\overline{M} = X$

Bsp: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

3. Folgen und Konvergenz

<u>Def.</u> Sei (X,d) metr. Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge von Punkten in X.

(x_n) konvergiert gegen x, kurz:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (oder $x_n \to x$ für $n \to \infty$)

$:\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \underset{n_0(\varepsilon)}{n_0} \in \mathbb{N} : \underbrace{x_n \in B_\varepsilon(x)}_{\iff d(x_n,x)<\varepsilon} \; \forall n \geq n_0$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$

$\iff$ Zu jeder Umgeb. U von x exist. $n_0 \in \mathbb{N}$:

$x_n \in U \;\forall n \geq n_0$

(denn jede Umgeb. von x enthält auch eine ε-Umg.)

<u>Def.</u> Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ heißt <u>Cauchyfolge</u> (bzgl. d)

$:\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; d(x_n, x_m) < \varepsilon \;\; \forall n,m \geq n_0$

Beachte: jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.

Denn: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n,m \geq n_0 : d(x_n,x_m) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_n,x) + d(x,x_m) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

<u>Def.</u> Ein metrischer Raum X heißt <u>vollständig</u>, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Ein vollständiger normierter Raum heißt <u>Banachraum</u>

(Stefan Banach, 1892 - 1945)

Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit üblichem Betrag $|.|$ $\Rightarrow$ $(\mathbb{K}, |.|)$ ist vollständig, also Banachraum (Cauchykrit., Ana 1)

Weitere Bsp.? Zunächst eine Beobachtung:

4.13. Lemma Sei V $\mathbb{K}$-VR mit äquivalenten Normen $\|.\|, \|.\|'$ dh. $\exists m, M > 0: \quad m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\| \quad \forall x \in V$

Dann sind die konvergenten Folgen, Nullfolgen, Cauchyfolgen bzgl. $\|.\|'$ dieselben wie bzgl. $\|.\|$ (klar)

Insbes: V vollständig bzgl. $\|.\| \Leftrightarrow V$ vollst. bzgl. $\|.\|'$

4.14. Satz (Konvergenz im $\mathbb{K}^n$) $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Sei $\mathbb{K}^n$ versehen mit der euklid. Norm und $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Folge, $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})$, $x_{ji} \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$\lim_{j\to\infty} x_j = a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} x_{ji} = a_i \quad \forall 1 \le i \le n$$

Dh. Konvergenz im $\mathbb{K}^n$ ist äquivalent zu komponentenweise Konvergenz.

Beweis: Da $\|.\|_2 \sim \|.\|_\infty$ können wir mit $\|.\|_\infty$ arbeiten.

Es gilt: $\|x_j - a\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow \max_{1\le i\le n} |x_{ji} - a_i| \to 0$ für $j \to \infty$

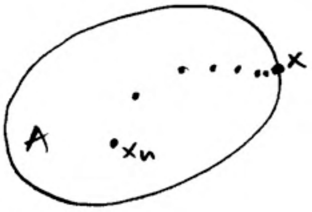
$$\Leftrightarrow \forall 1 \le i \le n: \lim_{j\to\infty} |x_{ji} - a_i| = 0 \qquad \blacksquare$$

4.15. Satz $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ ist Banachraum; ebenso mit den äquiv. Normen $\|.\|_\infty, \|.\|_1$ gemäß Lemma 4.13.

Beweis: Rückführung auf $n = 1$. Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^n$ Cauchyfolge (C.F.) bzgl. $\|.\|_2$, $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})$. $1 \le i \le n \Rightarrow$ $|x_{ji} - x_{ki}| \le \|x_j - x_k\|_2 \Rightarrow \forall 1 \le i \le n$ ist $(x_{ji})_{j\in\mathbb{N}}$ eine C.F. im $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$ vollständig $\Rightarrow \exists a_i \in \mathbb{K}: \lim_{j\to\infty} x_{ji} = a_i$

$\underset{\text{Satz 4.14}}{\Longrightarrow} \lim_{j\to\infty} x_j = a = (a_1, \dots, a_n)$ ∎

4.16. Satz (Folgencharakterisierung der Abgeschlossenheit)
Sei X ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ sind äquivalent:
A abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ gilt $x \in A$.



Beweis: „$\Rightarrow$" Angen. $\exists$ Folge $(x_n) \subseteq A$ mit $x_n \to x \in X \setminus A$. $X \setminus A$ offen $\Rightarrow$
$\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subseteq X\setminus A \underset{x_n \in A}{\Longrightarrow} x_n \notin B_\varepsilon(x) \ \forall n$, Widerspruch zu $x_n \to x$
„$\Leftarrow$" Angen. A nicht abgeschl. $\Rightarrow X \setminus A$ nicht offen
$\Rightarrow \exists x \in X \setminus A$, so dass jede ε-Kugel $B_\varepsilon(x)$ Punkte aus A enthält. Wähle $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \notin A$ ↯ ∎

4.17. Satz. Sei (X,d) vollständiger metr. Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ A mit der induzierten Metrik d_A ist ebenfalls vollständig.

Beweis: Sei $(x_n) \subseteq A$ C.F. (bzgl. d_A) $\Rightarrow (x_n)$ ist C.F. in X
X vollständig $\Rightarrow \exists x \in X: x_n \to x$. A abgeschl. $\underset{\text{S.4.16}}{\Longrightarrow} x \in A$ ∎

Bsp: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl. (in euklid. Metrik) $\Rightarrow$ A ist vollständig bzgl. $\|.\|_p$, $p = 1, 2, \infty$

Zum Abschluss des Kapitels:

Bsp. Der Banachraum $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ $\left[\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \right]$
$C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{C} \text{ stetig} \}$, $\mathbb{C}$-VR
Beh: $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ ist vollständig.

Beweis: Sei $(f_n) \subseteq C[a,b]$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|.\|_\infty$, dh

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

$x \in [a,b] \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad (*)$

$\Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge im $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ vollständig $\Rightarrow f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$ existiert.

Dh. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f: [a,b] \to \mathbb{C}$

Beh: Es gilt sogar $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

Dazu: Sei $n \geq n_0$.

$$x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \overset{\text{Trick!}}{=} \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \underset{(*)}{\leq} \varepsilon$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ Beh.

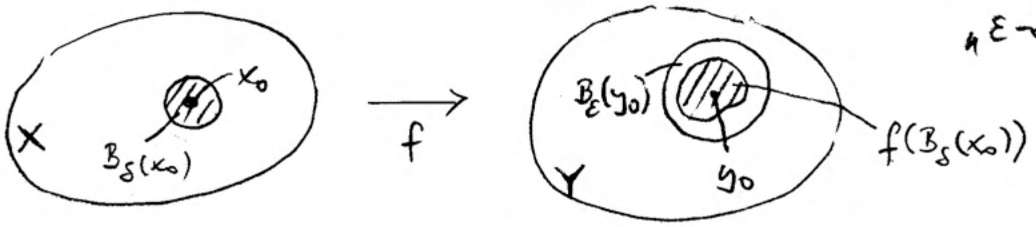
f ist stetig auf $[a,b]$ als Grenzfkt einer glm. konvergenten Folge stetiger Fkt. Also: (f_n) konvergiert in $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ ∎

§ 5 Stetigkeit und Kompaktheit

1. Stetige Abbildungen

<u>Def.</u> Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abb.
$f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u> in $x_0 \in X$ $:\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \;\; \forall x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$

„ε-δ-Kriterium"



$y_0 = f(x_0)$

Äquivalent: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.

f <u>stetig auf X</u> $:\Longleftrightarrow$ f stetig in allen $x_0 \in X$

$f: X \to Y$ heißt <u>Lipschitz-stetig</u> auf X $:\Longleftrightarrow$
$\exists L \geq 0: \; d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x') \;\; \forall x, x' \in X$

$\uparrow$ Lipschitz-Konstante

Jede L-stetige Abb. auf X ist stetig auf X (universelles $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, da o.E. $L > 0$)

<u>Bsp:</u> 1. (X, d) metr. Raum, $a \in X$

$f: X \to \mathbb{R}, \; f(x) := d(x, a)$ (Abstand von a)

$|f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x,y)$

$\Rightarrow$ f ist Lipschitz-stetig auf X mit $L = 1$

2. $(V, \|.\|)$ normierter Raum $\Rightarrow$ $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ ist L-stetig mit $L = 1$, denn: $\big| \|x\| - \|y\| \big| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|x - y\|$

Das nächste Kriterium für Stetigkeit ist oft handlicher als das ε-δ-Kriterium.

5.1. <u>Folgenkriterium für Stetigkeit</u> (X, Y metrische Räume)

Für $f: X \to Y$ sind äquivalent:

(i) f ist stetig in $x_0 \in X$

(ii) Für jede Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Man sagt auch: f ist folgenstetig in x_0

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) (wörtlich wie Satz 8.1, Ana 1 für $f: \underset{\mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}}{D \subseteq} \to \mathbb{C}$):

Sei $(x_n) \subseteq X$ mit $x_n \to x_0$. f stetig in $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:

$d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \;\; \forall n$ mit $d_X(x_n, x_0) < \delta$

$x_n \to x_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: d(x_n, x_0) < \delta \;\; \forall n \geq n_0 \Longrightarrow$

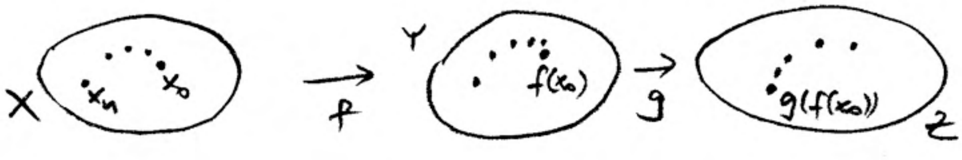
$d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0 \Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$. (ii) $\Rightarrow$ (i) ebenfalls analog zu Ana 1, Satz 8.1. ■

<u>Konsequenz:</u> Ist X oder Y normierter Raum, so ist Stetigkeit in $x_0 \in X$ unabhängig vom Wechsel zu einer äquivalenten Norm auf X bzw Y.

5.2. <u>Satz</u> <u>(Komposition stetiger Abbildungen)</u>

Gegeben: X, Y, Z metr. Räume, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Abb.

Sei f stetig in $x_0 \in X$, g stetig in $f(x_0)$ $\Longrightarrow g \circ f: X \to Z$ ist stetig in x_0.



<u>Beweis:</u> Sei $(x_n) \subseteq X$ mit $x_n \to x_0 \underset{f \text{ stetig in } x_0}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(x_0)$

$\underset{g \text{ stetig in } f(x_0)}{\Longrightarrow} g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ ■

5.3. <u>Lemma</u> Sei X metr. Raum, $f, g: X \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in X$

$\Longrightarrow f+g, f \cdot g, cf$ ($c \in \mathbb{K}$) sind stetig in x_0.

$\frac{f}{g}$ ebenfalls, falls $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in X$.

Beweis: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0),\ g(x_n) \to g(x_0) \Longrightarrow$

$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$, etc.

Sei (X,d) metr. Raum, $f: X \to \mathbb{K}^n$ Abb. ($\mathbb{K}^n$ mit euklid. Metrik)

Schreibe $f = (f_1, \ldots, f_n)$ mit Komponentenfkt $f_i: X \to \mathbb{K}$

d.h. $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$

5.4. Satz $f = (f_1, \ldots, f_n): X \to \mathbb{K}^n$ stetig in $x_0 \in X$

$\Longleftrightarrow$ alle f_i sind stetig in x_0

Beweis: Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_j \to x_0$. Dann gilt mit Satz 4.14:

$f(x_j) \to f(x_0)$ in $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow \forall\, 1 \le i \le n: f_i(x_j) \to f_i(x_0)$ in $\mathbb{K}$.

Mit dem Folgenkriterium f. Stetigkeit folgt die Beh. ∎

Speziell für die id. Abb. $id: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto x$ (stetig!) folgt:

5.5. Korollar Die Koordinatenfkt $\pi_i: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$,

$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i \quad (1 \le i \le n)$ sind stetig.

5.6. Bsp: Polynomfunktionen

Bezeichnungen vorab:

Multiindizes der Länge $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{N}_0^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n): \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$

Ordnung von $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

Eine Fkt der Form $p_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$p_\alpha(x) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} =: x^\alpha$$

heißt ein Monom vom Grad $|\alpha|$

Bsp ($n=2$): $\alpha = (3,1) \Rightarrow x^\alpha = x_1^3 x_2$; $\alpha = (2,2) \Rightarrow x^\alpha = x_1^2 x_2^2$

Grad jeweils 4.

Eine Polynomfkt vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Fkt d. Form

$p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha x^\alpha$ mit Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{C}$, wobei $c_\alpha \neq 0$ für mindestens ein α mit $|\alpha| = k$.

$p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist stetig wegen Lemma 5.3 + Kor. 5.5

Analog: Polynomfkt $p: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, ebenfalls stetig.

5.7. Satz Sei $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear ($n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow f$ ist stetig ($\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ mit euklid. Top.)

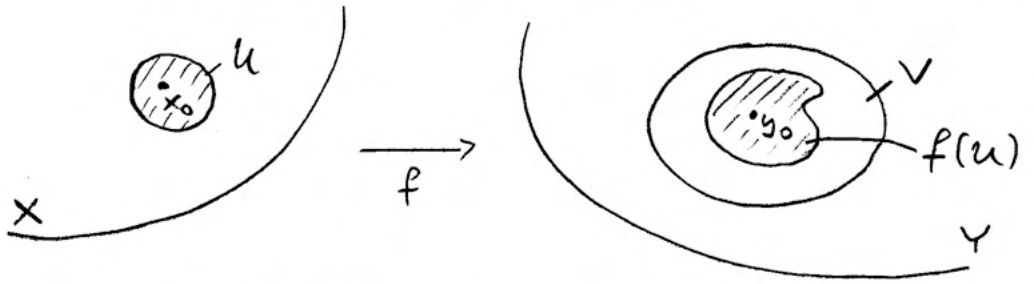
Beweis: $f(x) = Ax$ mit Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$f = (f_1, \dots, f_m)$ mit $f_i(x) = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$

f_i stetig, da Polynom $\underset{\text{Satz 5.4}}{\Longrightarrow}$ f stetig ■

5.8. Satz Seien X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ Abb. Dann gilt:

f stetig in $x_0 \in X \iff \forall$ Umgeb. V von $f(x_0)$ in Y $\exists$ Umgeb. $\mathcal{U}$ von x_0 in X mit $f(\mathcal{U}) \subseteq V$



$y_0 = f(x_0)$

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei V Umgeb. von $y_0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(y_0) \subseteq V$

f stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0: f(\underbrace{B_\delta(x_0)}_{=:\mathcal{U}}) \subseteq B_\varepsilon(y_0) \subseteq V$.

„$\Leftarrow$" Zu $V := B_\varepsilon(y_0)$ exist. Umg. $\mathcal{U}$ von x_0: $f(\mathcal{U}) \subseteq V$.

Sei $B_\delta(x_0) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(y_0) \Rightarrow f$ stetig in x_0 ■

5.9. Satz v. der globalen Stetigkeit Für $f: X \to Y$ sind äquivalent:

(1) f stetig auf X

(2) $V \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(V)$ offen in X (Urbilder offener Mengen sind offen)

(3) $A \subseteq Y$ abgeschl. $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschl. in X.

Beweis: Übung!

Wichtiger Spezialfall: X metr. Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ ist $\underbrace{\{x \in X : f(x) < c\}}_{= f^{-1}((-\infty, c))} \subseteq X$ offen,

$\{x \in X : f(x) \le c\} \subseteq X$ abgeschl.

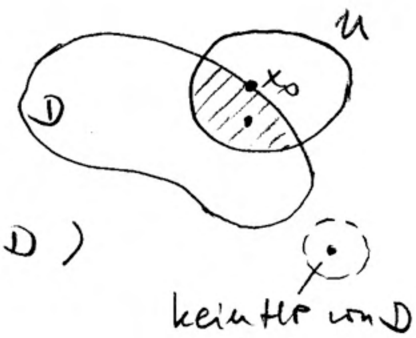
Offene/abgeschl. Mengen sind oft auf solche Weise gegeben!

Bsp: siehe unten! (*)

Grenzwerte: (vgl. Ana 1 in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$!)

Def. Sei X metrischer Raum, $D \subseteq X$

(1) $x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt von D :$\Leftrightarrow$ jede Umgeb. $U \subseteq X$ von x_0 enthält mindestens 1 von x_0 verschiedenen Pkt aus D



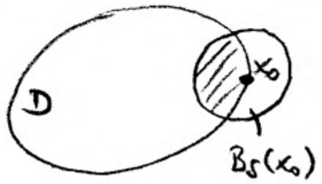
(Beachte Unterschied zu $x_0 \in \overline{D}$!

Die $x_0 \in \overline{D}$ heißen auch Berührpunkte von D)

(2) Sei $f: D \to Y$ Abb., Y metr. Raum, $x_0 \in X$ HP von D.

$a \in Y$ heißt Grenzwert von f in x_0, kurz: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

:$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(x) \in B_\varepsilon(a) \;\; \forall x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap B_\delta(x_0)$

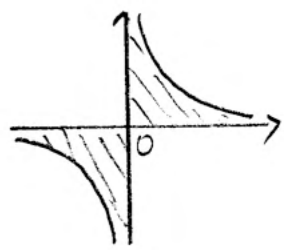


Äquivalent: Für jede Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to a$

(vgl. Ana 1, Satz 8.10)

Falls $x_0 \in D$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f$ stetig in x_0

(*) Bsp: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 1\}$ ist abgeschl. in $\mathbb{R}^2$



2. Homöomorphismen

Def. Seien X, Y metr. Räume. $f: X \to Y$ heißt <u>Homöomorphismus</u>, falls f stetig + bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig.

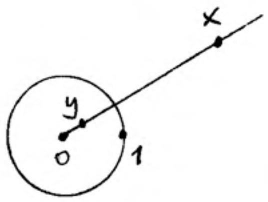
X, Y <u>homöomorph</u> ($X \cong Y$) $:\Leftrightarrow \exists$ Homöom. $f: X \to Y$

(dies ist offenbar Äquiv.Rel. auf der Menge d. metr. Räume)

<u>Bsp</u>: (1) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig + streng monoton $\Rightarrow$ $f: I \to f(I)$ ist Homöom. (Satz v.d. Stetigkeit d. Umkehrfkt)

(2) $B = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < 1\}$ ($\|.\|$ beliebige Norm)

$\Rightarrow f: \mathbb{R}^n \to B$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|}$ ist Homöom., dh. $B \cong \mathbb{R}^n$!



<u>Beweis</u>: $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f(x) \in B$, da $\dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$

f stetig, da $x \mapsto \|x\|$ stetig, und daher alle Komponenten von f stetig.

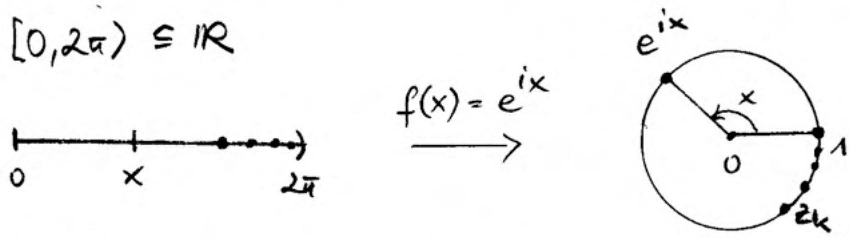
Ferner: $y = \dfrac{x}{1+\|x\|} \Rightarrow \|y\| = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} \Rightarrow 1 + \|x\| = \dfrac{1}{1-\|y\|}$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{1-\|y\|}$$

$\Rightarrow f$ bijektiv mit $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$, f^{-1} stetig auf B.

(3) Ein Bsp., wo $f: X \to Y$ stetig + bij., aber f^{-1} <u>nicht</u> stetig:

$X = [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$



$Y = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (Einheitskreis)

X, Y mit der von $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$ induzierten Metrik.

$f: X \to Y$, $f(x) = e^{ix}$ ist stetig + bij., aber f^{-1} nicht stetig in $z = 1$. Denn: $z_k = e^{i(2\pi - \frac{1}{k})}$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow z_k \to 1$,

aber $f^{-1}(z_k) = 2\pi - \frac{1}{k} \to 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1)$

Wir werden sehen: es gibt <u>keinen</u> Homöom. $f: X \to Y$!

3. Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei (X,d) metr. Raum, $f: X \to X$ Abb.

Gesucht: Eine Lösung der Gleichung

$$(*) \quad x = f(x)$$

Eine solche Lsg heißt ein <u>Fixpunkt</u> von f.

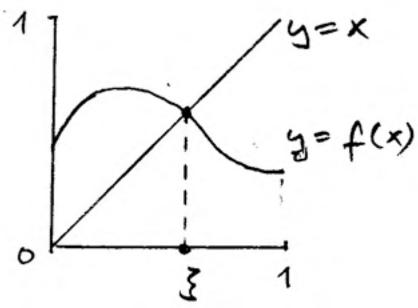
Im Allgemeinen läßt sich über die Lösbarkeit von $(*)$, und erst recht, wie man eine Lsg explizit erhält, wenig aussagen.

<u>Bsp</u>: $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to X$ stetig

Zwischenwertsatz für $g(x) = f(x) - x$

$\Rightarrow f$ hat einen Fixpkt $\xi \in [0,1]$

(Üb. Ana 1)



<u>Def.</u> (X,d) metr. Raum. $f: X \to X$ heißt <u>kontrahierend</u>

$:\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq L < 1$:

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

($\Leftrightarrow f$ ist Lipschitz-stetig mit L-Konst. < 1)

<u>Bsp</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to I$ diffbar mit $|f'(x)| \leq L < 1 \; \forall x$

$\Rightarrow f$ kontrahierend. Denn: MWS $\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \; \forall x,y$

5.10. <u>Banachscher Fixpunktsatz</u>

Sei (X,d) vollständiger metr. Raum $(X \neq \emptyset)$ und $f: X \to X$ sei kontrahierend mit Kontraktionskonst. $L < 1 \Rightarrow$

(1) f besitzt genau 1 Fixpunkt $\xi \in X$.

(2) Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ rekursiv durch:

$x_0 \in X$ beliebig (Startpkt); $\quad x_{n+1} := f(x_n)$

$\Rightarrow \xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(3) <u>Fehlerabschätzung</u> in (2): $d(x_n, \xi) \le \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)$

<u>Beweis</u>: Definiere (x_n) gemäß (2).

$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_{n+m}, x_n) = d(f(x_{n+m-1}), f(x_{n-1})) \le L\, d(x_{n+m-1}, x_{n-1})$

Induktion $\Rightarrow d(x_{n+m}, x_n) \le L^n d(x_m, x_0)$

Insbes: $d(x_{n+1}, x_n) \le L^n d(x_1, x_0) \Rightarrow$

$$d(x_m, x_0) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_1, x_0)$$
$$\le \underbrace{(L^{m-1} + L^{m-2} + \dots + 1)}_{\le \sum_{k=0}^{\infty} L^k = \frac{1}{1-L}} \cdot d(x_1, x_0)$$

$\Rightarrow d(x_{n+m}, x_n) \le \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \to 0$ mit $n \to \infty$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in X, also konvergent (da X vollst.)

Sei $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \xi$

$\Rightarrow \xi = f(\xi)$.

Fehler: $d(\xi, x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ d(\cdot, x_n) \text{ stetig}}}{=} \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \le \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)$

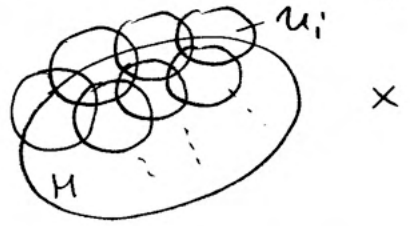
Eindeutigkeit von ξ: sei auch $\eta = f(\eta) \Rightarrow$

$d(\xi, \eta) = d(f(\xi), f(\eta)) \le L\, d(\xi, \eta) \underset{L<1}{\Longrightarrow} d(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \xi = \eta$ ■

4. Kompaktheit

Stets: (X,d) metrischer Raum

Def. Sei $M \subseteq X$. Eine <u>offene Überdeckung</u> von M ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen $U_i \subseteq X$ (I eine Indexmenge) mit
$$M \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$



Def. $K \subseteq X$ heißt <u>kompakt</u>, wenn es zu <u>jeder</u> offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ gibt, so dass bereits
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

Man sagt dazu: „Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung".

X heißt <u>kompakter metrischer Raum</u>, falls X als Teilmenge von sich selbst kompakt ist, dh. falls jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt

<u>Achtung</u>: Für Kompaktheit von K reicht es nicht aus, dass K überhaupt eine endliche offene Überdeckung besitzt! (X allein bildet für jedes $K \subseteq X$ eine offene Überd.)

5.11. <u>Satz</u> Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$
$\Rightarrow K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ ist kompakt.

<u>Beweis:</u> Sei $(U_i)_{i\in I}$ bel. offene Überdeck. von K.

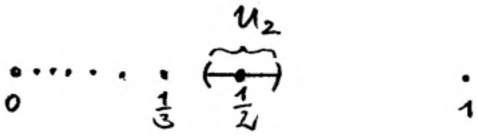
$x_0 \in U_{i_0}$ (offen), $x_n \to x_0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$: $x_n \in U_{i_0}$ $\forall n > N$. Sei $x_1 \in U_{i_1}, \dots, x_N \in U_{i_N}$

$\Rightarrow \{U_{i_1}, \dots, U_{i_N}, U_{i_0}\}$ ist endliche Teilüberdeckung von K ∎

$x_0 \in K$ ist hier wichtig! Dies zeigt das folgende

<u>Bsp.</u> $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

$0 \notin M$

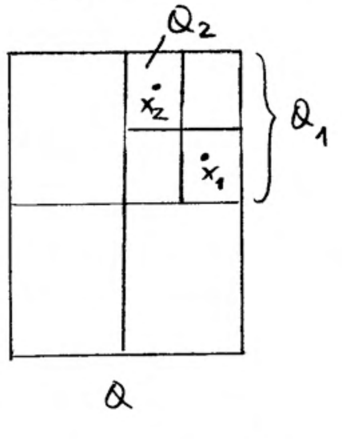


M nicht kompakt, denn: $U_n := \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überdeckt M, aber jedes $x \in M$ liegt in genau 1 der U_n $\Rightarrow$ es gibt keine endliche Teilüberdeckung.

5.12. <u>Satz</u> In $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ ist jeder abgeschlossene Quader
$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad (a_i \leq b_i)$ kompakt.

(Die Bezeichnung „kompakt" für Intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ in Ana 1 ist daher im Einklang mit der allg. Kompaktheitsdef.)

<u>Beweis</u>: Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von Q



Annahme: (U_i) hat keine endliche Teilüberd.
Zerlege Q in 2^n abgeschl. Quader halber Kantenlängen. Mindestens 1 davon wird dann nicht durch endlich viele der U_i überdeckt. Nenne diesen Q_1. Wiederhole Verfahren mit Q_1, etc.

Iteration liefert Folge abgeschlossener Quader $Q_k \subseteq Q$, $k \in \mathbb{N}$ mit
(i) $Q_{k+1} \subseteq Q_k$
(ii) Q_k wird nicht durch endlich viele der U_i überdeckt
Kantenlängen von Q_k: $\frac{|b_i - a_i|}{2^k} \to 0$ für $k \to \infty$
Wähle $x_k \in Q_k \Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, da
$x_k, x_m \in Q_k \;\forall m \geq k$

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ vollst. (Satz 4.15) $\Rightarrow \exists\, \xi \in \mathbb{R}^n: \xi = \lim_{k\to\infty} x_k$

Q_k abgeschl., $x_m \in Q_k \;\forall m \geq k \Rightarrow \xi \in Q_k \;\forall k$. Insbes. $\xi \in Q$

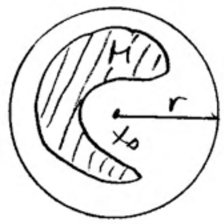
$\Rightarrow \exists\, i_0 \in I: \xi \in \mathcal{U}_{i_0} \underset{\mathcal{U}_{i_0} \text{ offen}}{\Longrightarrow}$ für genug großes k ist $Q_k \subseteq \mathcal{U}_{i_0}$

$\lightning$ zu (ii) ∎

Def. Sei X metr. Raum.

$M \subseteq X$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow$

$\exists\, x_0 \in X$ und $r > 0$: $M \subseteq B_r(x_0)$



5.13. Satz $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow$ K ist abgeschlossen + beschränkt

Beweis: Sei $x_0 \in X$ bel. $\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i(x_0) = X$

K komp. $\Rightarrow \exists\, i_1 \leq \ldots \leq i_n \in \mathbb{N}: K \subseteq B_{i_1}(x_0) \cup \ldots \cup B_{i_n}(x_0) = B_{i_n}(x_0)$

$\Rightarrow K$ beschränkt

Beh: K abgeschl. Zeige dazu: $X \setminus K$ ist offen

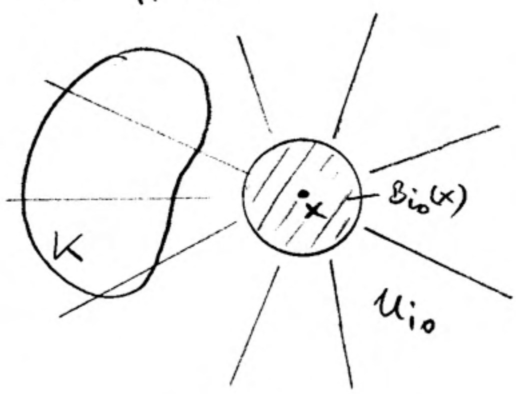
Sei $x \in X \setminus K$. Für $i \in \mathbb{N}$ setze

$\mathcal{U}_i := \{y \in X: d(y,x) > \frac{1}{i}\}$ (offen)

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i = X \setminus \{x\} \Rightarrow$

$(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist offene Überd. von K,

$\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_{i+1}$.



K komp. $\Rightarrow \exists\, i_0 \in \mathbb{N}: K \subseteq \mathcal{U}_{i_0} \Rightarrow K \cap B_{i_0}(x) = \emptyset \Rightarrow$ Beh ∎

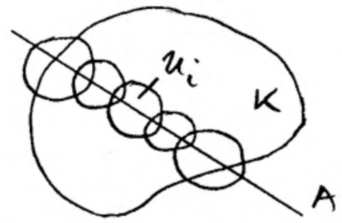
5.14. Korollar Jede konvergente Folge in X ist beschränkt (wegen Satz 5.11.)

5.15. Satz Sei $K \subseteq X$ kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $K \cap A$ ist kompakt.

Speziell: X kompakter metr. Raum, $A \subseteq X$ abgeschl. $\Rightarrow$ A kompakt.

Beweis: Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $K \cap A$.

Füge $U_0 := X \setminus A$ hinzu $\Rightarrow$ U_0 und $(U_i)_{i\in I}$ bilden offene Überdeckung von K



K kompakt $\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_n \in I$:

$K \subseteq \underbrace{U_0}_{= X\setminus A} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \Rightarrow$

$K \cap A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ ∎

5.16. Satz von Heine-Borel Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $\|.\|_2$) gilt:

K kompakt $\Leftrightarrow$ K ist abgeschlossen + beschränkt

Beweis: Wegen Satz 5.13 ist noch „$\Leftarrow$" zu zeigen. Dazu:

K beschr. $\Rightarrow \exists$ Quader $Q = [-r, r]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $K \subseteq Q$

Q kompakt (S. 5.12), K abgeschl. $\Rightarrow K = K \cap Q$ kompakt ∎

Vorsicht: Heine-Borel (dh. „$\Leftarrow$" darin) gilt nicht in beliebigen met. oder normierten Räumen! Tatsächlich gilt „$\Leftarrow$" in einem normierten Raum V genau dann, wenn $\dim V < \infty$

Bsp: X Menge mit diskrete Metrik ($\Rightarrow \{x\}$ offen $\forall x \in X$) $\Rightarrow$ Jedes $M \subseteq X$ ist abgeschlossen + beschr. ($d(x,0) = 1 \quad \forall x \neq 0$)
Aber M nicht kompakt, falls $|M| = \infty$, da die offene Überdeck. $(\{x\})_{x\in M}$ keine endliche Teilüberdeckung hat.

Bsp. für ∞-dim. normierten Raum: $(C[a,b], \|.\|_\infty)$

$\dim C[a,b] = \infty$, denn die Monome x^n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind lin. unabhängig in $C[a,b]$. Dazu: Seien $a_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \;\; \forall x \in [a,b] \underset{\substack{\text{Id.Satz f.}\\ \text{Polynome (Ana 1)}}}{\Longrightarrow} a_k = 0 \;\; \forall k.$$

5.17. Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei X metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow$ jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ besitzt eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die in K konvergiert

Beweis: Angen. keine Teilfolge von (x_n) konv. in K.
Sei $x \in K \Rightarrow \exists$ offene Umgeb. U_x von x, die nur endlich viele der x_n enthält (denn sonst würde jede Kugel $B_{1/j}(x)$ ein x_{n_j} mit $n_j > n_{j-1}$ enthalten, also wäre (x_{n_j}) Teilfolge von (x_n) mit $x_{n_j} \to x$ $\lightning$)
K kompakt $\Rightarrow$ endlich viele der U_x überdecken K $\Rightarrow$
K enthält nur endlich viele x_n $\lightning$

5.18. Korollar Im $\mathbb{R}^n$ hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.

Denn: Die Folge ist in einem kompakten Quader enthalten.

5.19. Satz Seien X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ stetig
Sei $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow$ auch $f(K) \subseteq Y$ ist kompakt

Beweis: Sei $(V_i)_{i\in I} \subseteq Y$ offene Überdeck. von $f(K)$
f stetig $\Rightarrow U_i := f^{-1}(V_i) \subseteq X$ offen, und $K \subseteq \underbrace{\bigcup_{i\in I} U_i}_{=f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i)}$
K kompakt $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n: K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$
$\Rightarrow f(K) \subseteq f(U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}) \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} \Rightarrow$ Beh ■

Folgerung: Seien X, Y homöomorphe metr. Räume. Ist einer davon kompakt, so auch der andere.

Bsp dazu (Vervollständigung von Bsp 3, Abschnitt 2):
$X = [0, 2\pi)$, $Y = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (mit indu**z**. Metrik)

X nicht kompakt, Y kompakt, da abgeschl. + beschr. in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \nexists$ Homöom. $f: X \to Y$.

Erinnerung an Satz v. Max/Min. in Ana 1:
$I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f nimmt auf I ein Max. und ein Min. an.
Allgemeiner:

5.20. <u>Satz v. Maximum und Minimum</u> (X metr. Raum)
Sei $K \subseteq X$ kompakt, $f: K \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist beschränkt und nimmt auf K ein (globales) Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_0, x_1 \in K$:
$$\forall x \in K: \ f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

<u>Beweis</u>: Satz 5.19 $\Rightarrow$ $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.
Allg. gilt: $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\Rightarrow$ M abgeschl + beschr. $\Rightarrow$
$s := \sup M < \infty$. Ferner: $s \in M$, denn $\exists$ Folge $(x_n) \subseteq M$:
$s = \lim x_n \Rightarrow_{M \text{ abg.}} s \in M$.
Analog $\inf M \in M$.
Mit $M = f(K)$ folgt: $\exists x_0, x_1 \in K$: $f(x_0) = \inf f(K)$, $f(x_1) = \sup f(K)$ ∎

5.21. <u>Satz</u> Je 2 Normen $\|.\|, \|.\|'$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h. $\exists m, M > 0$: $m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

<u>Beweis</u>: Es genügt z. zeigen: $\|.\|$ bel. Norm auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow \|.\| \sim \|.\|_2$
(da $\sim$ Äquiv. Rel.)
<u>1. Schritt</u>: $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{e_i}_{\text{Standardbasis}} \Rightarrow$
$$\|x\| \underset{\Delta\text{-U.}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\| \underset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_i \|e_i\|^2\right)^{1/2}}_{=: M > 0} \cdot \underbrace{\left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}}_{= \|x\|_2} \qquad (*)$$

2. Schritt: $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ (Einheitssphäre)

S abgeschl. + beschr. $\underset{\text{Heine-Borel}}{\Longrightarrow}$ S kompakt (bzgl. euklid. Metrik)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ ist stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, da

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x-y\| \underset{(*)}{\le} M \|x-y\|_2$$

$\underset{5.5.20}{\Longrightarrow}$ f nimmt auf S ein Minimum m an.

$m > 0$, da $0 \notin S$.

Also gilt $\forall x \in S$: $0 < m \le \|x\| \underset{(*)}{\le} M$

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel. $\Rightarrow \frac{x}{\|x\|_2} \in S \Rightarrow m \le \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \le M$

$$\Rightarrow m\|x\|_2 \le \|x\| \le M \|x\|_2 \qquad \blacksquare$$

Konsequenz: Im $\mathbb{R}^n$ sind die Begriffe offen / abgeschlossen / kompakt sowie Konvergenz v. Folgen etc **unabhängig von der Wahl der Norm**!

5.22. Korollar Sei V endlich-dim. $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.

Beweis. Jeder normierte $\mathbb{C}$-VR kann als norm. $\mathbb{R}$-VR aufgefaßt werden $\Rightarrow$ o.E. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sei $\dim V = n$. Fixiere Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V \Rightarrow$

$\varphi: \mathbb{R}^n \to V$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ist VR-Isomorphismus

Seien $\|.\|$, $\|.\|'$ Normen auf $V \Rightarrow \|x\|_\varphi := \|\varphi(x)\|$ ist Norm auf $\mathbb{R}^n$, ebenso $\|x\|_\varphi' := \|\varphi(x)\|'$

$\|.\|_\varphi \sim \|.\|_\varphi'$ im $\mathbb{R}^n$ (Satz 5.21) $\Rightarrow \|.\| \sim \|.\|'$ in V $\quad \blacksquare$

Def. Seien X, Y metr. Räume. Eine Abb. $f: X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig auf X, falls:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \forall x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$

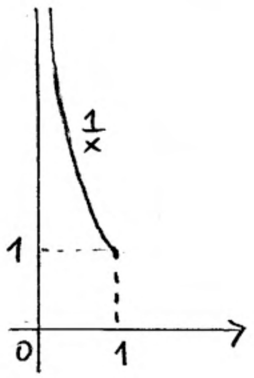
(Dabei ist δ unabhängig vom Bezugspkt $x' \in X$)

Klar: 1. f glm. stetig auf $X \Rightarrow f$ stetig auf X

2. f Lipschitz-stetig auf X mit $d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$

$\Rightarrow f$ glm. stetig auf X $\left(\delta := \frac{\varepsilon}{L}, \text{ o.E. } L > 0\right)$

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$



f stetig, aber nicht glm. stetig auf $(0,1]$

Denn: angen. f glm. stetig. Wähle $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \underbrace{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right|}_{=:(*)} < 1 \quad \forall x, x' \in (0,1] : |x - x'| < \delta$

Mit $0 < x \leq 1 - \frac{\delta}{2}$, $x' = x + \frac{\delta}{2}$ folgt

$(*) = \dfrac{\delta}{2x(x + \frac{\delta}{2})} \to \infty$ für $x \downarrow 0$ ↯

Dies könnte auf einem kompakten Intervall nicht passieren, denn:

5.23. Satz. Seien X, Y metr. Räume, $K \subseteq X$ kompakt,
$f : K \to Y$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig auf K

Beweis: Angen. nein $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ ohne passendes $\delta \overset{(\text{mit } \delta = \frac{1}{n})}{\Longrightarrow}$

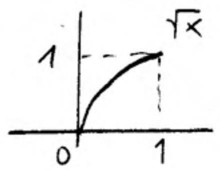
$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n, x_n' \in K : d(x_n, x_n') < \frac{1}{n}$, aber $d(f(x_n), f(x_n')) \geq \varepsilon_0$ $(*)$

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow (x_n)$ hat eine in K konvergente Teilfolge (x_{n_j}). Sei $\xi = \lim_{j \to \infty} x_{n_j} \in K$.

$d(x_{n_j}, x_{n_j}') \to 0$ für $j \to \infty \Rightarrow x_{n_j}' \to \xi \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$

$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(\xi) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}')$, im Widerspruch zu $(*)$ ∎

Bsp: $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ glm. stetig (nach Satz 5.23),
aber nicht Lipschitz-stetig (Üb. Ana 1)



5. Stetige lineare Abbildungen

Wir wissen: Jede lineare Abb. $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist stetig (Satz 5.7)

(unabhängig von der Wahl d. Normen)

Das muss bei ∞-dim. Vektorräumen nicht so sein!

Bsp: $T: (C^1[0,1], \|.\|_\infty) \to (C[0,1], \|.\|_\infty)$

$T(f) := f'$ (Ableitungsoperator)

T ist linear, aber nicht stetig, denn: $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx} \Rightarrow$

$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \to \underset{\text{0-Fkt}}{0}$, aber $Tf_n \not\to 0$, da $\|Tf_n\|_\infty = 1 \; \forall n$

5.24. Satz Seien V, W normierte $\mathbb{K}$-VR, $T: V \to W$ linear („linearer Operator"). Dann sind äquivalent:

(1) T ist stetig (auf V)

(2) T ist stetig in $x = 0$

(3) $\exists M \geq 0: \underset{\text{Norm auf W}}{\|Tx\|} \leq M \underset{\text{Norm auf V}}{\|x\|} \quad \forall x \in V$; dabei $Tx := T(x)$

Man sagt dann: T ist beschränkt

(4) T ist Lipschitz-stetig auf V

Beweis: $(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$ klar

$(2) \Rightarrow (3)$: T stetig in $0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \|Tx\| \leq 1$ sofern $\|x\| \leq \delta$

Sei $x \in V \setminus \{0\}$ bel., $x' := \delta \cdot \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \|x'\| = \delta$

$\Rightarrow \|Tx\| = \|T(\frac{\|x\|}{\delta} \cdot x')\| \underset{T \text{ lin.}}{=} \frac{\|x\|}{\delta} \cdot \underbrace{\|Tx'\|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$

Dies gilt auch für $x = 0$, da $T0 = 0$

$(3) \Rightarrow (4)$: $\forall x, y \in V: \|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \underset{(3)}{\leq} M\|x-y\|$ ■

Bez: $L(V,W) := \{T: V \to W \text{ linear + stetig}\}$

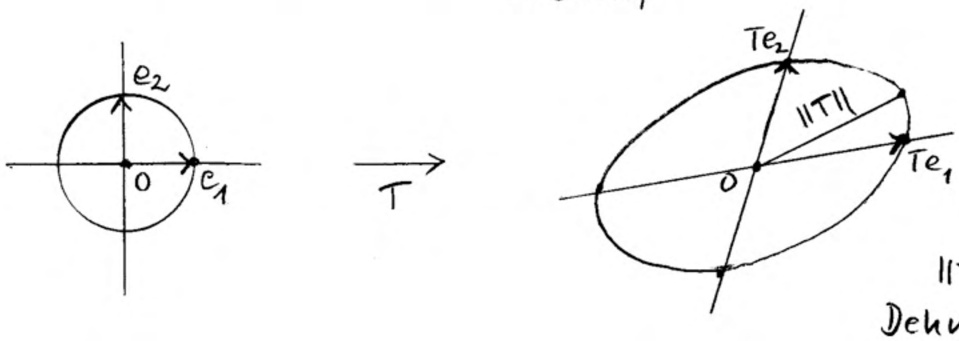
Dies ist $\mathbb{K}$-VR mit $(T+S)x = Tx + Sx$, $(\lambda T)x = \lambda \cdot Tx$

$L(V) := L(V,V)$ (Raum der stetigen lin. Operatoren auf V)

<u>Def.</u> Für $T \in L(V,W)$ setze

$\|T\| := \|T\|_{V,W} := \sup_{x \in V, \|x\| \le 1} \|Tx\| < \infty$ (hängt von den Normen in V, W ab!)

$\uparrow$ Satz 5.24



$\|T\|$: maximaler Dehnungsfaktor von T

<u>Bem.</u>: 1. $\forall x \in V: \|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|$ (*)

Denn: o.E. $x \neq 0 \Rightarrow \|Tx\| = \|x\| \cdot \underbrace{\|T(\frac{x}{\|x\|})\|}_{\le \|T\|}$

2. $\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \le M \cdot \|x\| \ \forall x \in V\}$ (nützlich!)

Denn: $c := \inf\{\dots\} \underset{(*)}{\Rightarrow} c \le \|T\|$. Andererseits: Def. von $c \Rightarrow$
$\|Tx\| \le c\|x\| \Rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| \le c$.

5.25. <u>Satz.</u> $T \mapsto \|T\|$ ist eine Norm auf $L(V,W)$ „<u>Operatornorm</u>"

<u>Beweis:</u> $\|T\| \geq 0$ ist klar; $\|T\| = 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} Tx = 0 \ \forall x \in V \Rightarrow T = 0$

$\|\lambda T\| = |\lambda| \cdot \|T\|$ aus Def.

$\|T+S\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(T+S)x\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| + \sup_{\|x\| \le 1} \|Sx\| = \|T\| + \|S\|$ ∎

<u>Bem:</u> $T \in L(V,W)$, $S \in L(W,Z) \Rightarrow ST := S \circ T \in L(V,Z)$ mit
$\|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|$ (Submultiplikativität)

Denn: $\|(ST)x\| \le \|S\| \cdot \|Tx\| \le \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \ \forall x \in V$

<u>Bsp:</u> $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ jeweils mit $\|.\|_p$, $p = 1, 2, \infty$

$T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear $\Rightarrow$ T stetig, $Tx = Ax$ mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\|T\| = \sup_{\|x\|_p \le 1} \|Ax\|_p =: \|A\|_p$ (sog. <u>Matrixnorm</u>)

Fall $p = \infty$:

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right| \le \underbrace{\max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)}_{=:M} \cdot \|x\|_\infty \quad (*)$$

Beh: $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ Zeilensummennorm

Beweis: „$\le$" aus Bem. 2.

Zu „$=$": Wähle $i \in \{1,\dots,m\}$ so, dass $M = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

$$\xi_j := \begin{cases} \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} & \text{falls } a_{ij} \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad ; \quad \xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)^t \in \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow \|\xi\|_\infty = 1, \quad |(A\xi)_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = M \Rightarrow \|A\xi\|_\infty = M \quad \blacksquare$$

$\|A\|_1$: Übung!

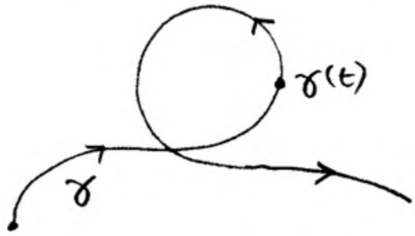
§ 6 Kurven

1. Differenzierbare Kurven im $\mathbb{R}^n$

Def. Eine (parametrisierte) Kurve im $\mathbb{R}^n$ (mit eukl. Metrik) ist eine stetige Abb.

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad I \subseteq \mathbb{R} \text{ Parameterintervall}$$

(oft Zeit)



Deutung: Zeitliche Bewegung eines Teilchens / Punktes im $\mathbb{R}^n$

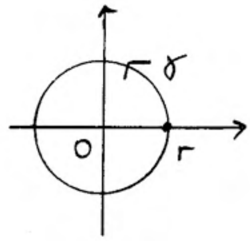
$\gamma(t)$: Ort zur Zeit t

Spur von γ: $\operatorname{spur}\gamma := \{\gamma(t) : t \in I\}$

Beachte: γ stetig $\underset{\text{Satz 5.4.}}{\iff}$ alle Komponenten x_i sind stetig

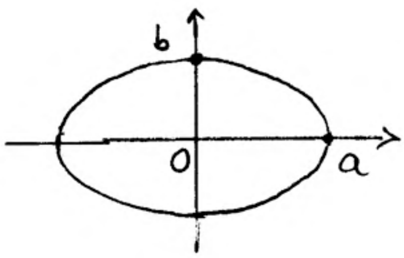
Beispiele: 1. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$

spur γ ist Kreis(linie) im $\mathbb{R}^2$ vom Radius r.



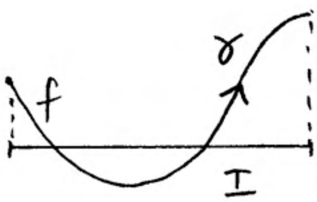
2. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; $a, b > 0 \Rightarrow$

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$; spur γ ist Ellipse mit Halbachsen a, b



3. $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Fkt

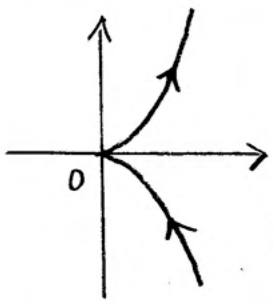
$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$



Parametrisierung des Graphen von f

4. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$$x_2(t) = \begin{cases} x_1(t)^{3/2}, & \text{falls } t \geq 0 \\ -x_1(t)^{3/2}, & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

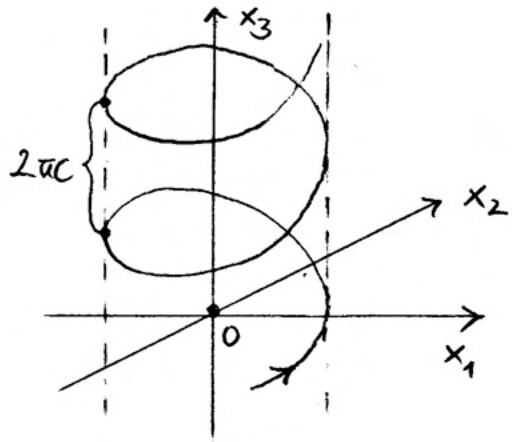


Neilsche Parabel

0: „Spike"

5. Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



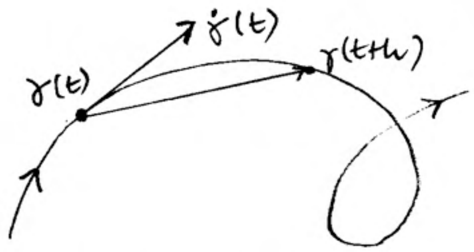
$c > 0$: Ganghöhe

Spur γ liegt auf dem Zylinder $x_1^2 + x_2^2 = r^2$.

<u>Def.</u> Eine Kurve $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>differenzierbar</u> in $t \in I$, falls der Limes

$$\dot\gamma(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \in \mathbb{R}^n \text{ existiert}$$

mit euklid. Metrik



$\dot\gamma(t)$: <u>Tangentialvektor</u> von γ bei t

(definiert zu einem Parameter, nicht zu einem Ort!)

<u>Idee:</u> Falls $\dot\gamma(t) \neq 0 \Rightarrow \dot\gamma(t)$ = Richtungsvektor der Tangenten in $\gamma(t)$; entsteht als Grenzlage der Sekanten durch $\gamma(t), \gamma(t+h)$

Physikalische Interpretation: $\dot\gamma(t)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t

<u>Beachte</u>: γ diffbar in $t \overset{\text{Satz 4.14}}{\Longleftrightarrow}$ alle Komp. x_i von γ sind diffbar in t. Dann: $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x_1(t) \\ \vdots \\ \dot x_n(t) \end{pmatrix}$ mit $\dot x_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot x_1(t)^2 + \dots + \dot x_n(t)^2}$$ Betrag d. Geschwindigkeit zur Zeit t

$\| . \|_2$ (wie stets)

<u>Def:</u> $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt diffbar, falls γ diffbar in allen $t \in I$, und <u>stetig diffbar</u>, falls zusätzlich $\dot\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ stetig

Äquivalent: alle x_i sind (stetig) diffbar auf I.

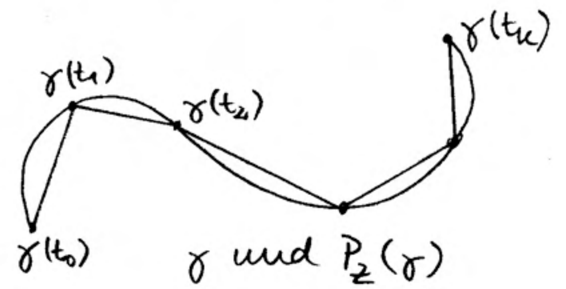
Bsp 1, 2, 4(!), 5 sind stetig diffbar!

Bem: Eine diffbare Kurve $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär in $t_0 \in I$, falls $\dot\gamma(t_0) \neq 0$, sonst singulär. Die Neilsche Parabel ist singulär in $t_0 = 0$.

2. Bogenlänge

Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve. Länge von γ?

Idee: Approximiere γ durch Sehnenpolygonzüge



γ und $P_Z(\gamma)$

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ Unterteilung von $[a,b]$

Feinheit von Z:

$$\Delta(Z) = \max_{1 \le i \le k} |t_i - t_{i-1}|$$

Verbinde $\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)$ geradlinig, dies liefert Sehnenpolygonzug $P_Z(\gamma)$.

Länge von $P_Z(\gamma)$: $\quad L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$

Erwartung: Für $\Delta(Z) \to 0$ konvergiert $L_Z(\gamma)$ in $\mathbb{R}$

Aber: es gibt (stetige) Kurven, für die das nicht der Fall ist!

Bsp: sog. Kochsche Kurven, nirgends diffbar, z. B. die „Eisblumenkurve" (Blatt 7, Aufg 1)

Nun: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig diffbar

Dann: $$L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\frac{x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}_{\underset{MWS}{=} \dot x_j(\tau_{ij}),\ \tau_{ij} \in [t_{i-1}, t_i]} \Big)^2} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Ersetze τ_{ij} durch (bel.) einheitliche Zwischenstellen $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ für alle x_j:

$$\tilde L_Z(\gamma) := \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \dot x_j(\tau_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$\tilde{L}_Z(\gamma)$ ist Riemann-Summen-Approximation für

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n \dot{x}_j(t)^2}\, dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \quad (<\infty!)$$

Der Approximationssatz 1.11 zeigt:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass

$$\left| \tilde{L}_Z(\gamma) - \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(Z) < \delta$

Noch zu untersuchen: $L_Z(\gamma) - \tilde{L}_Z(\gamma)$

$$|L_Z(\gamma) - \tilde{L}_Z(\gamma)| \le \sum_{i=1}^k \left| \Big(\sum_{j=1}^n \dot{x}_j(\tau_{ij})^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=1}^n \dot{x}_j(\tau_i)^2\Big)^{1/2} \right| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$$\underset{|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|}{\le} \sum_{i=1}^k \Big(\sum_{j=1}^n |\dot{x}_j(\tau_{ij}) - \dot{x}_j(\tau_i)|^2 \Big)^{1/2} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Jedes $\dot{x}_j$ ist stetig, also auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$

Also: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$|\dot{x}_j(t) - \dot{x}_j(s)| < \varepsilon \quad \forall t, s \text{ mit } |t-s| < \delta$$

Sei $\Delta(Z) < \delta \Rightarrow |\tau_{ij} - \tau_i| < \delta \quad \forall i$

$$\Rightarrow |L_Z(\gamma) - \tilde{L}_Z(\gamma)| \le \sum_{i=1}^k \Big(\sum_{j=1}^n \varepsilon^2\Big)^{1/2} \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sqrt{n}\, \varepsilon\, (b-a).$$

Damit ist gezeigt:

6.1. <u>Satz</u> Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-Kurve (d.h. stetig diffbar)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ gilt:

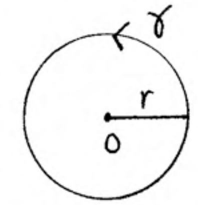
$$\left| L_Z(\gamma) - \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right| < \varepsilon$$

<u>Def.</u> $\boxed{L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt}$ heißt die <u>Bogenlänge</u> von γ

Bsp: 1. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ (Kreis v. Radius $r > 0$)

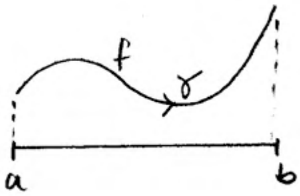
$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\, dt = 2\pi r$$

(Kreisumfang)

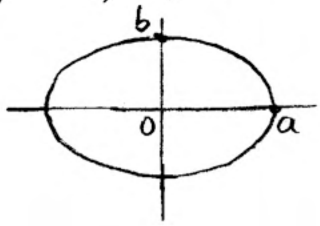


2. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^1-Fkt

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$



3. Ellipsen-Umfang: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$

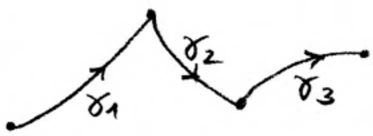


sei $a > b \Rightarrow$
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} b\sqrt{1 + \underbrace{\frac{a^2-b^2}{b^2}}_{=:\varepsilon^2}\sin^2 t}\, dt \quad (\varepsilon > 0 : \text{Exzentrität})$$
$$= b \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$$

Dies ist ein sog. elliptisches Integral (der Integrand hat keine mit rat. Fkt, exp, ln ausdrückbare Stammfkt)

Verallgemeinerung: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt stückweise stetig diffbar, falls γ stetig und $\exists$ Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} =: \gamma_i$ stetig diffbar. Man setzt dann

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^{k} L(\gamma_i)$$



3. Parameterwechsel

Bez.: Eine stetige, bijektive Abb. $\sigma : I \to J$ ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle) heißt Parametertransformation.

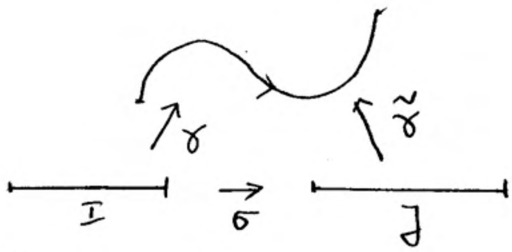
Leicht z. zeigen (ZÜ): σ ist streng monoton.

σ heißt orientierungstreu / orientierungsumkehrend, falls σ smw / smf.

Geg. $\gamma: I \to \mathbb{R}^n \Rightarrow$ die Kurve

$\tilde{\gamma} := \gamma \circ \sigma^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$

hat dieselbe Spur wie γ.



$\tilde{\gamma}$: Umparametrisierung von γ mittels σ

σ heißt C^1-Parametertrafo, falls σ und σ^{-1} stetig diffbar

Falls σ orientierungstreu $\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}$ hat denselben Durchlaufsinn wie γ

(falls $I = [a,b]$, $J = [\alpha, \beta] \Rightarrow \sigma(a) = \alpha$, $\sigma(b) = \beta$)

6.2. <u>Satz</u> Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-Kurve, $\sigma: [a,b] \to [\alpha, \beta]$ C^1-Parametertrafo, $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \sigma^{-1} \Rightarrow$

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$$

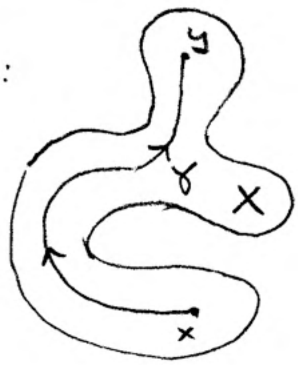
<u>Beweis:</u> $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \sigma \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma(t)) \cdot \dot{\sigma}(t)$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma(t))\| \cdot |\dot{\sigma}(t)|\, dt \overset{s=\sigma(t)}{=} \int_\alpha^\beta \|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\|\, ds = L(\tilde{\gamma}) \quad \blacksquare$$

4. <u>Wegzusammenhang</u>

<u>Def.</u> Sei (X,d) metrischer Raum

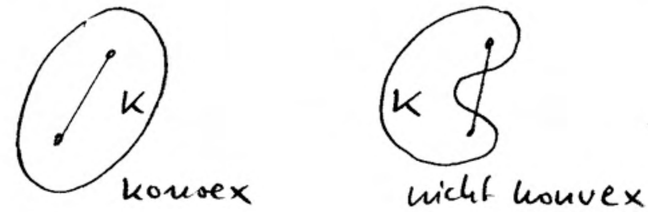
1. Eine <u>Kurve</u> (<u>Weg</u>) in X ist eine stetige Abb. $\gamma: I \to X$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall
2. X heißt wegzusammenhängend, falls gilt:
   $\forall x,y \in X \; \exists$ Weg $\gamma: [a,b] \to X$ mit
   $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$



Bsp: 1. Sei V normierter Raum. $K \subseteq V$ heißt <u>konvex</u>, falls für bel. $x,y \in K$ auch die Verbindungsstrecke $[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$ im K enthalten ist.

Also: K konvex $\Rightarrow$

K wegzshgd
mit indut. Metrik



2. $X \subseteq \mathbb{R}$ wegzshgd $\Leftrightarrow$ X ist Intervall

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$" klar, da Intervalle konvex

„$\Rightarrow$" Seien $x,y \in X$. Zu zeigen: $\xi \in \mathbb{R}$ mit $x < \xi < y \Rightarrow \xi \in X$.

Dazu: Sei $\gamma : [a,b] \to X$ Weg mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

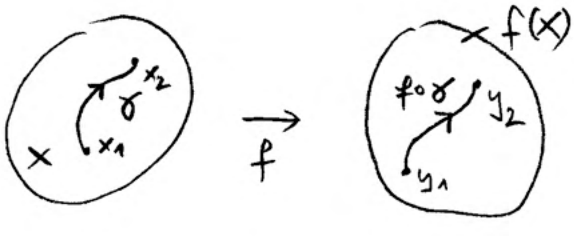
γ stetig $\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}$ γ nimmt ξ als Wert an $\Rightarrow \xi \in X$ ∎

6.3. <u>Satz</u> Seien X, Y metr. Räume, X wegzshgd.

Sei $f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow$ $f(X)$ wegzshgd

<u>Beweis:</u> Seien $y_1, y_2 \in f(X)$, $y_i = f(x_i)$, $x_i \in X$

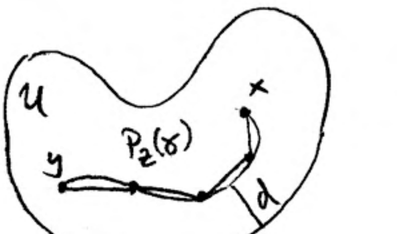
Sei $\gamma : [a,b] \to X$ Weg von x_1 nach x_2 $\Rightarrow$ $f \circ \gamma : [a,b] \to Y$ ist Weg in $f(X)$ von y_1 nach y_2



Im $\mathbb{R}^n$ oft nützlich:

6.4. <u>Satz</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen + wegzshgd $\Rightarrow$

$\forall x,y \in U$ existiert ein Polygonzug in U, der x und y verbindet



<u>Beweis:</u> Sei $\gamma : [a,b] \to U$ bel. Weg von x nach y. $[a,b]$ kompakt, γ stetig $\Rightarrow$ spur γ kompakt $\Rightarrow$ (Blatt 7, H3)

$d := d(\text{spur}\,\gamma, \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus U}_{\text{abg.}}) > 0$

Ferner: γ gleichmäßig stetig, da $[a,b]$ kompakt $\Rightarrow$

$\exists\, \delta > 0: \|\gamma(t) - \gamma(s)\| < d \quad \forall\, t, s$ mit $|t-s| < \delta$

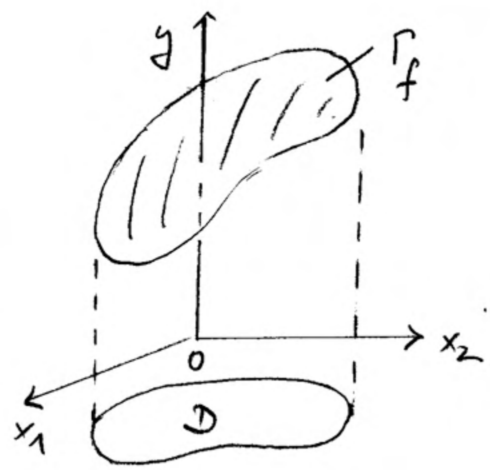
Wähle Zerleg. $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ von $[a,b]$ der Feinheit

$\Delta(Z) < \delta \Rightarrow \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| < d \quad \forall\, i$

$\Rightarrow P_Z(\gamma) \subseteq \mathcal{U}$

Sehnenpolygonzug zu Z

§7 Differenzierbare Funktionen



Untersuche Fkt $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Graph von f: $\Gamma_f = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

$x = (x_1, \dots, x_n)$: Koordinaten bzgl.

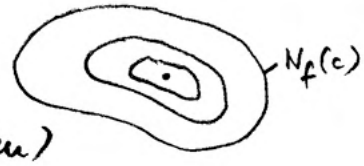
Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$

Falls $n = 2$: Γ_f ist Fläche im $\mathbb{R}^3$

Von Interesse: Extrema von f, lokale Approx. durch Polynome,

<u>Niveaumengen</u> von f: $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$N_f(c) = \{x \in D : f(x) = c\}$$



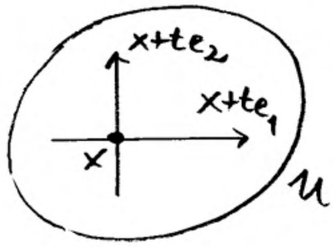
(Höhenlinien)

1. Partielle Ableitungen

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ eine Fkt.

Betrachte f nahe $x \in \mathcal{U}$ längs der i-ten Koordinatenrichtung e_i

Fixiere dabei alle x_j, $j \neq i$



<u>Def.</u> f heißt in $x \in \mathcal{U}$ <u>partiell differenzierbar</u> in der i-ten Koordinatenrichtung, falls

$$\partial_i f(x) := \lim_{t \in \mathbb{R}, t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} \quad \text{existiert,}$$

$\partial_i f(x)$: <u>i-te partielle Ableitung</u> von f in x.

Alternative Schreibweisen: $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $f_{x_i}(x)$, ...

<u>Also</u>: $\partial_i f(x)$ existiert $\Longleftrightarrow$ die Fkt $f_i(t) := f(x + te_i)$

ist diffbar in $t = 0$; dann $f_i'(0) = \partial_i f(x)$.

(Beachte: f_i ist in offenem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ um 0 def.)

Äquiv: $s \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ist diffbar in $s = x_i$

Bsp 1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(x) = 4x_1x_2 + ix_1^2x_2$

$\partial_1 f(x) = 4x_2 + 2ix_1x_2$; $\partial_2 f(x) = 4x_1 + ix_1^2$

$\partial_1 f, \partial_2 f$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Def. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ heißt partiell differenzierbar (auf $\mathcal{U}$), falls $\partial_i f(x)$ für alle $x \in \mathcal{U}$ und $i = 1, \dots, n$ existiert.

f heißt stetig partiell differenzierbar (auf $\mathcal{U}$), falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $x \mapsto \partial_i f(x)$ stetig auf $\mathcal{U}$ sind.

f in Bsp 1 ist stetig partiell diffbar auf $\mathbb{R}^2$.

Bsp 2. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. $f_i(t) := f(x + te_i) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + (x_i + t)^2 + \dots + x_n^2}$

$$= \sqrt{\|x\|^2 + 2tx_i + t^2}$$

f_i diffbar in $t = 0 \iff x \neq 0$ $\quad (x = 0 \Rightarrow f_i(t) = |t|)$

und dann ist $f_i'(0) = \frac{x_i}{\sqrt{\|x\|^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$.

$\Rightarrow f$ ist partiell diffbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\partial_i f(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$$

sogar: f stetig partiell diffbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ /woP

Achtung: Eine partiell diffbare Fkt ist nicht notwendig stetig! (Anders als bei 1 Variablen)

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(x,0) = 0 = f(0,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ partiell diffbar in $(0,0)$ mit

$\partial_x f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$; $\partial_y f(0,0) = 0$ (analog)

Aber: f nicht stetig in $(0,0)$! (siehe T4, Blatt 6)

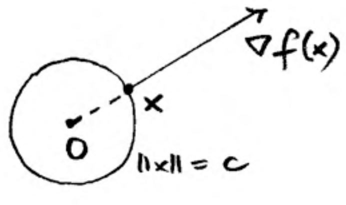
Partielle Diffbarkeit ist also eine recht schwache Eigenschaft!

<u>Produktregel</u>: $f, g : U \to \mathbb{C}$ partiell diffbar in $x \in U \Rightarrow$
fg ebenso, und
$$\partial_i(fg)(x) = \partial_i f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_i g(x)$$

<u>Def.</u> Sei $f : U \to \mathbb{R}$ partiell diffbar in $x \in U$
<u>Gradient</u> von f in x:
$$\operatorname{grad} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} =: \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$$
↑ Nabla-Operator

Produktregel: $\nabla(fg)(x) = \nabla f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \nabla g(x)$

<u>Bsp</u>: <u>Rotationssymmetrische Fkt</u>
Sei $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ diffbar
$f(x) := F(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\|.\| = \|.\|_2$
Kettenregel für Fkt von 1 Var $\Rightarrow$ f partiell diffbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
$$\partial_i f(x) = F'(\|x\|) \cdot \partial_i(\|x\|) = F'(\|x\|) \cdot \frac{x_i}{\|x\|}$$
$$\nabla f(x) = \frac{F'(x)}{\|x\|} \cdot x$$



f ist konstant auf den Sphären $\|x\| = c$, $c > 0$. Die Niveaumengen von f sind Vereinigungen solcher Sphären.
$\nabla f(x)$ „steht senkrecht" zur entsprechenden Niveaumenge
↑ muß noch präzisiert werden!

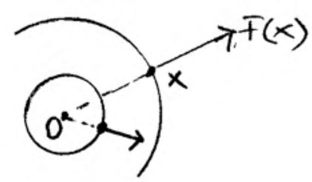
<u>Def.</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein <u>Vektorfeld</u> auf U ist eine Abb.
$$F : U \to \mathbb{R}^n$$
Jedem $x \in U$ wird ein Vektor $F(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet.

<u>Bsp</u>: 1. $f: U \to \mathbb{R}$ partiell diffbar $\Rightarrow$

$\nabla f: U \to \mathbb{R}^n$ ist Vektorfeld auf U (<u>Gradientenfeld</u>)

2. <u>Zentralfeld</u>: $F(x) = f(\|x\|) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^n$

mit einer Fkt $f: [0,a) \to \mathbb{R}$



2. Totale Differenzierbarkeit

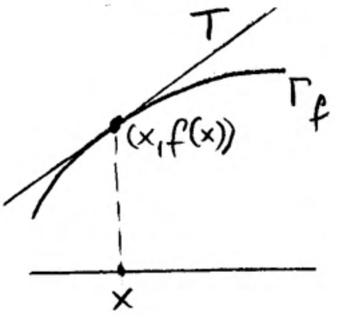
1-dim: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. $f: I \to \mathbb{C}$ diffbar in $x \in I$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert. $(*)$

So nicht auf $\mathbb{R}^n$ ausdehnbar, denn $\nexists$ Division durch $h \in \mathbb{R}^n$

$(*) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C}$ (nämlich $a = f'(x)$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{|h|} = 0 \qquad (\text{da in } \mathbb{C}: r \to 0 \Leftrightarrow |r| \to 0)$$



Falls f $\mathbb{R}$-wertig:

$T(h) := f(x) + ah$, $h \in \mathbb{R}$:

Tangente an Γ_f in $(x, f(x))$

(Lineare Approximation von f)

<u>Def.</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f: U \to \mathbb{C}$ heißt <u>(total) differenzierbar</u> in $x \in U$:$\Leftrightarrow$

Betrachtet als $\mathbb{R}$-VR; $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$\exists$ $\mathbb{R}$-lineare Abb. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \quad (*)$$

Dabei $\|.\|$ beliebige Norm im $\mathbb{R}^n$. (Die Def. ist unabhängig von der Wahl von $\|.\|$, da alle Normen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent!)

<u>Beachte</u>: $(*) \Leftrightarrow$ für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x+h \in U$ gilt

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{\|h\| \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Bez: $L = Df(x)$ Differential (Ableitung) von f im x

$L(h) = Df(x)(h) \underset{\text{kurz}}{=} Df(x)h$

Beachte: $L = Df(x)$ ist durch (*) eindeutig festgelegt, falls existent.

Denn: $\tilde{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lin. mit (*) $\Rightarrow$

$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: (L-\tilde{L})(v) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{(L-\tilde{L})(tv)}{\|tv\|} \underset{(*)}{=} 0 \Rightarrow L = \tilde{L}$.

Darstellung von $Df(x)$ bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$:

$$f'(x) := (Df(x)e_1, \dots, Df(x)e_n) \in \mathbb{C}^{1\times n}$$

Ableitungsvektor von f in x (Zeilenvektor)

Damit: $Df(x)h = \sum\limits_{i=1}^n h_i \cdot Df(x)e_i = f'(x) \cdot h$ (Zeile · Spalte)

7.1. Lemma f diffbar in $x \Rightarrow f$ stetig in x

Beweis: $f(x+h) - f(x) = \underbrace{Df(x)h}_{\to 0} + \underbrace{r(h)}_{\to 0} \to 0$ für $h \to 0$ ∎

Bsp: 1. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f(x) = c = $ konst. $\Rightarrow$

$f(x+h) = f(x)$ $\forall h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ diffbar in allen $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x) = 0$

2. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear, d.h. $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + f(h)$

$\Rightarrow f$ diffbar in allen $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x) = f$

3. $f(x) = x^t A x$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$

$$f(x+h) = \underbrace{x^t A x}_{=f(x)} + \underbrace{x^t A h + h^t A x}_{\substack{=L(h),\\ L \text{ linear}}} + \underbrace{h^t A h}_{=:r(h)}$$

$$|r(h)| = |\langle h, Ah\rangle| \underset{C.S.}{\leq} \|h\|_2 \cdot \|Ah\|_2 \leq \underbrace{\|A\|_2}_{<\infty} \cdot \|h\|_2^2$$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|_2} = 0 \Rightarrow f$ diffbar in allen $x \in \mathbb{R}^n$,

$Df(x)h = x^t A h + h^t A x$.

Falls $A = A^t$, d.h. A symmetr. $\Rightarrow h^t A x = h^t A^t x = x^t A h$

$\rightarrow Df(x)h = 2x^t A h$; $f'(x) = 2x^t A$.

Richtungsableitungen

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ diffbar in $x \in \mathcal{U}$. $h \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ mit $|t|$ klein $\Rightarrow$

$$f(x+th) = f(x) + Df(x)(th) + r(th)$$

$$\underset{h,t\neq 0}{\Rightarrow} \quad Df(x)h = \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - \underbrace{\frac{r(th)}{t\|h\|}}_{\to 0 \text{ mit } t \to 0} \cdot \|h\|$$

$$\Rightarrow Df(x)h = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

Insbes: $Df(x)e_i = \partial_i f(x)$ i-te partielle Ableitung;

$f'(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$

Def. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ heißt in $x \in \mathcal{U}$ diffbar in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, falls

$$\partial_v f(x) := \lim_{t\in\mathbb{R}, t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \quad \text{existiert}$$

(Richtungsableitung in Richtung v)

Mit $v = e_i$: $\partial_{e_i} f(x) = \partial_i f(x)$

Damit haben wir:

7.2. Satz Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ diffbar in $x \in \mathcal{U} \Rightarrow$

f ist an der Stelle x diffbar in jede Richtung $h \in \mathbb{R}^n$.

Insbes: f ist partiell diffbar in x, und $\forall h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{\partial_h f(x) = Df(x)h = f'(x)\cdot h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x)\cdot h_i}$$

Nun sei f $\mathbb{R}$-wertig $\Rightarrow$ $\partial_h f(x) = \langle \nabla f(x), h \rangle$

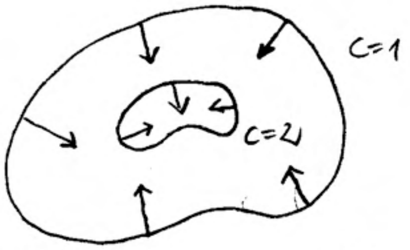
Standard-Skalarprod. im $\mathbb{R}^n$

Sei $\nabla f(x) \neq 0$. $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| = 1$ $(\|.\| = \|.\|_2)$ $\Rightarrow$

$$\partial_h f(x) = \|\nabla f(x)\| \cdot \cos\varphi, \quad \varphi \in [0,\pi] \text{ Winkel zwischen } \nabla f(x) \text{ und } h.$$

$$\Rightarrow \|\nabla f(x)\| = \max_{\|h\|=1} \partial_h f(x),$$

und das Max. wird genau dann angenommen, wenn $h = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$

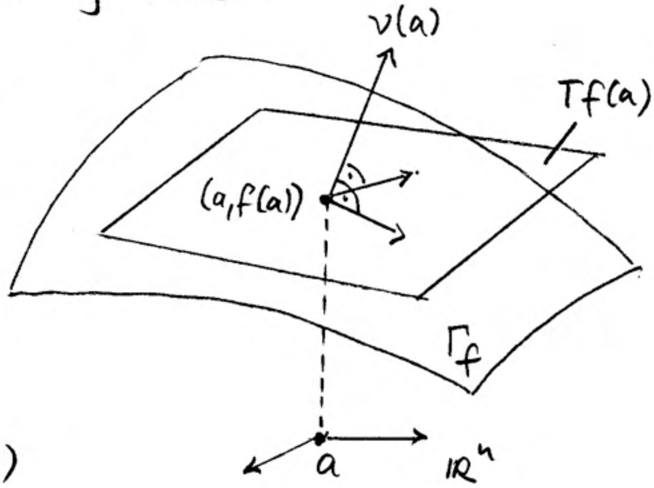


Niveaumengen $N_f(c)$

D.h. $\nabla f(x)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von f an der Stelle x.

<u>Tangentialhyperebenen</u>: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in U$.

Graph von f: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$



$$f(x) = \underbrace{f(a) + Df(a)(x-a)}_{\text{lineare Approx. an } f \text{ in } a} + r(x-a)$$

$$y = f(a) + Df(a)(x-a)$$
$$= f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle$$

beschreibt eine Hyperebene $Tf(a)$ durch $(a, f(a))$

$$(x,y) \in Tf(a) \iff \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla f(a) \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \nu(a)} \right\rangle = 0$$

Skalarprod. im $\mathbb{R}^{n+1}$

(Normalenvektor)

$Tf(a)$: Tangentialhyperebene an Γ_f in $(a, f(a))$

Mehr dazu: Übungen

3. Sätze über differenzierbare Funktionen

7.3. <u>Lemma</u> (Rechenregeln für Ableitungen)

Seien $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ diffbar in $x \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$

(1) $f+g$ diffbar in $x \in \mathcal{U}$ mit $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$

(2) $f \cdot g$ " " " $D(fg)(x) = f(x) \cdot Dg(x) + g(x) \cdot Df(x)$

(Produktregel)

(3) $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ diffbar in x mit

$$D\left(\tfrac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot Df(x)$$

<u>Beweis</u>: Analog zu Analysis 1 im Fall $n=1$. Hier exemplarisch (2):

$$\Big[(fg)(x+h) - (fg)(x) - \underbrace{f(x) \cdot Dg(x)h - g(x) \cdot Df(x)h}_{\mathbb{R}\text{-lin. in } h}\Big] \cdot \frac{1}{\|h\|}$$

$$= f(x+h) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x) - Dg(x)h}{\|h\|}}_{\to 0} + g(x) \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)h}{\|h\|}}_{\to 0} +$$

$$+ \underbrace{(f(x+h) - f(x))}_{\to 0} \cdot \frac{Dg(x)h}{\|h\|} \to 0, \quad \text{da}$$

$$|Dg(x)h| \leq \underbrace{\|Dg(x)\|}_{\text{Operatornorm}, < \infty} \cdot \|h\|$$

Wir hatten schon ein Bsp. einer partiell diffbaren Fkt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in $(0,0)$ nicht stetig ist, also erst recht nicht diffbar.

Es gilt aber:

7.4. <u>Satz</u> (Hauptkriterium für Differenzierbarkeit)

Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung $\mathcal{U}'$ von $x \in \mathcal{U}$ partiell diffbar, und die part. Ableitungen $\partial_i f$ seien stetig in x $\Rightarrow$

f ist in x (total) diffbar.

<u>Beweis:</u> o.E. f $\mathbb{R}$-wertig (zerlege sonst in Re- und Im-Teil)

Setze $\quad L(h) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) \cdot h_i \quad , \quad h \in \mathbb{R}^n \quad$ ($\mathbb{R}$-linear)

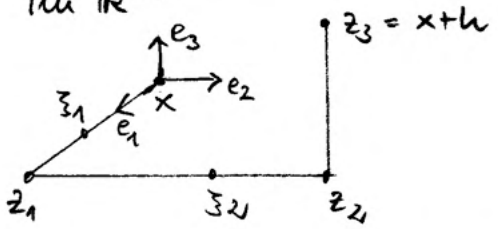
$\qquad r(h) := f(x+h) - f(x) - L(h)$

Zu zeigen: $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

Betrachte dazu $z_0 := x$, $z_1 = x + h_1 e_1, \dots, z_i = x + \sum_{j=1}^{i} h_j e_j, \dots,$

$z_n := x + h$.

Im $\mathbb{R}^3$:



$z_0, \dots, z_n$ definiert achsenparallelen Streckenzug, der ganz in $\mathcal{U}'$ liegt, sofern $\|h\|$ klein genug.

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(z_i) - f(z_{i-1}));$$

$z_i - z_{i-1} = h_i e_i$. Betrachte $f(z_{i-1} + t e_i)$

HWS in 1 Var. $\Longrightarrow \quad f(z_i) - f(z_{i-1}) = h_i \cdot \partial_i f(\xi_i)$,

ξ_i zwischen z_{i-1}, z_i

$$\Rightarrow r(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(\xi_i) - \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i (\partial_i f(\xi_i) - \partial_i f(x))$$

$$\Longrightarrow |r(h)| \leq \|h\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(\xi_i) - \partial_i f(x)|$$

$$h \to 0 \Rightarrow \xi_i \to x \ \forall i \underset{\partial_i f \text{ stetig in } x}{\Longrightarrow} \partial_i f(\xi_i) \to \partial_i f(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \quad \blacksquare$$

<u>Bez:</u> $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar auf $\mathcal{U}$, falls f diffbar in allen $x \in \mathcal{U}$. f heißt <u>stetig differenzierbar</u> auf $\mathcal{U}$, falls zusätzlich die Ableitungsfkt

$$f' : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^n, \quad x \mapsto (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

stetig auf $\mathcal{U}$ ist.

$$C^1(\mathcal{U}) := \{ f : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \text{ stetig differenzierbar} \}$$

7.5. <u>Kor:</u> f stetig diffbar auf $\mathcal{U} \underset{\text{S. 7.2+7.4}}{\Longleftrightarrow}$ f stetig partiell diffbar auf $\mathcal{U}$

Bsp: 1. $p(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha x^\alpha$ Polynomfkt auf $\mathbb{R}^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$

$(x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n})$

p ist stetig partiell diffbar auf $\mathbb{R}^n$ (alle $\partial_i p$ sind wieder Polynome) $\Rightarrow$ p stetig diffbar auf $\mathbb{R}^n$.

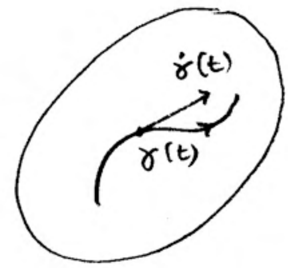
2. $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynomfkt $\Rightarrow$ R stetig diffbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x : q(x) = 0\}$ (da dort stetig partiell diffbar)

7.6. Kettenregel für Kurven

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ diffbar und $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n): I \to U$ eine diffbare Kurve in U ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) $\Rightarrow$

$f \circ \gamma: I \to \mathbb{C}$ ist diffbar mit

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)}_{\text{„Ableitung von } f \text{ längs } \gamma\text{"}} = Df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)$$



Beweis: 1. $f(\gamma(t) + h) = f(\gamma(t)) + Lh + r_1(h)$, $\|h\|$ klein

mit $L = Df(\gamma(t))$, $\frac{r_1(h)}{\|h\|} \to 0$ für $h \to 0$

2. $\gamma(t+k) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot k + r_2(k)$, $k \in \mathbb{R}$ klein, $\lim_{k \to 0} \frac{r_2(k)}{|k|} = 0$.

Setze in 1. $h := \gamma(t+k) - \gamma(t)$ $\Rightarrow$

$$f(\gamma(t+k)) = f(\gamma(t)) + L(k\dot{\gamma}(t) + r_2(k)) + r_1(h)$$
$$= f(\gamma(t)) + k \cdot L\dot{\gamma}(t) + \underbrace{Lr_2(k) + r_1(h)}_{=: R(k)}$$

Nun: $k \to 0 \Rightarrow h \to 0$, da γ stetig

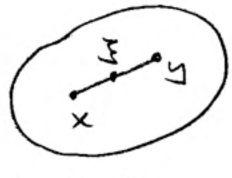
$$\Rightarrow \frac{R(k)}{|k|} = L\Big(\underbrace{\frac{r_2(k)}{|k|}}_{\to 0}\Big) + \underbrace{\frac{r_1(h)}{\|h\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|\gamma(t+k) - \gamma(t)\|}{|k|}}_{\to \|\dot{\gamma}(t)\|} \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ $f \circ \gamma$ diffbar in t mit $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = L\dot{\gamma}(t)$ ∎

7.7. Mittelwertsatz

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diffbar und $x, y \in \mathcal{U}$ so, dass die Verbindungsstrecke $[x,y]$ in $\mathcal{U}$ liegt

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [x,y]: \; f(y) - f(x) = Df(\xi)(y-x)$



Beweis: $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$ parametrisiert $[x,y]$

$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $\dot\gamma(t) = y - x \quad \forall t$

$F := f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ diffbar nach Kettenregel, $\dot F(t) := \frac{d}{dt} F(t)$

MWS aus Ana 1 für $F \Rightarrow$

$$\underbrace{F(1) - F(0)}_{= f(y) - f(x)} = \underbrace{\dot F(\tau) \cdot 1}_{\shortparallel} \quad \text{mit Zwischenstelle } \tau \in [0,1]$$

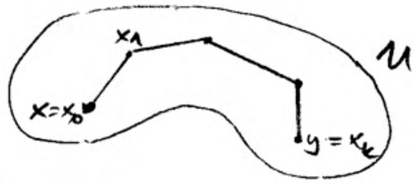
$$Df(\underbrace{\gamma(\tau)}_{=:\xi})\,\dot\gamma(\tau) = Df(\xi)(y-x) \qquad \blacksquare$$

Achtung: Der MWS gilt nur für $\mathbb{R}$-wertige Fkt!

7.8. Korollar

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen + wegzusammenhängend, und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ diffbar mit $Df(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow f =$ konst. auf $\mathcal{U}$



Beweis: o.E. f $\mathbb{R}$-wertig.

Seien $x, y \in \mathcal{U}$ beliebig. Verbinde x, y durch Polygonzug in $\mathcal{U}$ mit Ecken $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ (gem. Satz 6.4)

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \underset{\text{MWS 7.7.}}{=} \underbrace{Df(\xi_i)}_{=0}(x_i - x_{i-1}) = 0 \quad \text{mit } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_k) = f(y) \quad \blacksquare$

4. Höhere partielle Ableitungen

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ partiell diffbar ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Sind alle $\partial_i f$ wieder partiell diffbar, so heißen die

$$\partial_j \partial_i f := \partial_j(\partial_i f) \qquad (1 \le i,j \le n)$$

partielle Ableitungen 2. Ordnung von f, und f heißt 2-mal partiell diffbar auf U.

Weitere Bez: $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$; $\partial_i^2 f := \partial_i \partial_i f$ etc.

<u>Def.</u> f heißt k-mal [stetig] partiell diffbar auf U, falls alle part. Ableitungen $\partial_{i_j} \cdots \partial_{i_1} f$ bis zu Ordnung $j = k$ existieren [und stetig sind].

<u>Bsp:</u> $f(x,y) = e^{xy} + \ln x$ auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$

$\partial_x f(x,y) = ye^{xy} + \frac{1}{x}$, $\partial_y \partial_x f(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$

$\partial_y f(x,y) = xe^{xy}$, $\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y)$.

<u>Frage:</u> gilt für 2-mal partiell diffbares f: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$?

i. A. nein! Gegenbsp: Übungen

Aber es gilt:

7.9. Satz v. Schwarz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ 2-mal stetig partiell diffbar

$$\Longrightarrow \forall i,j: \quad \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f \text{ auf } U.$$

<u>Beweis:</u> o.E. f $\mathbb{R}$-wertig. Betrachte $a \in U$.

U offen $\Longrightarrow \exists d > 0: a + xe_i + ye_j \in U \quad \forall (x,y) \in (-d,d)^2 =: Q$

$\varphi(x,y) := f(a + xe_i + ye_j)$, $(x,y) \in Q$

Vorauss. $\Longrightarrow \varphi$ 2-mal stetig part. diffbar auf Q

zu zeigen: $\underbrace{\partial_2 \partial_1 \varphi(0,0)}_{\partial_j \partial_i f(a)} = \underbrace{\partial_1 \partial_2 \varphi(0,0)}_{\partial_i \partial_j f(a)}$.

Dazu: $\frac{1}{x}\left(\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,0)}{y} - \frac{\varphi(0,y)-\varphi(0,0)}{y}\right) =$

$$\underset{\text{MWS bzgl. } x}{=} \frac{\partial_1\varphi(\xi,y)-\partial_1\varphi(\xi,0)}{y} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x$$

$$\underset{\text{MWS bzgl. } y}{=} \partial_2\partial_1\varphi(\xi,\eta) \quad \text{mit } \eta \text{ zwischen } 0 \text{ und } y.$$

$\partial_2\partial_1\varphi$ ist stetig in $(0,0)$. Mit $x,y \to 0$ gilt auch $\xi,\eta \to 0 \Rightarrow$

$$\partial_2\partial_1\varphi(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,0)}{y} - \frac{\varphi(0,y)-\varphi(0,0)}{y}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\partial_2\varphi(x,0) - \partial_2\varphi(0,0)\right) = \partial_1\partial_2\varphi(0,0) \quad \blacksquare$$

<u>Bez.</u> Eine k-mal stetig partiell diffbare Fkt auf $\mathcal{U}$ heißt auch <u>k-mal stetig diffbar</u> auf $\mathcal{U}$ (motiviert durch Kor. 7.5)

$C^k(\mathcal{U}) := \{f: \mathcal{U} \to \mathbb{C} \ \ k\text{-mal stetig diffbar}\}$ ($\mathbb{C}$-VR)

$C^\infty(\mathcal{U}) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\mathcal{U})$ „glatte Fkt auf $\mathcal{U}$"

$C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}) := \{f \in C^k(\mathcal{U}): f \ \mathbb{R}\text{-wertig}\}$ ($\mathbb{R}$-VR)

5. <u>Der Laplace-Operator</u>

<u>Def.</u> Sei $f \in C^2(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$$\Delta f(x) := \partial_1^2 f(x) + \dots + \partial_n^2 f(x), \quad x \in \mathcal{U}.$$

$\Delta: C^2(\mathcal{U}) \to C(\mathcal{U})$ Laplace-Operator (linear!)

Δ tritt in vielen Differentialgleichungen der mathem. Physik auf

Eine DG ist eine Gleichung für eine Fkt und ihre Ableitungen

Genauer: $\begin{cases} \text{gewöhnliche DG, falls Fkt von 1 reellen Var. (später!)} \\ \text{partielle DG, } \quad \text{" " " mehreren reellen Var.} \end{cases}$

(1) <u>Poisson-Gleichung</u>: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Gesucht: $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = f$, $f \in C(\Omega)$ gegeben

Wichtig in Elektrodynamik, Newtonsches Gravitationstheorie

<u>Spezialfall</u>: $\Delta u = 0$ Laplace-Gleichung

Def. Eine Fkt $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ heißt <u>harmonisch</u> auf Ω

(2) <u>Wellengleichung</u> (auf offenem $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$):

$$\underbrace{\Delta}_{=\Delta_x,\ \text{bzgl. } x\in\Omega} u - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u = 0 \quad \text{für } u = u(x,t): \Omega \times I \to \mathbb{C},$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall (Zeit); $c > 0$ Konst.

Beschreibt Ausbreitung von Wellen / Schwingungen im $\mathbb{R}^n$ (elektromagnet. Wellen, Schall, schwingende Saite oder Membran...)

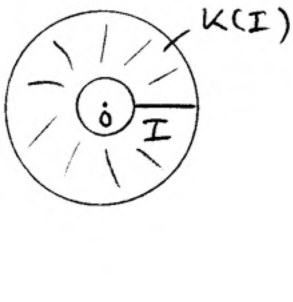
(3) <u>Wärmeleitungsgleichung</u>

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \quad \text{für } u: \Omega \times I \to \mathbb{R}; \ k > 0 \text{ konst.}$$

Beschreibt Temperaturausgleich / Diffusionsprozesse in homogenen Medien.

<u>Δ für rotationssymmetrische Fkt</u>

Sei $I \subseteq (0,\infty)$ offenes Intervall.



$K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \in I\}$, $\|.\| = \|.\|_2$

(offene Kugelschale)

Sei $F \in C^2(I)$; $f(x) := F(\|x\|)$, $x \in K(I)$

Setze $r := \|x\|$. Damit $f(x) = F(r)$

Kettenregel (1 Var.) $\Rightarrow f \in C^2(K(I))$, und

$$\partial_i f(x) = F'(r)\cdot \frac{x_i}{r} \qquad \partial_i(r) = \frac{x_i}{r}$$

$$\partial_i^2 f(x) = F''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2} + F'(r)\cdot \underbrace{\partial_i\left(\frac{x_i}{r}\right)}$$

$$= \frac{r - x_i\cdot\frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}$$

$\Rightarrow \quad \Delta f(x) = F''(r) + \frac{n-1}{r} F'(r), \qquad (r = \|x\|)$

<u>Bsp</u>: $f(x) = \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$F(r) = r^{2-n}$ auf $(0,\infty)$. $F'(r) = (2-n)r^{1-n}$, $F''(r) = (2-n)(1-n)r^{-n}$

$\Rightarrow \Delta f(x) = 0$, dh. f ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$n = 3$: $\quad N(x) = -\frac{1}{\|x\|}$ <u>Newton-Potential</u> im $\mathbb{R}^3$

= (bis auf konst. Faktor > 0) das Gravitationspotential einer Punktmasse in 0.

<u>Def.</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F = (F_1, \dots, F_n): U \to \mathbb{R}^n$ ein diffbares Vektorfeld auf U, dh. alle $F_i: U \to \mathbb{R}$ seien diffbar.

<u>Divergenz</u> von F in $x \in U$:

$$\operatorname{div} F(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(x), \qquad \operatorname{div} F: U \to \mathbb{R} \quad (\text{Skalarfeld})$$

$\operatorname{div} F(x)$ mißt die „Quelldichte" von F in x ($\to$ Satz v. Gauß, Ana 4)

$f \in C^2(U, \mathbb{R}) \Rightarrow \Delta f(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x)$.

§8 Taylorformel und Extrema

1. Die mehrdimensionale Taylorformel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(U, \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$

Fixiere $a \in U$; betrachte f nahe a.

Sei $x \in U$ mit $\underbrace{[a, x]}_{\text{Verbindungsstrecke von } a, x} \subseteq U$

Setze $h := x - a$

$\varphi(t) := f(\underbrace{a + th}_{\text{parametrisiert } [a,x]})$, $t \in [0, 1]$; $\quad \varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(x)$

Kettenregel f. Kurven $\Rightarrow$ φ diffbar mit

$\varphi'(t) = Df(a+th)h = \underbrace{\partial_h f}_{\in C^m(U)}(a+th)$

$\partial_h : C^k(U) \to C^{k-1}(U)$ linear

Induktion $\Rightarrow$ $\varphi \in C^{m+1}([0,1])$, $\varphi^{(k)}(t) = (\partial_h^k f)(a+th)$, $k \leq m+1$

Taylorentwicklung von φ um $t = 0$:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_{m+1}(t), \quad \text{wobei}$$

$$R_{m+1}(t) \underset{\text{Lagrange}}{=} \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\tau) \quad \text{mit geeignetem } \tau \in [0, t]$$

$f(x) = \varphi(1) \implies$ (mit $t = 1$):

$$(*) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (\partial_h^k f)(a) + R_{m+1} f(x) \quad \text{mit } \partial_h^0 := \mathrm{id},$$

$$R_{m+1} f(x) = \frac{1}{(m+1)!} (\partial_h^{m+1} f)(\xi), \quad \xi = a + \tau h \in [a, x]$$

In der Praxis ist (*) noch nicht gut brauchbar.

Schreibe $(\partial_h^k f)(a)$ mittels part. Ableitungen:

$f \in C^k(U, \mathbb{R})$, $x \in U \Rightarrow$

$$(\partial_h^k f)(x) = (h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n)^k f(x)$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k} =: D^k f(x) h^k$$

Dabei spielt die Reihenfolge der part. Ableitungen keine Rolle (Satz v. Schwarz).

<u>Speziell</u>: $D^0 f(x) h^0 = f(x)$; $D^1 f(x) h = \partial_h f(x) = Df(x)h$

$$D^2 f(x) h^2 = (\partial_h^2 f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j$$

<u>Def.</u> Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Die Matrix

$$Hf(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n^2 f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt <u>Hessematrix</u> von f in $x \in U$.

Damit: $\boxed{D^2 f(x) h^2 = h^t Hf(x) h = \langle Hf(x)h, h \rangle}$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Standard-S.P.

<u>Bem</u>: $Hf(x)$ ist die darstellende Matrix (bzgl. Standardbasis) der symmetr. Bilinearform („Differential 2. Ordn." von f in x)

$$D^2 f(x)(v, w) := \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i w_j = \partial_v \partial_w f(x)$$

$h \mapsto D^2 f(x) h^2 = D^2 f(x)(h, h)$ ist die zugehörige quadratische Form. (Hesseform von f in x)

<u>Multiindex-Schreibweise</u>: Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ (Ordnung von α), $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$

$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Für f von der Klasse C^k, $k \geq |\alpha|$:

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

8.1. Lemma $f \in C^k(U, \mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{k!} D^k f(x) h^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha \qquad (x \in U, h \in \mathbb{R}^n)$$

Beweis: $D^k f(x) h^k = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$

$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = k \Rightarrow$ der Summand $\partial^\alpha f(x) h^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(x) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$ taucht in d. Summe n_α mal auf, wobei (nach Satz v. Schwarz)

n_α = Anzahl d. Möglichkeiten, k nummerierte Kugeln auf n Schachteln so zu verteilen, dass α_i Kugeln in Schachtel i, und Reihenfolge innerhalb der Schachteln irrelevant

$\underset{1}{\boxed{\alpha_1}}\ \underset{2}{\boxed{\alpha_2}} \cdots \underset{n}{\boxed{\alpha_n}}$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \qquad \Rightarrow n_\alpha = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!} \Rightarrow$ ▪

Zurück zur Taylorentwicklung. (*) besagt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(a) h^k + R_{m+1} f(x), \quad h = x - a$$

Def. $f \in C^m(U, \mathbb{R})$, $a \in U \Rightarrow$

$$T_m f(x; a) := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(a) (x-a)^k = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

heißt Taylorpolynom der Ordnung m von f in a
(Polynom v. Grad $\le m$ in $x \in \mathbb{R}^n$)

Speziell: $T_1 f(x; a) = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$
(lineare Approx. von f in a)

$$T_2 f(x; a) = f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a)^2$$
$$= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t Hf(a)(x-a)$$

Wir haben gezeigt:

8.2. Satz (Taylorformel mit Restglied)

Sei $f \in C^{m+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $a \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathcal{U}$ mit $[a,x] \subseteq \mathcal{U}$ gilt:

$$\boxed{f(x) = T_m f(x;a) + R_{m+1} f(x)} \quad \text{wobei}$$

$$R_{m+1} f(x) = \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\xi)(x-a)^{m+1} = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-a)^\alpha,$$

$\xi \in [a,x]$ geeignet

Landau-Symbol „klein-o": Seien X, Y norm. Räume, $a \in X$;

$f: X \setminus \{a\} \to Y$, $h: X \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$

$f(x) = o(h(x))$ für $x \to a$ $:\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$.

8.3. Qualitative Taylorformel ($\|\cdot\|$ bel. Norm auf $\mathbb{R}^n$)

Sei $f \in \underline{C^m}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $a \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathcal{U}$ mit $[a,x] \subseteq \mathcal{U}$ gilt

$$\boxed{f(x) = T_m f(x;a) + o(\|x-a\|^m)} \quad \text{für } x \to a$$

Beweis: Satz 8.2 $\Rightarrow$ $f(x) - T_m f(x;a) =$ (mit $h = x-a$)

$$= \underbrace{f(x) - T_{m-1} f(x;a)}_{= \frac{1}{m!} D^m f(\xi) h^m} - \frac{1}{m!} D^m f(a) h^m \qquad (\text{falls } m = 0: T_{-1} f := 0)$$

$$|f(x) - T_m f(x;a)| \le \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} \underbrace{|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f(\xi) - \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f(a)|}_{(*)} \underbrace{|h_{i_1} \cdots h_{i_m}|}_{\le \|h\|_\infty^m}$$

$(*) \to 0$ für $x \to a$ ($\Rightarrow \xi \to a$), da $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f$ stetig ∎

Def. Sei $f \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Taylorreihe von f um $a \in \mathcal{U}$:

$$Tf(x;a) := \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| = m} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

Diese Reihe muß in keinem $x \neq a$ konvergieren, und falls sie in $x \in \mathcal{U}$ konvergiert, ist nicht notwendig $Tf(x;a) = f(x)$!

(Wie schon im Fall $n = 1$).

$f \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ heißt reell-analytisch, falls f um jedes $a \in \mathcal{U}$ in eine Taylorreihe entwickelbar ist, d.h. falls

$$f(x) = Tf(x;a) \quad \forall x \in \mathcal{U} \text{ mit } \|x-a\| \text{ klein genug.}$$

2. Extrema

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine reelle Fkt.

f hat in $a \in D$ ein lokales Maximum $:\Leftrightarrow$ $\exists$ offene Umgeb. $\mathcal{U} \subseteq D$ von a (d.h. $\mathcal{U} = D \cap \mathcal{U}'$, $\mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen), so dass

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

Kann $\mathcal{U}$ so gewählt werden, dass $f(x) < f(a)$ $\forall x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$, so spricht man von einem isolierten lokalen Maximum.

Analog def. man ein (isoliertes) lokales Minimum.

Zunächst ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema:

8.4. Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (total) diffbar

f habe ein lokales Extremum in $a \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$

$$Df(a) = 0 \qquad (\Leftrightarrow \partial_i f(a) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n)$$

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel.

$\varphi(t) := f(a+tv)$, def. + diffbar auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$, ε klein genug

f hat lok. Extremum in $a \Rightarrow \varphi$ hat lok. Extremum in $t=0$

$\Rightarrow 0 = \dot{\varphi}(0) = Df(a)v \underset{v \text{ bel.}}{\Longrightarrow} Df(a) = 0$ ∎

Bez: Falls $Df(a) = 0$, so heißt a kritischer/stationärer Punkt von f.

Ziel: Hinreichendes Kriterium. Betrachte dazu die Hesse-matrix $Hf(a)$.

Exkurs zur lin. Algebra (vgl. LA 2)

Def. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, d.h. $A = A^t$. A heißt

- positiv definit, kurz: $A > 0 :\Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle = x^t A x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- positiv semidefinit $(A \geq 0) :\Leftrightarrow x^t A x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- negativ definit $(A < 0)$ bzw. negativ semidefinit $(A \leq 0)$ $:\Leftrightarrow x^t A x < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bzw. $x^t A x \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- indefinit $:\Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}^n: x^t A x > 0,\ y^t A y < 0$

Fakten: (1) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ das charakteristische Polynom
$p_A(t) = \det(A - tI) \in \mathbb{R}[t]$
zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$. A hat daher n reelle Eigenwerte (mit Vielfachheiten als NS von p_A gezählt)

(2) $\exists$ Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ (bzgl. dem Standard-Skalarprod. $\langle \cdot, \cdot \rangle$), bestehend aus Eigenvektoren von A:
$Av_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ EW von A mit EV v_i $(1 \leq i \leq n)$

Damit: $v_i^t A v_i = \langle Av_i, v_i\rangle = \lambda_i$

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^t A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2$$

Hieraus folgt:

8.5. Lemma $A > 0$ [bzw. $A < 0$] $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind > 0 [bzw. < 0]

$A \geq 0$ [bzw. $A \leq 0$] $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind ≥ 0 [bzw. ≤ 0]

A indefinit $\Leftrightarrow$ A besitzt sowohl (strikt) positive als auch negative EW (auch 0 als EW möglich)

Kriterium im Fall $n=2$: $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ A>0 \iff \det A>0 \text{ und } a>0 \\ \bullet\ A<0 \iff \det A>0 \text{ und } a<0 \\ \bullet\ A \text{ semidefinit} \iff \det A \geq 0 \\ \bullet\ A \text{ indefinit} \iff \det A<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Folgt aus:} \\ \det A = \lambda_1\lambda_2 \ (\lambda_i \text{ die EW von } A) \\ \text{und } a = e_1^t A e_1 \end{array}$$

8.6. Satz (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ mit $Df(a)=0$. Dann gelten:

(1) $Hf(x) \geq 0$ in einer Umgebung von a $\Rightarrow$ f hat in a ein lokales Minimum

(2) $Hf(a) > 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lok. Minimum

(3) Analog für (isoliertes) lokales Maximum

(4) $Hf(a)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat in a kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt, d.h. in jeder Umgeb. $U' \subseteq U$ von a existieren $x,y \in U'$: $f(x) > f(a)$, $f(y) < f(a)$.

Beispiele $(n=2)$

(1) $f(x,y) = x^2+y^2$, $f'(x,y) = (2x,2y)$; $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

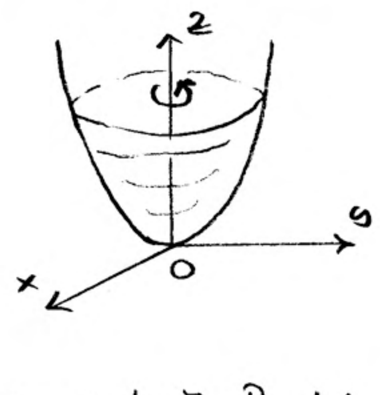
$f'(x,y) = (0,0) \iff (x,y)=(0,0)$ einziger krit. Punkt

$Hf(0,0) > 0 \Rightarrow f$ hat in $(0,0)$ isoliertes lok. Minimum

(ist auch globales Min., da $f \geq 0$)

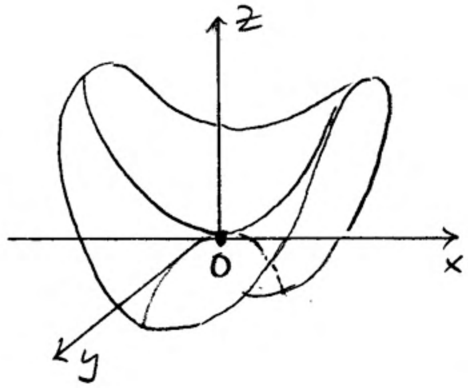
Graph $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2+y^2\}$

Elliptisches Paraboloid



(2) $f(x,y) = x^2-y^2$; $f'(0,0) = (0,0) \Rightarrow (0,0)$ krit. Punkt (einziger) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indef. $\Rightarrow$ Sattelpkt in $(0,0)$

Γ_f : hyperbolisches Paraboloid
(Sattelfläche)

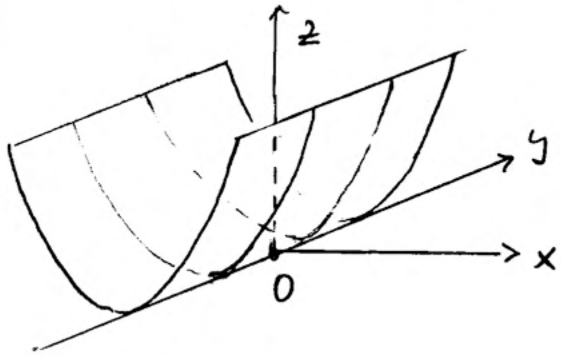


(3) $f(x,y) = x^2$; $f'(x,y) = (2x, 0) \Rightarrow$ kritische Pkte $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ (semidef.)

$\Rightarrow (0,y)$ ist lokale Minimalstelle, aber nicht isoliert,
da $f(0,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

Γ_f : $z = x^2$
Parabolischer Zylinder



<u>Achtung</u>: Falls $Df(a) = 0$ und $Hf(a)$ semidefinit, so lassen sich anhand von $Hf(a)$ allein keine allgemeingültigen Aussagen treffen! <u>Bsp</u>: Übungen

<u>Bez.</u>: $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ heißt in $a \in U$

- elliptisch $:\Leftrightarrow$ $Hf(a)$ definit (>0 oder <0)
- hyperbolisch $:\Leftrightarrow$ $Hf(a)$ nicht singulär (kein EW 0) + indef.
- parabolisch $:\Leftrightarrow$ $Hf(a)$ singulär, aber $\neq 0$
- flach $:\Leftrightarrow$ $Hf(a) = 0$.

<u>Beweis v. Satz 8.6.</u> (1) Sei $Hf(x) \geq 0 \ \forall x \in B_\delta(a) \subseteq U$

$x \in B_\delta(a)$, $h := x - a \underset{Df(a)=0}{\Longrightarrow}$ (Taylorformel mit Restglied)

$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \underbrace{h^t Hf(\xi) h}_{\geq 0}$ mit geeignetem $\xi \in [a, x]$

$\Rightarrow f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in B_\delta(a)$

(2) $A := Hf(a) > 0$. $\|h\|$ klein $\Rightarrow$ (qual. Taylorformel)

$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^t A h + \|h\|^2 \cdot r(h)$ mit $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$

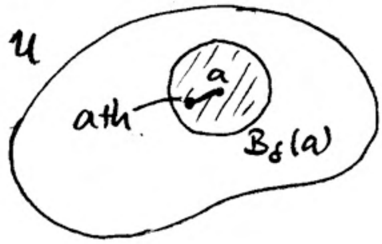
Betrachte $g(h) := h^t A h$ auf der Sphäre $S = \{ h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1 \}$

g stetig, S kompakt $\Rightarrow$ g nimmt auf S ein Minimum m an. Dabei $m > 0$, da $A > 0$.

$h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel. $\Rightarrow g(h) = \|h\|^2 \cdot g(\underbrace{\tfrac{h}{\|h\|}}_{\in S}) \geq m \|h\|^2$

$\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |r(h)| \leq \frac{m}{4}$, sofern $\|h\| < \delta$

(und $B_\delta(a) \subseteq \mathcal{U}$)



Also: $\|h\| < \delta$, $h \neq 0 \Rightarrow$

$f(a+h) \geq f(a) + \underbrace{\tfrac{1}{2} g(h)}_{\geq \frac{m}{2}\|h\|^2} - \frac{m}{4}\|h\|^2 > f(a)$

$\Rightarrow f$ hat isoliertes lokales Minimum in a.

(4) Vorauss. $\Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{R}^n$: $\underbrace{h^t A h}_{=:c} > 0$, $k^t A k < 0$

Taylorentw. von f um a: $t \in \mathbb{R}$, $|t|$ klein $\Rightarrow$

$f(a+th) = f(a) + \frac{1}{2} t^2 c + o(t^2)$ für $t \to 0$

$= f(a) + t^2 (\underbrace{\tfrac{1}{2} c + o(1)}_{> 0 \text{ für } |t| \text{ klein genug}})$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(a+th) > f(a) \text{ für } |t| \text{ klein} \\ \text{Analog: } f(a+tk) < f(a) \text{ für } |t| \text{ klein} \end{array}\right\} \Rightarrow a$ Sattelpkt ∎

§9 Differenzierbare Abbildungen

1. Differenzierbarkeitsbegriff

Betrachte Abb. $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ mit bel. Normen)

Komponentenweise Darst. (bzgl. bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^m$):

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \text{mit } f_i : D \to \mathbb{R} \qquad (\text{oft auch } f = (f_1, \ldots, f_m))$$

<u>Bsp</u> 1. Kurven im $\mathbb{R}^m$: stetige Abb. $f = \gamma: I \to \mathbb{R}^m$,
$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

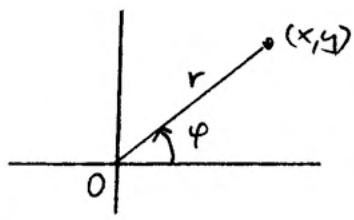
2. Vektorfelder $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

3. Koordinatentransformationen

Bsp: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$:

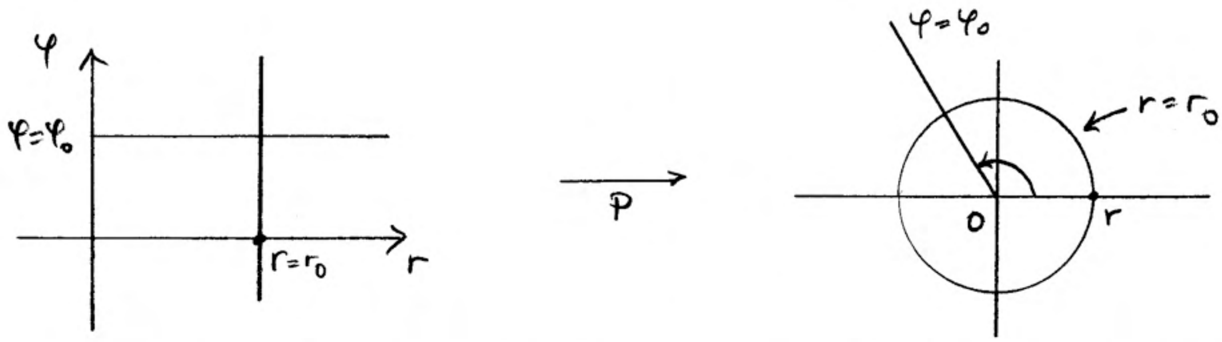
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

mit $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$



Polarkoordinatenabbildung:

$P: [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $P(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.



<u>Def</u>. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f: U \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>differenzierbar</u> in $x \in U$

$:\Longleftrightarrow \exists$ Lineare Abb. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so dass nahe x gilt:

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + r(h) \quad \text{mit } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

<u>Äquiv</u>: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$

L ist eindeutig, sofern existent: Beweis wie für $m = 1$

$L = Df(x)$ heißt das <u>Differential (Ableitung)</u> von f in x.

<u>Bem</u>: 1. Die Def. ist unabhängig von der Wahl der Normen

2. f diffbar in $x \Rightarrow f$ stetig in x, denn:

$f(x+h) - f(x) = L(h) + r(h) \to 0$ mit $h \to 0$, da L stetig, $L(0) = 0$.

3. $f, g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diffbar in x; $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\lambda f + \mu g$ diffbar in x, $D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x)$

(leicht aus Def.)

<u>Bez</u>: f diffbar auf $\mathcal{U}$ $:\Leftrightarrow$ f diffbar in allen $x \in \mathcal{U}$

<u>Bsp</u> Affine Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$f(x+h) = Ax + Ah + b = f(x) + L(h)$ mit $L(h) = Ah$ linear

$\Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}^n$, $Df(x)h = Ah \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

9.1. <u>Satz</u> f diffbar in $x \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$ alle Komponenten f_i sind diffbar in x. In diesem Fall ist

$$Df(x)h = \begin{pmatrix} Df_1(x)h \\ \vdots \\ Df_m(x)h \end{pmatrix} = J_f(x) \cdot h \quad \text{mit}$$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

<u>Jacobi-Matrix</u> von f in x

(= darstellende Matrix von $Df(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bzgl. der Standardbasen des $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{R}^m$)

<u>Beweis</u>: $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Leftrightarrow$ alle L_i linear

und: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_i(x+h) - f_i(x) - L_i(h)}{\|h\|} = 0 \quad \forall i.$ ∎

Jede lin. Abb. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist norm. Raum mit der Operatornorm $\|L\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Lx\|$.

<u>Def.</u> Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f = (f_1, \dots, f_m): \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ heißt

(i) <u>stetig diffbar</u> auf $\mathcal{U}$, falls f diffbar auf $\mathcal{U}$ und

(*) $Df: \mathcal{U} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ stetig

(ii) <u>[stetig] partiell diffbar</u> auf $\mathcal{U}$, falls alle f_i [stetig] partiell diffbar auf $\mathcal{U}$.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \times n}$ (bzgl. Standardbasen). Damit:

$$(*) \Leftrightarrow J_f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{m \times n} \text{ stetig (bzgl. bel. Matrixnorm)}$$

9.2. <u>Satz</u> Für $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ sind äquiv:

(1) f stetig diffbar auf $\mathcal{U}$

(2) f diffbar auf $\mathcal{U}$, und $\forall h \in \mathbb{R}^n$ ist die Abb.

$$x \mapsto Df(x)h, \quad \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m \text{ stetig}$$

(3) f stetig partiell diffbar auf $\mathcal{U}$

<u>Beweis:</u> (1) $\Rightarrow$ (2): $\|Df(x)h - Df(x_0)h\| \le \underbrace{\|Df(x) - Df(x_0)\|}_{\to 0 \text{ für } x \to x_0} \cdot \|h\|$

(2) $\Rightarrow$ (1) alle Normen auf $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sind äquiv.

Arbeite mit $\|L\|_\infty := \max_{1 \le i \le m} \|Le_i\|$ (ist Norm: leicht)

$$\Rightarrow \|Df(x) - Df(x_0)\|_\infty = \max_i \underbrace{\|Df(x)e_i - Df(x_0)e_i\|}_{\to 0} \to 0 \text{ für } x \to x_0$$

$$(2) \Leftrightarrow \forall\, 1 \le i \le n \text{ ist } x \mapsto Df(x)e_i = \begin{pmatrix} \partial_i f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(x) \end{pmatrix} \text{ stetig auf } \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow \partial_i f_j \in C(\mathcal{U}) \quad \forall i, j. \quad \blacksquare$$

<u>Bez:</u> $C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) := \{ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m \text{ stetig diffbar} \}$ $\mathbb{R}$-VR

Bez: f heißt k-mal stetig diffbar auf $\mathcal{U}$ $(k \geq 2)$, falls f k-mal stetig partiell diffbar auf $\mathcal{U}$.

$C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) = \{f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m : f \text{ } k\text{-mal stetig diffbar}\}$

$C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$. Alles $\mathbb{R}$-VR

Bsp: 1. Die Polarkoord. Abb. P ist C^∞-Abb. auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, $\boxed{J_P(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}}$

2. Identifiziere $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (mit bel. Norm)

$\Rightarrow GL(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ offen, und die Inversenbild.

$\mathrm{inv}: GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ ist stetig (H3, Bl. 6)

inv ist C^∞-Abb., denn $(A^{-1})_{ij}$ ist rationale Fkt in den Komponenten von A.

9.3. Kettenregel

Seien $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen.

Sei $f : \mathcal{U} \to V$ diffbar in $x \in \mathcal{U}$, $g : V \to \mathbb{R}^k$ diffbar in $y = f(x)$

$\Rightarrow g \circ f$ ist diffbar in x mit

$$\boxed{D(g\circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)}$$

Mit Jacobi-Matrizen: $J_{g\circ f}(x) = \underbrace{J_g(f(x))}_{\in \mathbb{R}^{k\times m}} \cdot \underbrace{J_f(x)}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}}$

Matrixeinträge von $J_{g\circ f}(x)$: $\frac{\partial}{\partial x_j}(g\circ f)_i(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_l(x)}{\partial x_j}$ (*)

Zusatz: Falls f, g C^1-Abb. (auf $\mathcal{U}$ bzw. V) $\Rightarrow$ auch $g\circ f$ C^1-Abb. auf $\mathcal{U}$ (folgt direkt aus (*))

Beweis:

$y = f(x)$, $Df(x) = L_1$, $Dg(y) = L_2$

$f(x+h) = f(x) + L_1 h + \|h\| r_1(h)$, $\lim_{h\to 0} r_1(h) = 0$

$g(y+k) = g(y) + L_2 k + \|k\| r_2(k)$, $\lim_{k\to 0} r_2(k) = 0$

$\Rightarrow (g\circ f)(x+h) = g(\underbrace{f(x)}_{=y} + \underbrace{f(x+h) - f(x)}_{= L_1 h + \|h\| r_1(h) =: k}) =$

$$= g(f(x)) + L_2 k + \|k\| r_2(k)$$
$$= g(f(x)) + \underbrace{L_2(L_1 h)}_{(L_2 \circ L_1)(h)} + \underbrace{L_2(\|h\| r_1(h)) + \|k\| r_2(k)}_{=: R(h)}$$

$h \to 0 \Rightarrow L_1 h \to 0$ (da L_1 stetig) $\Rightarrow k \to 0$

$$\frac{R(h)}{\|h\|} = \underbrace{L_2(r_1(h))}_{\to 0} + \underbrace{r_2(k)}_{\to 0} \cdot \frac{\|k\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0, \text{ da } \frac{\|k\|}{\|h\|} \le \|L_1\| + \|r_1(h)\| \le \text{konst}. \quad \blacksquare$$

9.4. Bsp: Abbildung von Tangentialvektoren an Kurven

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma: I \to U$ diffbare Kurve (I offenes Intervall), und $f: U \to \mathbb{R}^m$ diffbar

Bildkurve von γ unter f: $\tilde\gamma = f \circ \gamma$ (diffbar)

Tangentialvektor von $\tilde\gamma$ in $f(p)$, $p = \gamma(t)$:

$$\dot{\tilde\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \underset{\text{Kettenr.}}{=} Df(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)$$

Tangentialvektoren werden also durch das Differential abgebildet

9.5. Bsp: Bilineare Abbildungen

Sei $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bilinear, d.h.

- $y \in \mathbb{R}^m$ fest $\Rightarrow x \mapsto \beta(x,y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linear
- $x \in \mathbb{R}^n$ fest $\Rightarrow y \mapsto \beta(x,y): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ "

Bsp:
- Jedes Skalarprod. $\langle .,. \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

• Matrizenmultiplikation bei Identifikation $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$

Dann gilt: $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^k$ ist C^1-Abb. mit

$\otimes$ $D\beta(x,y)(h,h') = \beta(x,h') + \beta(h,y)$, $\quad (h,h') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

<u>Beweis</u>: Übung.

9.6. <u>Korollar</u> (<u>Allgemeine Produktregel</u>)

Seien $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}^m$ diffbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$\Rightarrow f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ ist diffbar,

$$Df(x)h = (Df_1(x)h, Df_2(x)h) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

Sei weiter $\beta: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bilinear $\xRightarrow{\text{Kettenregel}}$

$\beta \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ diffbar, und $\forall x \in U, h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$D(\beta \circ f)(x)h = \beta(f_1(x), Df_2(x)h) + \beta(Df_1(x)h, f_2(x))$$

<u>Beweis</u>: $D(\beta\circ f)(x)h = D\beta(f(x))(Df(x)h)$ und $\otimes$ ∎

<u>Bsp ($n=1$)</u>: $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^m$ diffbare Kurven ($I \subseteq \mathbb{R}$ offen)

$\beta: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bilinear $\Rightarrow$

$g(t) = \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : I \to \mathbb{R}^k$ diffbar,

$\dot{g}(t) = \beta(\gamma_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) + \beta(\dot{\gamma}_1(t), \gamma_2(t)) \quad [D\gamma_i(t)h = \dot{\gamma}_i(t)\cdot h, h \in \mathbb{R}]$

Nächstes Ziel: Jede C^1-Abb. ist lokal Lipschitz-stetig. Dazu:

<u>Exkurs</u>: <u>Vektorwertige Integration</u>

Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig ($\mathbb{R}^n$ mit bel. Norm $\|.\|$)

<u>Def.</u> $$\int_a^b f(x)dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(x)dx \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

9.7. <u>Lemma</u> $\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx$ (Standardabschätz.)

Beweis: (a) f $\mathbb{R}^n$-wertige Treppenfkt, dh. $\exists$ Unterteil. $a = x_1 < \dots < x_k = b$:
$f(x) = c_i \in \mathbb{R}^n$ auf (x_i, x_{i+1}) $\Rightarrow$
$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k-1} c_i(x_{i+1}-x_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{k-1} \|c_i\|(x_{i+1}-x_i) = \int_a^b \|f(x)\|dx$$

(b) f stetig $\Rightarrow$ f gleichmäßig auf $[a,b]$ durch ($\mathbb{R}^n$-wertige) Treppenfkt approx. bar, dh. $\exists$ Folge (φ_k) von Treppenfct auf $[a,b]$ mit
$\sup_{x\in[a,b]} \|f(x) - \varphi_k(x)\| \to 0$
(approximiere die Komponenten von f durch $\mathbb{R}$-wertige TF auf gemeinsamer Unterteilung von $[a,b]$)
$$\Rightarrow \left\|\int_a^b f(x)dx\right\| = \left\|\lim_{k\to\infty}\int_a^b \varphi_k(x)dx\right\| \underset{\text{Fall (a)}}{\le} \lim \int_a^b \|\varphi_k(x)\|dx$$
$$= \int_a^b \|f(x)\|dx \quad \blacksquare$$

9.8. Schrankensatz Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ $\Rightarrow$
f ist auf jeder kompakten, konvexen Teilmenge $K \subseteq U$ Lipschitzstetig. Genauer:
$$\forall x,y \in K: \|f(x)-f(y)\| \le \|Df\|_K \cdot \|x-y\|$$
$$\text{wobei } \|Df\|_K := \max_{\xi\in K} \underset{\uparrow}{\|Df(\xi)\|} < \infty$$
Operatornorm

Beachte: f C^1-Abb. $\Rightarrow$ $\xi \mapsto \|Df(\xi)\|$ stetig, also beschr. auf K.

Beweis: $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in C^1(U, \mathbb{R})$. Seien $x, y \in K$.
$\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$ $\Rightarrow$ (H3, Blatt 10)
$$f_i(y) - f_i(x) = \int_0^1 Df_i(\gamma(t))\underbrace{\dot\gamma(t)}_{y-x}dt \quad \forall i \Rightarrow$$
$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(\gamma(t))(y-x)dt$$
$$\underset{\text{Standardabsch}}{\Rightarrow} \|f(y)-f(x)\| \le \int_0^1 \|Df(\underbrace{\gamma(t)}_{\in K})\|\cdot\|y-x\|dt$$
$$\le \|Df\|_K \cdot \|y-x\| \quad \blacksquare$$

2. Umkehrabbildungen

Stets: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ mit bel. Normen versehen.

Def. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. $f : U \to V$ heißt (C^1-) Diffeomorphismus, falls f bijektive C^1-Abb. und f^{-1} ebenfalls C^1-Abb.

9.9. Satz Sei $f : U \to V$ Diffeom. ($U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen) $\Rightarrow$

(1) $n = m$

(2) $Df(x)$ ist invertierbar $\forall x \in U$, und in $y = f(x)$ gilt

$$D(f^{-1})(y) = Df(x)^{-1}$$

äquivalent: $J_f(x)$ inv.bar $\forall x \in U$, und $J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1}$

Beweis: $f^{-1} \circ f = id_U$, $f \circ f^{-1} = id_V \Rightarrow$ (Kettenregel)

$$D(f^{-1})(y) \circ Df(x) = D(id)(x) = id, \quad Df(x) \circ D(f^{-1})(y) = id \underset{\text{Lin. Alg}}{\Longrightarrow} (1)+(2)$$

■

Falls $n = 1$, $U = I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, so reicht die Invertierbarkeit von $J_f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in U$ für globale Umkehrbarkeit (da dann f streng monoton). Im Fall $n \geq 2$ reicht das nicht (selbst wenn U wegzshgd)!

Bsp: Polarkoord. Abb. im $\mathbb{R}^2$: $P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

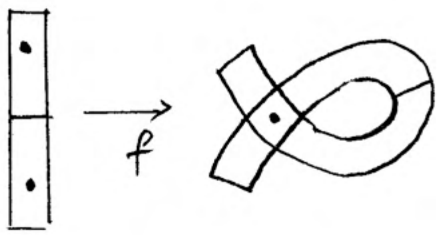
$P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ surjektiv

$J_P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_P(r, \varphi) = r > 0 \Rightarrow$

J_P invertierbar $\forall r, \varphi$.

Aber P ist nicht injektiv auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, da $P(r, \varphi) = P(r, \varphi + 2\pi)$

Typischer Effekt im Fall $n \geq 2$,
obwohl $\det J_f(x) \neq 0$ $\forall x$:
f lokal, aber nicht global injektiv



2. Umkehrabbildungen

Stets: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ mit bel. Normen versehen.

<u>Def.</u> Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. $f: U \to V$ heißt (C^1-) <u>Diffeomorphismus</u>, falls f bijektive C^1-Abb. und f^{-1} ebenfalls C^1-Abb.

9.9. <u>Satz</u> Sei $f: U \to V$ Diffeom. ($U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen) $\Rightarrow$

(1) $n = m$

(2) $Df(x)$ ist invertierbar $\forall x \in U$, und in $y = f(x)$ gilt

$$D(f^{-1})(y) = Df(x)^{-1}$$

äquivalent: $J_f(x)$ inv.bar $\forall x \in U$, und $J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1}$

<u>Beweis</u>: $f^{-1} \circ f = id_U$, $f \circ f^{-1} = id_V \Rightarrow$ (Kettenregel)

$D(f^{-1})(y) \circ Df(x) = D(id)(x) = id$, $Df(x) \circ D(f^{-1})(y) = id \underset{\text{Lin. Alg}}{\Longrightarrow} (1)+(2)$ ∎

Falls $n = 1$, $U = I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, so reicht die Invertierbarkeit von $J_f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in U$ für globale Umkehrbarkeit (da dann f streng monoton). Im Fall $n \geq 2$ reicht das <u>nicht</u> (selbst wenn U wegzshgd)!

<u>Bsp</u>: Polarkoord. Abb. im $\mathbb{R}^2$: $P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

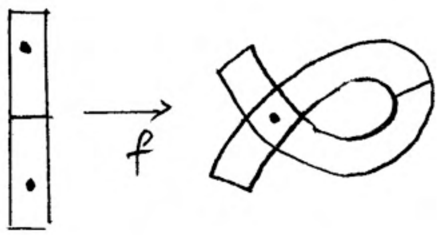
$P: (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ surjektiv

$J_P(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_P(r,\varphi) = r > 0 \Rightarrow$

J_P invertierbar $\forall r, \varphi$.

Aber P ist nicht injektiv auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, da $P(r,\varphi) = P(r, \varphi + 2\pi)$

Typischer Effekt im Fall $n \geq 2$,
obwohl $\det J_f(x) \neq 0$ $\forall x$:
f lokal, aber nicht global injektiv



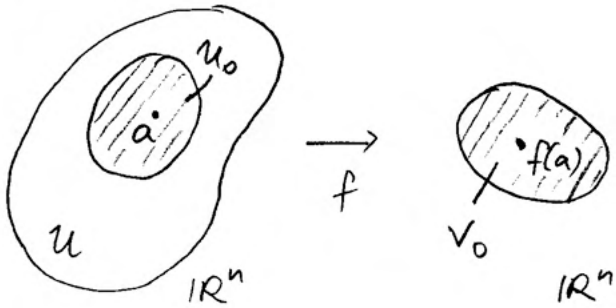
9.10. Satz von der lokalen Umkehrbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar. Sei $a \in U$ und $Df(a)$ invertierbar $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von a und $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $f(a)$, so dass

$$f|_{U_0}: U_0 \to V_0 \quad \text{Diffeomorphismus}$$

(man sagt: f ist lokaler Diffeomorphismus bei a)

$(f|_{U_0})^{-1}: V_0 \to U_0$: lokale Umkehrabb. von f bei a



Vor dem Beweis zunächst einige wichtige Folgerungen:

9.11. Offenheitssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, wobei $Df(x)$ invertierbar $\forall x \in U$ $\Rightarrow$ $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Beweis: $x \in U \underset{\text{Satz 9.10}}{\Rightarrow}$ $\exists$ offene Umgeb. $U_x \subseteq U$ von x so, dass $V_x = f(U_x) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow$ $f(U) = \bigcup_{x \in U} V_x$, also offen ∎

9.12. Globaler Diffeomorphiesatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar + injektiv, wobei $Df(x)$ invertierbar $\forall x \in U$ $\Rightarrow$

$f: U \to f(U)$ ist Diffeomorphismus

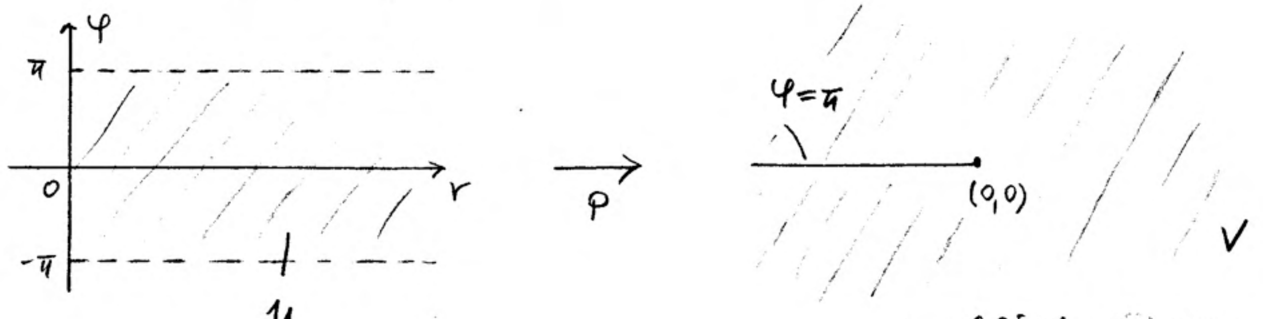
Oft praktisch! (Bsp. kommt gleich)

Beweis: $f: U \to f(U)$ bijektiv, $f(U)$ offen nach Satz 9.11, und f^{-1} diffbar auf ganz $f(U)$ nach Satz 9.10. ∎

<u>Bsp</u>: Polarkoord. abb. $P(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$\mathcal{U} := (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$ (beide offen in $\mathbb{R}^2$)

$\Rightarrow P : \mathcal{U} \to V$ bijektiv

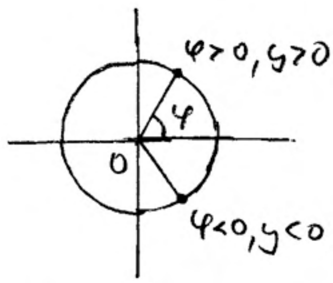


geschlitzte Ebene

P ist C^1-Abb mit $\det J_P(r,\varphi) \ne 0 \ \forall (r,\varphi) \in \mathcal{U}$ $\xRightarrow[\text{Diffeom. Satz}]{\text{globaler}}$

$P : \mathcal{U} \to V$ ist Diffeomorphismus.

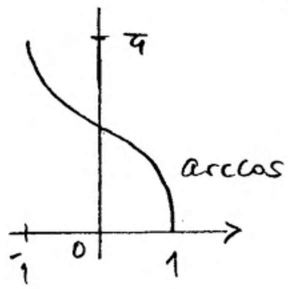
P^{-1} explizit: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow$



$r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\frac{x}{r} = \cos\varphi$, $\frac{y}{r} = \sin\varphi$

$\Rightarrow \varphi = \left(\arccos\frac{x}{r}\right) \cdot \operatorname{sign} y$

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$



$$\operatorname{sign} y = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

Damit: $P^{-1}(x,y) = \left(r, \operatorname{sign} y \cdot \arccos\frac{x}{r}\right)$, $(x,y) \in V$.

Nicht einmal die Stetigkeit von P^{-1} ist unmittelbar ersichtlich!

<u>Beweis d. lokalen Umkehrsatzes 9.10</u>.

Aufwendig, erfordert mehrere Schritte.
Zentral: Umwandlung in Fixpunktproblem.

(1) <u>Reduktion</u>: o.E. $a = f(a) = 0$, $Df(0) = \mathrm{id}$

Betrachte sonst $\tilde{f}(x) = Df(a)^{-1}(f(a+x) - f(a))$, $x \in \mathcal{U} - a$

$\tilde{f}(0) = 0$, $D\tilde{f}(0) = \mathrm{id}$.

Sei gezeigt dass $\tilde f$ lokaler Diffeom. bei 0

$$f(x) = f(a) + Df(a)\tilde f(x-a)$$

$\Rightarrow$ f ist lokaler Diffeom. bei a mit (setze $y = f(x)$)

$$f^{-1}(y) = a + \tilde f^{-1}\big(\underbrace{Df(a)^{-1}(y - f(a))}_{\text{nahe } 0 \text{ für } y \text{ nahe } f(a)}\big)$$

(2) Situation: $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $0 \in \mathcal{U}$, $f(0) = 0$, $Df(0) = id$

Ziel: Löse $y = f(x)$ nahe $y = 0$ nach x auf.

Schreibe dazu $y = f(x)$ als Fixpkt-Gleichung!

Für $y \in \mathbb{R}^n$ setze

$$f_y(x) := y + x - f(x), \quad x \in \mathcal{U}.$$

Dann: $y = f(x) \Leftrightarrow f_y(x) = x$, dh. x ist Fixpkt von f_y.

Wir wollen den Banachschen Fixpktsatz auf f_y anwenden.

Präparation d. Situation: $\varphi(x) := x - f(x)$, $x \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow \varphi(0) = 0$, $D\varphi(0) = id - Df(0) = 0$.

$D\varphi$ stetig auf $\mathcal{U} \Rightarrow \exists r > 0$, so dass $K := \overline{B_r(0)} \subseteq \mathcal{U}$ und

$$\underbrace{\|D\varphi(x)\|}_{\text{Operatornorm zu geg. Norm auf } \mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in K$$

Schrankensatz $\Rightarrow$ $\forall x, x' \in K$: $\|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ (i)

Insbes (mit $x' = 0$): $\|\varphi(x)\| \leq \frac{r}{2}$ $\forall x \in K$

$f_y(x) = y + \varphi(x) \Rightarrow \|f_y(x) - f_y(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ $\forall x, x' \in K$ (ii)

Ferner: $\|y\| < \frac{r}{2}$, $x \in K \Rightarrow$

$$\|f_y(x)\| \leq \|y\| + \|\varphi(x)\| < r \quad \text{(iii)}$$

(ii) + (iii) $\Rightarrow$ $f_y: K \to K$ ist Kontraktion für $\|y\| < \frac{r}{2}$.

K ist vollst. metr. Raum, da abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$

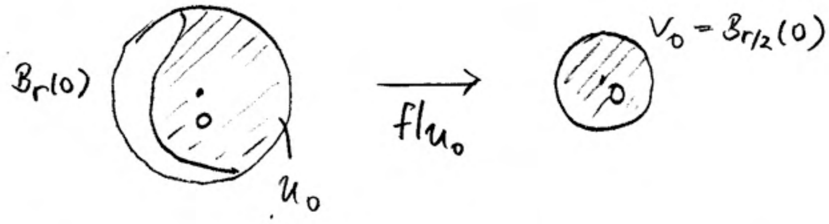
Banachscher Fixpktsatz $\Rightarrow$

$\forall y \in B_{\frac{r}{2}}(0)$ $\exists!\, x \in K$: $f_y(x) = x$, dh. $y = f(x)$.

Dabei sogar $x \in B_r(0)$ wegen (iii)

Setze $V_0 := B_{\frac{r}{2}}(0)$, $\mathcal{U}_0 := B_r(0) \cap f^{-1}(V_0)$ (offen in $\mathbb{R}^n$, da f stetig)

$\Rightarrow f|_{\mathcal{U}_0} : \mathcal{U}_0 \to V_0$ bijektiv. $\quad 0 \in \mathcal{U}_0$, da $f(0) = 0$.



Setze $g := f|_{\mathcal{U}_0}^{-1} : V_0 \to \mathcal{U}_0$; $g(0) = 0$.

(3) g ist stetig auf V_0

<u>Beweis</u>: Seien $y, y' \in V_0$, $x = g(y)$, $x' = g(y') \in \mathcal{U}_0$ $(\subseteq K)$

$$\|x - x'\| = \| \varphi(x) + \underbrace{f(x)}_{y} - \varphi(x') - \underbrace{f(x')}_{y'} \| \le \underbrace{\|\varphi(x) - \varphi(x')\|}_{\underset{(i)}{\le} \frac{1}{2}\|x - x'\|} + \|y - y'\|$$

$$\Rightarrow \|g(y) - g(y')\| = \|x - x'\| \le 2\|y - y'\| \Rightarrow \text{Beh.}$$

(4) $\forall x \in \mathcal{U}_0$ ist $Df(x)$ invertierbar ($\Leftrightarrow J_f(x)$ inv.bar)

<u>Beweis</u>: $f(x) = x - \varphi(x) \Rightarrow J_f(x) = I - J_\varphi(x)$ und

$\|J_\varphi(x)\| = \|D\varphi(x)\| \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathcal{U}_0$

Die Beh. folgt aus:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|A\| < 1 \Rightarrow I - A$ invertierbar

bel. Matrixnorm (Beweis: Übung!)

(5) g ist differenzierbar auf V_0

<u>Beweis</u>: zu zeigen: Diffbarkeit in $y_0 = f(x_0) \in V_0$, $x_0 \in \mathcal{U}_0$

Wie in Schritt (1) reduziert man die Situation auf den Fall $x_0 = y_0 = 0$, $Df(0) = id$.

[Betrachte $\tilde{f}(x) = Df(x_0)^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))$].

Zeige also: g ist diffbar in 0.

Betrachte dazu $g(k) - g(0) = g(k)$ mit $k \in V_0$, $k \to 0$,

$h := f^{-1}(k) = g(k) \underset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow} h \to 0 \quad (k \neq 0 \Rightarrow h \neq 0)$

$$\underbrace{f(h)}_{=k} = \underbrace{f(0)}_{=0} + Df(0)h + r(h) = h + r(h), \quad r(h) = o(\|h\|)$$

$$\Rightarrow g(k) = h = k - r(g(k))$$

Beh: $r(g(k)) = o(\|k\|)$, dann g diffbar in 0 mit $Dg(0) = id$

Aber: $$\frac{r(g(k))}{\|k\|} = \underbrace{\frac{r(h)}{\|h\|}}_{\to 0,\, h\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|h\|}{\|k\|}}_{=: \otimes}$$

$\otimes$ ist beschränkt für $h \to 0$, denn:

$$\frac{\|k\|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\|f(h)\| = \left\| \frac{h}{\|h\|} + \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \geq 1 - \underbrace{\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}}_{\to 0 \text{ für } h\to 0} \geq \frac{1}{2} \text{ für } \|h\| \text{ klein genug}$$

Also: $k \to 0 \Rightarrow h \to 0 \Rightarrow \frac{r(g(k))}{\|k\|} \to 0 \Rightarrow$ Beh.

(6) g ist stetig diffbar, dh. $J_g : V_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stetig.

Dazu: $f \circ g = id_{V_0} \Rightarrow$ in $y = f(x)$ gilt (Kettenregel):

$$J_g(y) = J_f(x)^{-1} = J_f(g(x))^{-1}$$

g stetig, J_f stetig, Inversenbildung in $GL(n,\mathbb{R})$ stetig (war Üb)

$\Rightarrow J_g$ stetig auf V_0 ∎

3. Implizite Funktionen

Der lokale Umkehrsatz 9.10. liefert eine Aussage über die Auflösbarkeit von Gleichungen d. Form

$$y = f(x), \quad f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \ (C^1\text{-Abb.}), \quad \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

n Gleichungen für n Unbekannte $x_1, \dots, x_n$

Jetzt: Systeme von m (nichtlinearen!) Gleichungen mit k Unbekannten, $k \neq m$

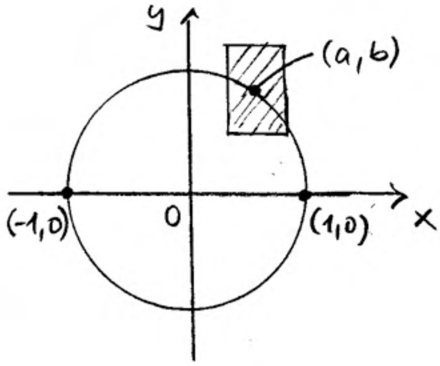
Fall $m > k$ i.A. unlösbar (wie bereits bei linearen Gleichungssystemen)

Daher hier: $m<k$ (unterbestimmtes System). Sei $k=m+n$, $n\in\mathbb{N}$

Lineares Gleichungssystem: $Ax=y$; $A\in\mathbb{R}^{m\times k}$, $y\in\mathbb{R}^m$ geg.
Sei Rang $A=m$ $\Rightarrow$ $\overbrace{\text{der}}^{Ax=y \text{ lösbar, und}}$ Lsg-Raum hat Dim $k-m=n$, dh. n Unbekannte frei wählbar, die restlichen sind dann Fkt der freien Variablen.

<u>Ziel</u>: Analogon im nichtlinearen Fall

<u>Bsp</u> ($n=m=1$) $\quad f(x,y)=x^2+y^2-1 \overset{!}{=} 0$



$\Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$

Auflösung nicht eindeutig (2 Zweige), und nicht global definiert

- In der Nähe von (a,b) mit $f(a,b)=0$ und $b>0$: eindeutige Auflösung
$$y=+\sqrt{1-x^2}$$
Falls $b<0$: $y=-\sqrt{1-x^2}$

- In keiner (noch so kleinen) Umgeb. von $(1,0)$ bzw. $(-1,0)$ kann man eindeutig nach y auflösen!
- Aber: nahe $(1,0)$ exist. eindeutige Auflösung nach x:
$$x=+\sqrt{1-y^2}$$

Beobachte: $\partial_y f(x,y)=2y$

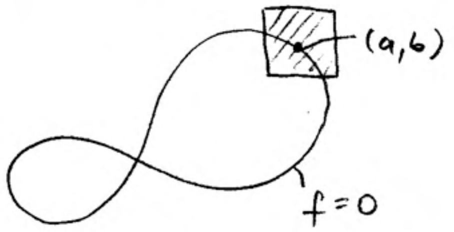
$(a,b)\in\{(x,y): f(x,y)=0\}$ mit $\partial_y f(a,b)=0 \Leftrightarrow (a,b)=(\pm 1,0)$

Aber $\partial_x f(\pm 1,0)\neq 0$.

<u>Allgemein</u>: Gegeben m Gleichungen in $m+n$ Unbekannten ($m,n\in\mathbb{N}$), geschrieben als
$$f(x,y)=0,\quad f: U\times V\to\mathbb{R}^m,\quad U\subseteq\mathbb{R}^n,\ V\subseteq\mathbb{R}^m \text{ offen}$$
<u>Ziel</u>: Auflösung nach $y=(y_1,\dots,y_m)$ als Fkt von $x=(x_1,\dots,x_n)$

Globale Lösungstheorie: i.A. schwierig, falls f nichtlinear.

Hier: Lokale Lsg-Theorie, dh:



Untersuche die Nullstellenmenge $\{f=0\}$ in der Nähe einer Nullstelle (a,b) von f auf Auflösbarkeit nach y.

Sei $f \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$. Partielle Differentiale von f:

$$D_x f(x,y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad D_x f(x,y)h := Df(x,y)(h,0)$$
$$D_y f(x,y): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad D_y f(x,y)h' := Df(x,y)(0,h') \qquad \text{(linear)}$$

Damit: $Df(x,y)(h,h') = D_x f(x,y)h + D_y f(x,y)h'$

Jacobi-Matrizen dazu:

$$J_f(x,y) = \left(\underbrace{\begin{matrix} \partial_{x_1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x,y) & \cdots & \partial_{x_n} f_m(x,y) \end{matrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathbb{R}^{m \times n}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} \partial_{y_1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{y_m} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_m(x,y) & \cdots & \partial_{y_m} f_m(x,y) \end{matrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathbb{R}^{m \times m}} \right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sind die Jacobi-Matrizen von $D_x f(x,y)$ bzw. $D_y f(x,y)$.

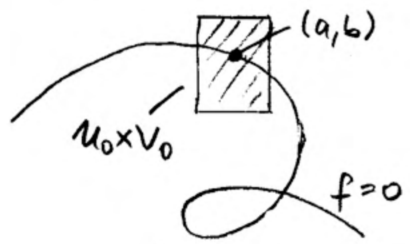
9.13. Satz über implizite Funktionen

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$.

Sei $(a,b) \in U \times V$ mit $f(a,b) = 0$, und $D_y f(a,b)$ sei invertierbar ($\Leftrightarrow \det \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$) $\Rightarrow$

$\exists$ offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von a und $V_0 \subseteq V$ von b, sowie eine C^1-Abb. $g: U_0 \to V_0$, so dass $\forall (x,y) \in U_0 \times V_0$ gilt:

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$$



D.h. im $U_0 \times V_0$ ist $\{f=0\}$ genau der Graph von g!

<u>Beweis:</u> Betrachte $\phi: U \times V \to \mathbb{R}^{n+m}$, $\phi(x,y) = (x, f(x,y))$

ϕ ist C^1-Abb. Jacobi-Matrix im $(x,y) \in U \times V$:

$$J\phi(x,y) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad n \quad & \quad m \quad \end{array} & \end{array}$$

$\det J_\phi(a,b) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ nach Vorauss.

Satz v.d. lokalen Umkehrbarkeit $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgeb. $W \subseteq U \times V$ von (a,b) und $Z \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ von $\phi(a,b) = (a,0)$ so, dass

$\phi: W \to Z$ diffeomorph

Die Umkehrabb. ist von d. Form $\phi^{-1}(\xi,\eta) = (\xi, h(\xi,\eta))$
mit $h \in C^1(Z, \mathbb{R}^m)$

Für $(x,y) \in W$ sind äquiv:

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \phi(x,y) = (x,0) \Leftrightarrow (x,y) = (x, h(x,0)) \Leftrightarrow y = h(x,0)$ $\otimes$

Insbes: $h(a,0) = b$.

h stetig $\Rightarrow$ $\exists$ Umgeb. $U_0 \subseteq U$ von a, $V_0 \subseteq V$ von b mit $U_0 \times V_0 \subseteq W$,
so dass $h(x,0) \in V_0 \quad \forall x \in U_0$

Setze $g(x) := h(x,0)$, $x \in U_0$ $\Rightarrow$ $g: U_0 \to V_0$ C^1-Abb,
und $\forall (x,y) \in U_0 \times V_0$ gilt: $f(x,y) = 0 \underset{\otimes}{\Leftrightarrow} y = g(x)$ ∎

<u>Zusatz:</u> Bestimmung von $Dg(x)$ (in der Situation d. Satzes)

Mit Differentialen: $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0 \xRightarrow{\text{Kettenregel}}$

$\forall h \in \mathbb{R}^n$: $0 = [Df(x,g(x)) \circ (id_{\mathbb{R}^n}, Dg(x))](h)$

$= Df(x,g(x))(h, \underbrace{Dg(x)h}_{h'})$

$= D_x f(x, g(x)) h + (D_y f(x,g(x)) \circ Dg(x)) h$

$\left[\varphi(x) = (x, g(x)) \xRightarrow{\text{Satz 9.1}} D\varphi(x) = (id_{\mathbb{R}^n}, Dg(x)) \right.$

Im Beweis ist $D_y f(x,y)$ inv.bar $\forall (x,y) \in U_0 \times V_0$, da $J\phi(x,y)$ inv.bar (ϕ lokaler Diffeom!) $\Rightarrow$
da h oben beliebig

$\forall x \in U_0: \quad Dg(x) = -\left(D_y f(x, g(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, g(x))$

bzw: $\underbrace{J_g(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$

<u>Wichtiger Spezialfall</u>: $U, V \subseteq \mathbb{R}$, dh. $n = m = 1$

$f(x,y) = 0$ ist nahe $(a,b) \in U \times V$ mit $f(a,b) = 0$ in der Form $y = g(x)$ auflösbar, falls $\partial_y f(a,b) \neq 0$.

Dann: $g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}$

<u>Bsp</u>: $n = 1, m = 2$, dh. 2 Gleichungen:

$$f_1(x, y_1, y_2) = x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 = 0$$
$$f_2(x, y_1, y_2) = xy_1 + xy_2 + y_1 y_2 + 2 = 0$$

$f_i(2, -1, 0) = 0$.

Untersuche das Gleichungssystem nahe $(2,-1,0)$ auf Auflösbarkeit nach $y = (y_1, y_2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1,0) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x+y_2 & x+y_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,-1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ inv. bar}$$

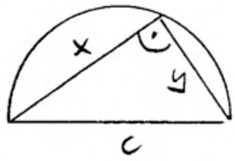
Satz über implizite Fkt $\Rightarrow$ $\exists$ offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $2 \in I$, offenes $V \subseteq \mathbb{R}^2$ um $(-1,0)$ und C^1-Abb. $g = (g_1, g_2): I \to V$, so dass für $(x,y) \in I \times V$ gilt:

$$f_i(x,y) = 0 \;(i = 1,2) \iff y = g(x)$$

$$J_g(2) = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f_1 \\ \partial_x f_2 \end{pmatrix}(2,-1,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

4. Extrema unter Nebenbedingungen

Bsp:



Gesucht: unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit geg. Hypotenuse $c > 0$ dasjenige maximaler Fläche.

Dh: $f(x,y) = \frac{1}{2}xy \overset{!}{=} \text{Max}$, unter Nebenbed.

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - c^2 = 0.$$

Allgemein: Gegeben

- Zielfunktion $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen
- Nebenbedingungen (NB):

$$g_i(x) = 0, \quad g_i: \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Gesucht: Extrema von f unter den NB $g_1 = 0, \dots, g_m = 0$,

dh. auf

$$M = \{x \in \mathcal{U} : g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$$

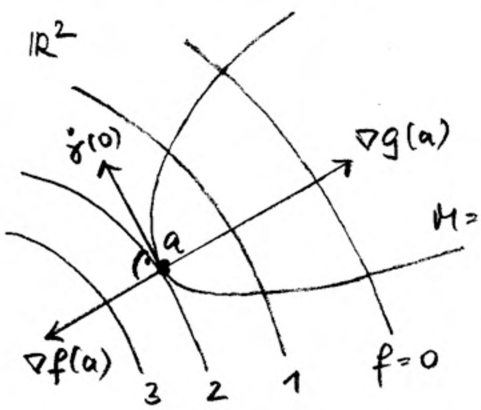
Vorüberlegung: $f|_M$ habe lokales Extremum in $a \in M$

(I) Sei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ C^1-Kurve in M mit $\gamma(0) = a$, $\dot{\gamma}(0) \neq 0$

$\implies t \mapsto f(\gamma(t))$ hat lokales Extrem. in $t = 0$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{\implies} \quad 0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = Df(\underbrace{\gamma(0)}_{a})\,\dot{\gamma}(0) = \langle \nabla f(a), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

dh. $\nabla f(a) \perp \dot{\gamma}(0)$



$m = 1, n = 2$

(II) NB: $\overset{\text{eines der } g_i}{g}(x) = 0 \ \forall x \in M$

$g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ C^1-Fkt

γ verläuft in $M \implies$

$g(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\underset{\text{Kettenr. wie in (I)}}{\implies} \nabla g(a) \perp \dot{\gamma}(0)$

Falls $m=1$, $n=2$, so folgt aus (I)+(II), sofern $\nabla g(a) \neq 0$:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \; \nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla g(a)$$

Allgemeiner:

9.14. Multiplikatorregel von Lagrange

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar (Zielfkt), und $g = (g_1, \dots, g_m): U \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, wobei $m < n$

$M := \{x \in U : g(x) = 0\}$ Nebenbed.

Vorauss: $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)$ seien linear unabhängig $\forall x \in M$ $\otimes$

Dann gilt: Ist $a \in M$ lokale Extremalstelle von $f|_M$

$\Rightarrow \nabla f(a) \in \operatorname{span}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a))$, dh.

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}: \; \boxed{\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(a)} \qquad (L)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$: „Lagrange-Multiplikatoren"

Bem: 1. $\otimes \iff J_g(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat vollen Rang $\forall x \in M$

2. Zur Bestimmung von a aus (L): Man hat

$n+m$ Unbekannte: $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

$n+m$ Gleichungen: n Gleichungen aus (L), m Nebenbed.

Beweis: Vorauss. $\Rightarrow$ Rang $J_g(a) = m$

$\Rightarrow \exists$ m Koordinaten unter $x_1, \dots, x_n$ so, dass die entsprechende $(m \times m)$ - Untermatrix von $J_g(a)$ inv.bar ist.

Nach evtl. Umnummerierung seien dies $x_{n-m+1}, \dots, x_n$

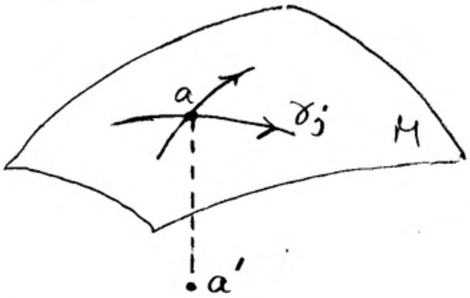
Schreibe $\mathbb{R}^n \ni x = (\underbrace{x_1, \dots, x_{n-m}}_{=:x'}, \underbrace{x_{n-m+1}, \dots, x_n}_{=:x'' \in \mathbb{R}^m})$

Also: $\frac{\partial g}{\partial x''}(a) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar.

$M = \{x \in U : g(x) = 0\}$; $g(a) = 0$, $a = (a', a'')$

Satz über implizite Fkt $\Rightarrow \exists$ Umgeb. $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ von a' und $U'' \subseteq \mathbb{R}^m$ von a'', so dass in $U' \times U''$ gilt:

$$g(x) = 0 \iff x'' = \varphi(x'), \quad \varphi: U' \to U'' \quad C^1\text{-Auflösung}$$



In einer Umgeb. von a ist also M als Graph einer Abb. φ dargestellt.

Für $j = 1, .., n-m$ setze $\gamma_j(t) := \begin{pmatrix} a' + te_j \\ \varphi(a' + te_j) \end{pmatrix}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $e_j \in \mathbb{R}^{n-m}$,

ε klein $\Rightarrow \gamma_j$ Kurve in M, $\gamma_j(0) = a$.

$\dot\gamma_j(0) = \begin{pmatrix} e_j \\ * \end{pmatrix} \Rightarrow$ die $\dot\gamma_j(0)$ sind linear unabhängig

$V := \mathrm{span}(\dot\gamma_1(0), .., \dot\gamma_{n-m}(0)) \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim V = n-m$

$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : w \perp v \ \forall v \in V\} \Rightarrow \dim V^\perp = m$

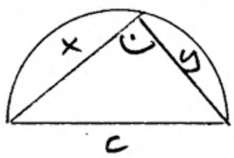
Vorüberlegung, Teil (I) $\Rightarrow \nabla f(a) \in V^\perp$

" , Teil (II) $\Rightarrow \nabla g_i(a) \in V^\perp \ \forall 1 \le i \le m$

Die $\nabla g_i(a)$ sind lin. unabh. nach Vorauss., also Basis von $V^\perp$

$\Rightarrow$ Beh., da $\nabla f(a) \in V^\perp$. ∎

Eingangsbsp:



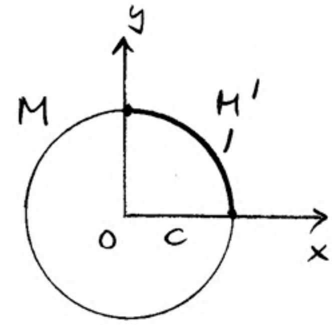
$f(x,y) = \frac{1}{2}xy \overset{!}{=} \text{Max}$, $x, y \geq 0$

Nebenbed: $g(x,y) = x^2 + y^2 - c^2 = 0$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c^2\}$

$M' = \{(x,y) \in M : x, y \geq 0\}$ ist kompakt

$\Rightarrow$ f nimmt auf M' ein globales Max. und Min. an.



$x=0$ oder $y=0 \Rightarrow f(x,y)=0$, globales Min. (da $f\geq 0$ auf M')

Suche nach Extrema im Bereich $x,y>0$ mit Lagrange

Bed: $\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

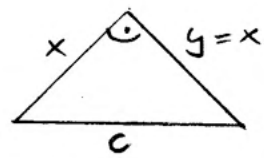
$\nabla f(x,y) = \frac{1}{2}\binom{y}{x}$, $\nabla g(x,y) = \binom{2x}{2y} \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y = 4\lambda x \ \wedge \\ x = 4\lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow x = 16\lambda^2 x \underset{x>0}{\Longrightarrow} \lambda = \pm\frac{1}{4} \underset{x,y>0}{\Longrightarrow} x=y \ (\wedge\ \lambda=\tfrac{1}{4})$$

Also $x=y=\frac{c}{\sqrt{2}}$, einziger Kandidat für lok. Max.

$\Rightarrow$ (da globales Max. auf M' exist.) f hat globales Max. auf M' für $x=y=\frac{c}{\sqrt{2}}$

$f_{max} = \frac{1}{4}c^2$



gleichschenkliges Dreieck!

Alternative (elementare) Lösung: Parametrisiere M

$$\{(x,y)\in M : x,y>0\} = \left\{\binom{c\cos\varphi}{c\sin\varphi},\ \varphi\in(0,\tfrac{\pi}{2})\right\}.$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}c^2\cos\varphi\sin\varphi = \tfrac{1}{4}c^2\sin(2\varphi) =: g(\varphi)$$

$g(\varphi)$ extremal $\Rightarrow g'(\varphi)=0 \Leftrightarrow \cos(2\varphi)=0 \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=y=\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Bisweilen ist Parametrisierung der NB einfacher als Lagrange!

<u>Bsp:</u> <u>Eigenwerte reeller symmetrischer Matrizen</u>

Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetr., dh. $A=A^t$

Maximiere $f(x) = \langle Ax, x\rangle = x^tAx$ $(x\in\mathbb{R}^n)$

unter der NB $g(x) = \underbrace{\|x\|^2}_{=\|x\|_2^2} - 1 = 0$, dh. auf der Sphäre S^{n-1}

f,g C^1-Fkt (Polynome)

S^{n-1} kompakt $\Rightarrow f$ nimmt auf S^{n-1} ein Maximum f_{max} an. Wert? Wo?

Lagrange-Bed: $\nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\nabla f(x) \underset{\text{Bsp §7}}{=} 2Ax$; $\nabla g(x) = 2x$

$\Rightarrow$ Bed: $Ax = \lambda x$, d.h. x ist Eigenvektor zum EW λ von A

(A hat n reelle EW, mit algebr. Vielfachheiten gezählt)

Damit: $f(x) = \langle \lambda x, x\rangle \underset{x \in S^{n-1}}{=} \lambda \overset{!}{=} \text{Max}$

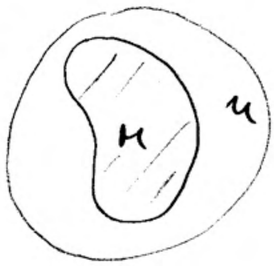
$\Rightarrow$ x ist Eigenvektor zum größten EW λ_{max} von A.

Also: $f_{max} = \lambda_{max}$, und wird in jedem (normierten) EV dazu angenommen.

<u>Zur Suche von Extrema auf Mengen mit Rand</u>

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl., $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subseteq U$

Sei $f: U \to \mathbb{R}$ C^1-Fkt.



Gesucht: Extrema von f auf M

Kandidaten f. lokale Extrema:

- Im Inneren von M: aus $\nabla f(x) \overset{!}{=} 0$
- auf ∂M? Angen. $M = \{x \in U : g(x) = 0\}$ mit C^1-Fkt $g: U \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Kandidaten durch Lagrange-Ansatz.

(Alternativ evtl. Parametrisierung von ∂M, falls $n = 2$)

Falls M kompakt, so existieren globale Extrema.

§10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Einführung

Gewöhnliche DG: Gleichung für eine Fkt $x = x(t)$ einer unabhängigen Variablen $t \in \mathbb{R}$ (oft Zeit), in der Ableitungen von $x(t)$ auftreten.

Ordnung der DG = Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung.

Bez: $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$, $x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}x(t)$

Dagegen partielle DG: Gleichung für Fkt mehrerer reeller Variablen und ihre partiellen Ableitungen (z.B. Poissongl., Wellengleichung ...)

Beispiele gewöhnlicher DG:

1. Natürliche Wachstumsgleichung

(*) $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$, $a \in \mathbb{R}$; kurz: $\dot{x} = ax$

Beschreibt Wachstum einer Population/Substanz $x(t) \in \mathbb{R}$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ mit konstanter Wachstumsrate a.

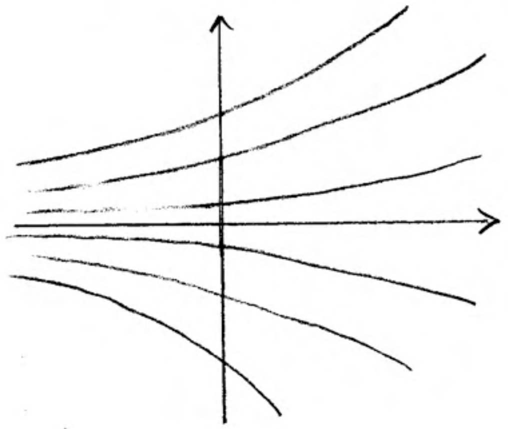
$x(t) = c \cdot e^{at}$ $(c \in \mathbb{R})$ löst (*)

Jede reelle Lsg von (*) ist von dieser Form (vgl. Ana 1!), denn:

sei $x: I \to \mathbb{R}$ Lsg ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) $\Rightarrow$

$\frac{d}{dt}(e^{-at}x(t)) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow$

$\exists c \in \mathbb{R}: \; e^{-at}x(t) = c \quad \forall t \in I$



Beobachtung: Zu jedem $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ $\exists!$ Lsg von (*) mit $x(t_0) = x_0$, nämlich:

$x_0 \overset{!}{=} ce^{at_0} \Rightarrow c = e^{-at_0}x_0 \Rightarrow$

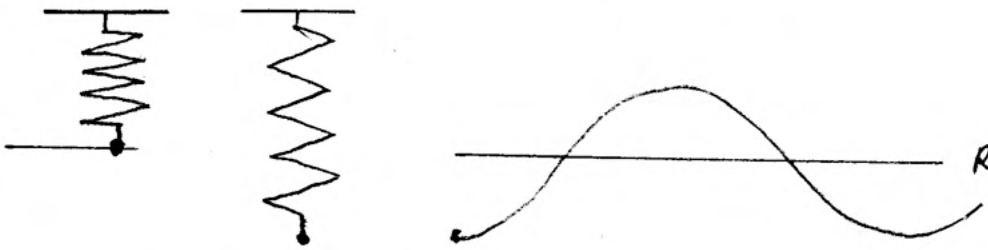
$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$.

Also: die Lsg ist durch die Anfangsbed. $x(t_0)=x_0$ eind. festgelegt.

2. Schwingungsgleichung

$x(t)$: Vertikale Auslenkung einer schwingenden Feder der Masse m zur Zeit $t\in\mathbb{R}$.

Hookesches Gesetz: $m\ddot{x}(t) = \underbrace{-kx(t)}_{\text{Rückstellkraft}}$ $k>0$: elastische Konstante (DG 2. Ordnung)



(*) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Lösungen: $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Wir werden sehen: jede Lsg von (*) ist von dieser Form.

3. Newtonsches Gesetz (Mechanik):

Auf Punktteilchen (Masse m) am Ort $x(t)\in\mathbb{R}^3$ wirke Kraft F, abh. von t, $x(t)$, $\dot{x}(t)$

↑ Zeit

↑ Geschwindigkeit

Bewegungsgleichung:

$m\ddot{x} = F(t,x,\dot{x})$.

↑ Beschleunigung

Dies ist System von 3 „skalaren" DGs:

$m\ddot{x}_i = F_i(t,x,\dot{x})$, $i=1,2,3$.

4. Populationsmodelle (Biologie, Ökologie)

$p(t)$: Population einer Spezies zur Zeit t

Annahme: Änderung pro Zeiteinheit prop. zum Bestand

$\Rightarrow$ Wachstumsgleichung:

$\dot{p} = r(t,p)\cdot p$ r: Wachstumsrate

$r = \text{konst} \Rightarrow$ exponentielles Wachstum

Realistischeres Modell: Beschränktes Wachstum, dh.

$\exists$ Grenzpopulation $p_0 > 0$: $r(t,p) \leq 0$ für $p \geq p_0$.

Bsp: Logistische Gleichung (Verhulst 1838)

$$\dot{p} = (a - bp) \cdot b, \quad a, b > 0. \quad p_0 = \frac{a}{b}$$

Die Wachstumsrate nimmt ab, wenn der Bestand wächst.

(Lsg: in Kürze!)

Räuber-Beute-System:

$x(t)$: Bestand der Beute-Spezies zur Zeit t

$y(t)$: " " Räuber " " "

Modell (Lotka-Volterra, 1925/26):

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y) \cdot x \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x) \cdot y \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

$y = 0 \Rightarrow x$ wächst exponentiell, $y > 0 \Rightarrow$ Wachstumsrate von x verringert. Analog, aber gegenläufig für y.

Modell nicht explizit lösbar (aber man kann viel über die Lsg qualitativ aussagen, z.B. Existenz periodischer Lsg, Gleichgewichtslsgen etc)

2. Gewöhnliche DG 1. Ordnung

Def. Eine (gew.) DG 1. Ordnung ist eine Gleichung/System d. Form

$$(*) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \text{kurz: } \dot{x} = f(t,x)$$

wo $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen

$(*)$ explizit, mit $f = (f_1, \dots, f_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Falls $n = 1$, so heißt $(*)$ skalare DG 1. Ordnung

Eine Lösung der DG (*) ist eine stetig diffbare Abb. $x: I \to \mathbb{R}^n$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ nichtentartetes Intervall), kurz: $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, mit

(i) $(t, x(t)) \in G \quad \forall t \in I$

(ii) $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I$

[bei DG stets: alle Intervalle nicht-entartet vorausgesetzt]

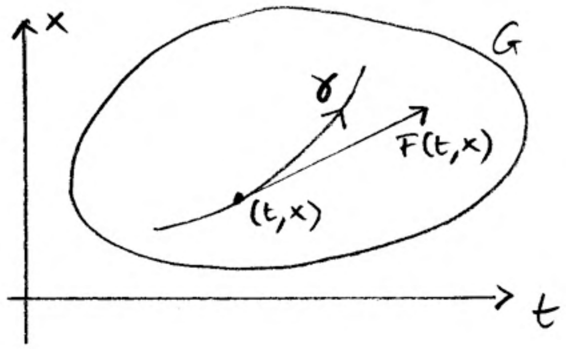
<u>Geometrische Veranschaulichung:</u>

Eine Lsg x auf I definiert eine C^1-Kurve

$$\gamma: I \to G, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Betrachte das Vektorfeld $F(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$



Die Lsg $x(t)$ muß so verlaufen, dass

$$\dot{\gamma}(t) = F(t, x(t)) \quad \forall t$$

dh. F tangential an γ in jedem Kurvenpunkt

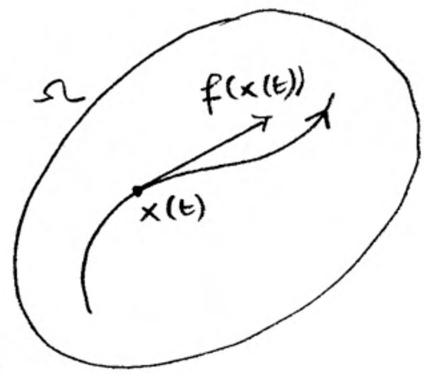
F: <u>Richtungsfeld</u> der DG (*)

Wichtiger Spezialfall: <u>Autonome Systeme</u>

$\dot{x} = f(x)$ (rechte Seite nicht explizit von t abhängig)

wo $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld,

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (Phasenraum)



Hier heißt f selbst das Richtungsfeld der DG.

Jede Lsg-Kurve $x(t)$ muß so in Ω verlaufen, dass f tangential an x in jedem Kurvenpkt

Autonome Systeme sind bzgl. der Zeit translationsinvariant,

dh: $x: I \to \Omega$ Lsg, $t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = x(t-t_0)$ ist Lsg

auf $I + t_0$: $\dot{y}(t) = \dot{x}(t-t_0) = f(x(t-t_0)) = f(y(t))$.

Bem: zweiter Spezialfall: $\dot{x} = f(t)$, $f: I \to \mathbb{R}^n$ stetig

Lösbar durch komponentenweise Integration:

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds, \qquad c = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

Zurück zu allg. Situation!

Oft betrachtet man ein Anfangswertproblem (AWP):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) & \text{auf } G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

mit vorgeg. Anfangswert $(t_0, x_0) \in G$.

Gesucht: Lsg x auf Intervall I um t_0 mit $x(t_0) = x_0$

3. Elementare Lösungsmethoden (skalare DG 1. Ordnung)

(1) DG mit getrennten Variablen

Bauart: $\dot{x} = g(t)\,h(x)$

$g: I \to \mathbb{R}$, $h: J \to \mathbb{R}$ stetig, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle

Formal: $\frac{dx}{dt} = g(t)\,h(x)$. Angen.: $h(x) \neq 0 \ \forall x \in J$

$\Rightarrow$ (Trennung d. Variablen):

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)\,dt$$

Integration mit Anfangsbed. $x(t_0) = x_0$:

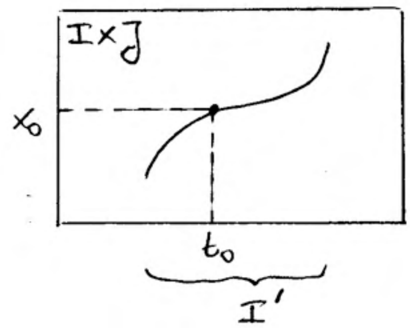
$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau,$$ dann Auflösen nach $x = x(t)$.

Präzisierung:

10.1. Satz Sei $h(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$. Betrachte das AWP

(A). $\dot{x} = g(t)h(x)$, $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \in I$, $x_0 \in J$

$\Rightarrow \exists$ offenes Intervall $I' \subseteq I$ um t_0, so dass (A) auf I' eine eindeutige Lsg $x: I' \to J$ besitzt.



Man erhält sie aus

$$(*) \quad \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$$

durch Auflösen nach $x = x(t)$

Beweis: $G(t) := \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$, $H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)}$, $t \in I, x \in J$

$H \in C^1(J)$, $H' = \frac{1}{h}$ hat einheitliches Vorzeichen auf $J \Rightarrow$

$H: J \to H(J)$ streng monoton, also bijektiv mit C^1-Umkehrung (Satz 10.6 Ana 1). $H(J)$ ist offenes Intervall (Intervall da H stetig, offen da H^{-1} stetig)

$H(x_0) = 0 \Rightarrow 0 \in H(J)$. $G(t_0) = 0$, G stetig $\Rightarrow$

$\exists$ offenes Intervall $I' \subseteq I$ um t_0 mit $G(I') \subseteq H(J)$.

Setze

$$x(t) := H^{-1}(G(t)), \quad t \in I'$$

$\Rightarrow H(x(t)) = G(t)$, d.h. man erhält $x(t)$ durch Auflösen von $(*)$ mit $x = x(t)$.

$x(t)$ löst (A): $\quad x(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0$ ✓

$$H(x(t)) = G(t) \underset{\text{different.}}{\Rightarrow} \underbrace{H'(x(t))}_{\frac{1}{h(x(t))}} \cdot \dot{x}(t) = \underbrace{G'(t)}_{g(t)} \Rightarrow \text{DG erfüllt}$$

Eindeutigkeit der Lsg: $y: I' \to J$ löse (A) $\Rightarrow$

$$\dot{y}(t) = g(t) \underbrace{h(y(t))}_{\neq 0} \Rightarrow \underbrace{\frac{\dot{y}(t)}{h(y(t))}}_{\frac{d}{dt}H(y(t))} = \underbrace{g(t)}_{G'(t)} \Rightarrow H(y(t)) = G(t) + c$$

$H(x_0) = 0 = G(0)$

$\Rightarrow c = 0$.

$\Rightarrow H(y(t)) = G(t) \underset{H \text{ inj.}}{\Rightarrow} y(t) = H^{-1}(G(t)) = x(t) \ \forall t \in I'$ ∎

Satz 10.1. ist ein lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz
(die Lsg ist evtl nur auf echtem $I' \subsetneq I$ def.)

<u>Zusatz</u>: Betrachte $\dot{x} = g(t)h(x)$ auf $I \times J$,
wobei $g \not\equiv 0$, $h(x_0) = 0$ für $x_0 \in J$.
$\Rightarrow x(t) = x_0 \ (t \in I)$ ist konstante Lsg der DG.
Umgekehrt: $x(t) = x_0$ sei konst. Lsg der DG $\Rightarrow h(x_0) = 0$
Denn: Sei $g(t_0) \neq 0 \Rightarrow 0 = \dot{x}(t_0) = g(t_0)h(x_0) \Rightarrow h(x_0) = 0$.
Also: $x(t) = x_0$ ist konstante Lsg $\Leftrightarrow h(x_0) = 0$.

<u>Bsp 1</u>: $\dot{x} = -\frac{x}{t}$. $g(t) := -\frac{1}{t}$, $h(x) := x$
$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ($\Rightarrow$ einzige Konst. Lsg $x \equiv 0$)
Untersuche AWP in einem der 4 offenen Quadranten, z.B.

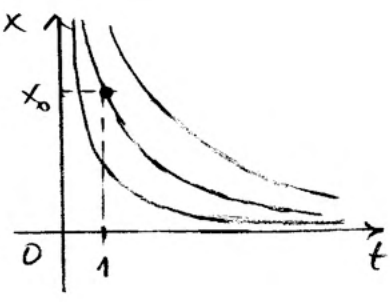
$$x(1) = x_0 > 0, \quad I = J = (0, \infty)$$

Trennung d. Variablen:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = -\int_{1}^{t} \frac{d\tau}{\tau} \Longleftrightarrow \ln|\xi| \Big|_{x_0}^{x} = -\ln|\tau| \Big|_{1}^{t}$$

$$\underset{x,t>0}{\Longleftrightarrow} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\ln t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{t} \quad \text{(Hyperbelschar)}$$



Die Lösungen haben maximales Definitionsintervall $(0, \infty)$

<u>Bsp 2</u>: $\dot{x} = tx^2$. $g(t) = t$ auf $I = \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$
Einzige Konst. Lsg: $x \equiv 0$.
Betrachte AWP: $x(0) = x_0 \neq 0$; $J = \begin{cases} (0, \infty), & \text{falls } x_0 > 0 \\ (-\infty, 0) & \text{"} \ x_0 < 0 \end{cases}$

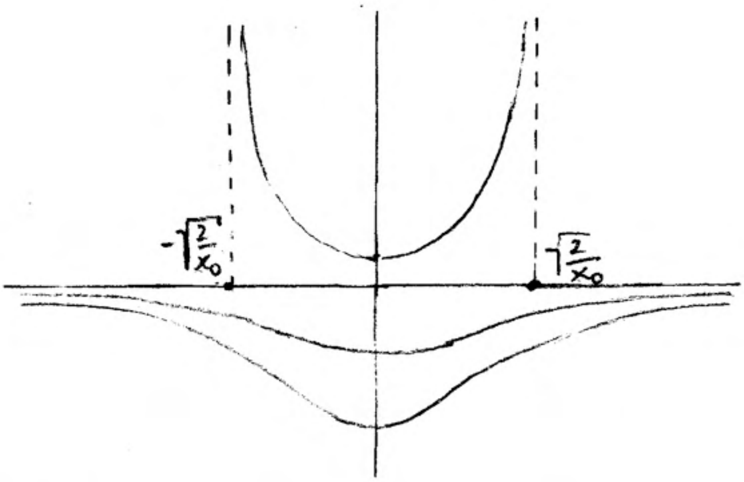
Trennung d. Variablen: $\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^2} = \int_0^t \tau \, d\tau \quad (x \in J,\ t \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{\xi}\Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}\tau^2\Big|_0^t \ \Leftrightarrow \ -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \ x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} - t^2}.$$

Max. Def. Intervall (muß 0 enthalten):

$$I_{max} = \begin{cases} \left(-\sqrt{\frac{2}{x_0}},\ \sqrt{\frac{2}{x_0}}\right) & \text{falls } x_0 > 0 \\ \mathbb{R} & \text{falls } x_0 < 0 \end{cases}$$



<u>Beachte</u>: obwohl die rechte Seite der DG auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und sehr einfach gebaut ist, sind die Lösungen im Fall $x_0 > 0$ nur auf einem endlichen Zeitintervall definiert. Es gilt

$$\lim_{t \to \pm\sqrt{\frac{2}{x_0}}} x(t) = +\infty \qquad \text{(die Lsg „explodiert" in endlicher Zeit)}$$

Im Fall $x_0 < 0$ dagegen gilt: $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$

(Die Lösung strebt der konstanten Lsg $x \equiv 0$ zu)

(2) Lineare DG 1. Ordnung

Eine (skalare) lin. DG 1. Ordnung ist eine DG der Form

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

mit stetigen Koeffizientenfkt $a, b : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall.
Sie heißt homogen, falls $b = 0$, ansonsten inhomogen.

Betrachte zunächst die homogene DG

(H) $\quad \dot{x} = a(t)x$

10.2. Satz Die Menge aller Lösungen von (H) ist geg. durch

$$L_H = \{x(t) = c \cdot e^{A(t)},\ c \in \mathbb{R}\}$$

wobei $A(t) = \int a(t)dt$ eine beliebige Stammfkt von a

Jede Lsg von (H) ist auf ganz I definiert.

Beachte: L_H ist 1-dim. $\mathbb{R}$-VR!

Beweis: $(e^A)^{\cdot} = ae^A \Rightarrow c \cdot e^A$ löst (H)

Umgekehrt: Sei $x : I' \to \mathbb{R}$ eine Lsg auf einem Intervall $I' \subseteq I$

$\Rightarrow (e^{-A}x)^{\cdot} = -ae^{-A}x + e^{-A}\dot{x} = 0$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: e^{-A(t)}x(t) = c \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{A(t)}$

Bsp: $\dot{x} = -\frac{x}{t}$, $t > 0$ (schon mit Trennung der Var. gelöst!)

Nun alternativ wie oben: $a(t) = -\frac{1}{t}$ auf $(0, \infty)$

Wähle $A(t) = -\ln t$

$\Rightarrow$ allg. Lsg auf $(0,\infty)$: $x(t) = c \cdot e^{-\ln t} = \frac{c}{t}$, $c \in \mathbb{R}$

Lsg auf $(-\infty, 0)$: $A(t) = -\ln|t| = -\ln(-t) \Rightarrow$

$$x(t) = c \cdot \underbrace{e^{-\ln(-t)}}_{-\frac{1}{t}} = \frac{c'}{t}, \quad c' \in \mathbb{R}.$$

Lösung der inhomogenen DG; Variation der Konstanten

(D) $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig

Ansatz für eine „partikuläre" (dh. einzelne) Lsg von (D):

Variation der Konstanten (Lagrange):

$x(t) = u(t)e^{A(t)}$ mit C^1-Fkt $u : I \to \mathbb{R}$ (A wie oben)

Bestimme u: Setze $\varphi(t) = e^{A(t)}$, $\dot{\varphi} = a\varphi$

$\Rightarrow \dot{x} = (u\varphi)^{\cdot} = \dot{u}\varphi + ua\varphi$

$\dot{x} = ax + b \iff \dot{u}\varphi + ua\varphi = au\varphi + b \iff \dot{u} = \varphi^{-1}b = e^{-A}b$

Also: Sei $u(t) = \int e^{-A(t)}b(t)\,dt$, $t \in I$ (bel. Stammfkt)

$\Longrightarrow x = u\varphi \in C^1(I)$ ist (partikuläre) Lsg von (D)

10.3. Satz Sei $x_p \in C^1(I)$ eine part. Lsg von (D)

(zu bestimmen z.B. mit Var. d. Konst. wie oben)

$\Rightarrow$ die Menge aller Lsgen von (D) ist geg. durch

$L = x_p + L_H = \{x_p + ce^{A(t)}, c \in \mathbb{R}\}$

L_H: Lsg-Raum von (H) $\dot{x} = a(t)x$

Alle Lsg sind auf ganz I def.; L ist 1-dim affiner Unterraum von $C^1(I)$.

Beweis: Für $x : I' \to \mathbb{R}$ ($I' \subseteq I$ Intervall) sind äquiv.:

$x = x_p + ce^A \iff x - x_p$ löst (H) auf $I' \iff$

$(x - x_p)^{\cdot} = a(x - x_p) \iff \dot{x} = \underbrace{\dot{x}_p - ax_p}_{=b} + ax = ax + b$ (auf I')

Rest klar ∎

Explizit mit $x_p = u\varphi = ue^A$ wie oben $\Rightarrow$

Die allg. Lsg von (D) ist

(*) $x(t) = (c + u(t))e^{A(t)}$, $c \in \mathbb{R}$; $u(t) = \int e^{-A(t)}b(t)\,dt$

10.4. Korollar Jedes AWP

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{mit } t_0 \in I$$

hat genau 1 Lsg $x \in C^1(I, \mathbb{R})$

Denn: $\exists!\, c \in \mathbb{R}$ so, dass in $(*)$ gilt: $x(t_0) = x_0$

Genauer: $x_0 \overset{!}{=} (u(t_0) + c)\, e^{A(t_0)} \iff c = e^{-A(t_0)} x_0 - u(t_0)$

Bsp: $\dot{x} = 2tx + t$

$a(t) = 2t,\ b(t) = t,\ I = \mathbb{R}$

(H) $\dot{x} = 2tx$

Allg. Lsg: $A(t) = t^2 \Rightarrow x_H(t) = c \cdot e^{t^2},\ c \in \mathbb{R}$

Variation d. Konstanten: $x_p(t) = u(t) e^{t^2}$ mit

$u(t) = \int e^{-t^2} t\, dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$

$\Rightarrow$ allg. Lsg der inhomogenen DG:

$x(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} + c\right) e^{t^2} = -\frac{1}{2} + c e^{t^2},\ c \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R})$

AWP: $x(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$.

10.5. Bernoullische DG

(B) $\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha$; $a, b: I \to \mathbb{R}$ stetig

$\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ (nichtlineare DG)

$x \equiv 0$ ist konstante Lsg.

Gesucht: Positive Lsg von (B)

Substitution: $y := x^{1-\alpha}$

$\Rightarrow x = y^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \dot{y}$

$\Rightarrow \dot{x} - ax - bx^\alpha = \frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\dot{y} - (1-\alpha)ay - (1-\alpha)y\right)$

Also: $x(t) > 0$ löst (B) $\iff y(t)$ löst

$\dot{y} = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t)$ Lineare DG!

Konkretes Bsp:

<u>Die Logistische DG</u> (vgl. Abschnitt 1)

$\dot{x} = (a - bx) \cdot x$, $a, b > 0$ konst. (Modelliert Wachstumsprozesse)

Gesucht: Lsg $x(t) > 0$

Die DG ist vom Typ (B) mit $\alpha = 2$

DG für $y = x^{-1}$: $\dot{y} = -ay + b$ $(*)$

Lsg der homogenen DG $\dot{y} = -ay$: $A(t) = -at \Rightarrow$

$$y_H(t) = c \cdot e^{-at}, \quad c \in \mathbb{R}$$

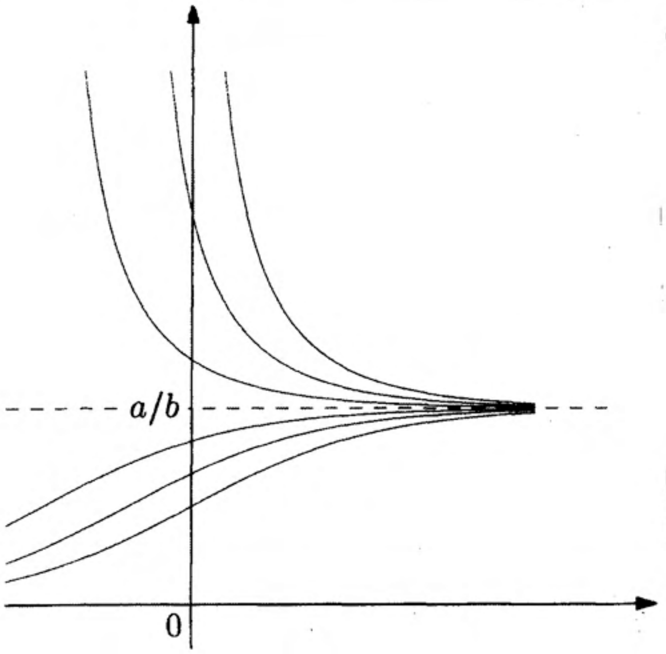
$\Rightarrow$ Allg. Lsg von $(*)$:

$$y(t) = \left(c + \int b e^{at} dt\right) \cdot e^{-at} = \frac{b}{a} + c e^{-at}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + c e^{-at}}$$

Lsg ist definiert + positiv auf

- ganz $\mathbb{R}$, falls $c \geq 0$
- $\left(-\frac{1}{a} \ln\left(-\frac{b}{ac}\right), \infty\right)$, falls $c < 0$



$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{a}{b}$$

$\uparrow$

„Gleichgewichtslösung"

$\frac{a}{b}$ ist konstante Lsg zu $c = 0$

Alle bisher betrachteten AWPs hatten eine eindeutige Lsg.
Das muß aber nicht immer so sein!

Kritisch z.B. bei separierbaren DG $\dot{x} = g(t) h(x)$:

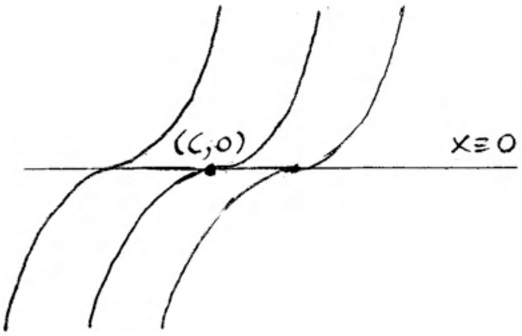
AWP der Form $x(t_0) = x_0$ wenn $h(x_0) = 0$ ($\to$ Konst. Lsg)

Bsp: $\dot{x} = \underbrace{|x|^{2/3}}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}}$ in $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (autonom)

Konst. Lsg: $x \equiv 0$

Ferner: $c \in \mathbb{R} \Rightarrow x_c(t) = \frac{1}{27}(t-c)^3$ löst die DG

denn: $\dot{x}_c(t) = \frac{1}{9}(t-c)^2 = |x_c(t)|^{2/3}$

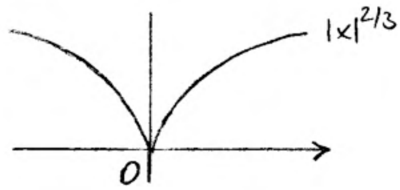


$x_c(c) = 0 \Rightarrow$ das AWP $x(c) = 0$ hat keine eind. Lsg! es hat sogar in jeder noch so kleinen Umgeb. von $(c,0)$ ∞ viele Lösungen (beachte $\dot{x}_c(c) = 0$!)

Man sagt: die Lösungen verzweigen sich in der Konst. Lsg $x \equiv 0$.

Beachte: das AWP mit $x(c) = 0$ ist nicht durch Trennung der Var. lösbar, da $g(0) = 0$ für $g(x) = |x|^{2/3}$.

Grund für die Verzweigung in 0: g ist in keiner Umgeb. von 0 Lipschitzstetig



Bem: Viele DGs (insbes. Systeme, DG höherer Ordnung) sind nicht explizit lösbar. Daher wichtig: Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit, max. Def.bereich von Lösungen, qualitative Eigenschaften von Lsgen (z.B. Langzeitverhalten) Dabei reicht oft das Studium von Systemen 1. Ordnung, da DG höherer Ordnung sich darauf reduzieren lassen:

4. DG höherer Ordnung: Reduktion auf Systeme 1. Ordnung

Skalare DG n-ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$):

$$(*) \quad x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

wo $F: G \to \mathbb{R}$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.

Gesucht: Lsg $x \in C^n(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall.

Übersetzung in ein System 1. Ordnung:

Hilfsvariable:
$$\left.\begin{aligned} y_1 &:= x \\ y_2 &:= \dot{x} \\ &\vdots \\ y_n &:= x^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(I) Sei $x \in C^n(I, \mathbb{R})$ Lsg von $(*)$ $\Rightarrow$ $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, und erfüllt System 1. Ordnung:

$$(**) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = F(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

kurz:

$\dot{y} = f(t, y)$ mit

$$f(t,y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

(II) Umgekehrt: Sei $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Lsg von $(**)$

$\Rightarrow$ $y_2 = \dot{y}_1$, $y_3 = \dot{y}_2 = \ddot{y}_1$, ..., $y_n = y_1^{(n-1)}$

$\Rightarrow$ $y_1 \in C^n(I, \mathbb{R})$, und $y_1^{(n)} = \dot{y}_n = F(t, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n-1)})$

d.h. y_1 löst $(*)$

Also: $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent

Übersetzung von AWPs:

$$y(t_0) = y_0 = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ \vdots \\ y_{0,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \iff x(t_0) = y_{0,1}, \ \dot{x}(t_0) = y_{0,2}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n}$$

Für DG n-ter Ordnung gibt man daher als Anfangswerte vor:

$$x(t_0),\ \dot{x}(t_0),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0).$$

<u>Bsp</u>: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (Schwing. gleichung)

AWP: $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$

Umformung in System: $y_1 := x$, $y_2 := \dot{x}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 y_1 \end{cases} \quad \text{mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}: \quad \dot{y} = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Betrachte das AWP (für System 1. Ordnung)

$$(A)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) & ; \quad f: G \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}, \ G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ offen} \\ x(t_0) = x_0 & \text{mit } (t_0, x_0) \in G \end{cases}$$

Stets: $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|.\|$.

<u>Umformulierung des AWP in Integralform:</u>

Sei $x: I \to \mathbb{R}^n$ stetig, wo $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit $t_0 \in I$ und $(t, x(t)) \in G \ \forall t \in I$. Dann gilt:

$$x \text{ löst (A) auf } I \iff x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall t \in I$$

(Dies folgt komponentenweise aus dem HDI) $\qquad$ ↑ $\mathbb{R}^n$-wertiges Integral

<u>Def.</u> (Lipschitz-Bedingung) Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.

$f: G \to \mathbb{R}^n$ heißt auf G <u>Lipschitz (-stetig) bzgl. x</u> $:\iff$

$\exists L > 0: \ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall (t,x), (t,y) \in G$

f heißt <u>lokal Lipschitz bzgl. x</u> $:\iff$ jedes $(t_0, x_0) \in G$ besitzt eine offene Umgeb. $U \subseteq G$, so dass $f|_U$ Lipschitz bzgl. x

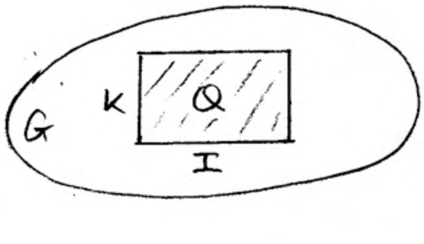
(die L-Konstante wird dabei von U abhängen)

<u>Wichtiges Kriterium:</u>

10.6. <u>Satz</u> f sei auf G stetig partiell diffbar bzgl. $x_1, \ldots, x_n$

$\Rightarrow$ f ist auf G lokal Lipschitz bzgl. x.

Genauer: f ist Lipschitz bzgl. x auf jedem Kompaktum $Q = I \times K \subseteq G$, $I \subseteq \mathbb{R}$ komp. Intervall, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ komp. + konvex



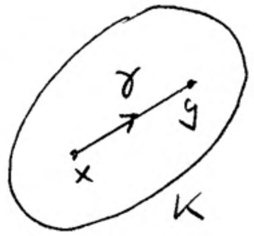
<u>Beweis:</u> $(t,x) \mapsto (\partial_{x_1} f(t,x), \ldots, \partial_{x_n} f(t,x)) =: \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ist nach Vorauss. stetig auf G.

Q kompakt $\Rightarrow \exists M > 0: \ \|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\| \le M \quad \forall (t,x) \in Q$

Dabei $\|.\|$ die von d. Norm auf $\mathbb{R}^n$ induz. Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$

(erfüllt $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$)



Fixiere $t \in I$, $x, y \in K$. Setze

$\varphi(s) := f(t, \underbrace{sy + (1-s)x}_{=: \gamma(s) \in K}), \ s \in [0,1]$; $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

$$\Rightarrow f(t,y) - f(t,x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \dot\varphi(s)\,ds \quad \text{(HDI komp. weise)}$$

$$\overset{\text{Kettenr.}}{=} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(s)) \cdot \dot\gamma(s)\,ds$$

Mit der Standardabschätzung f. $\mathbb{R}^n$-wertige Integrale folgt:

$$\|f(t,y) - f(t,x)\| \le \int_0^1 \underbrace{\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(s))\|}_{\le M} \cdot \|\underbrace{\dot\gamma(s)}_{= y-x}\|\,ds \le M\|y-x\| \quad \blacksquare$$

<u>Bsp</u>: <u>Lineare Systeme</u>

(*) $\quad \dot x = A(t)x + b(t)$, wobei

$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_1, \dots, b_n): I \to \mathbb{R}^n$ stetig,

$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall.

(äquivalent: alle Koeffizienten a_{ij} und alle b_i sind stetig)

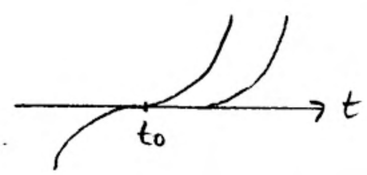
Einfachster Fall: Lin. System mit konstanten Koeffizienten:

$$\dot x = Ax + b; \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ b \in \mathbb{R}^n \text{ konst.}$$

In (*): $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ auf $I \times \mathbb{R}^n$; lokal Lipschitz bzgl. x nach Satz 10.6.

<u>Erinnerung</u>: $\dot x = |x|^{2/3}$, $x(t_0) = 0$

hat in jeder Umgeb. von t_0 ∞ viele Lösungen.



Beachte: $f(t,x) = |x|^{2/3}$ ist in keiner Umg. von $(t_0, 0)$ Lipschitz bzgl. x

10.7. <u>Eindeutigkeitssatz</u> ($G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen)

$f: G \to \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz bzgl. x. Seien $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von

$$\dot{x} = f(t, x)$$

auf einem Intervall I mit $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I$.

Zum Beweis benötigen wir:

10.8. <u>Lemma v. Gronwall</u>

Sei $g: I \to \mathbb{R}$ stetig, $g \geq 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Es gelte

(*) $g(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \right| \quad \forall t \in I$; mit $t_0 \in I$ und Konst. $a, b \geq 0$

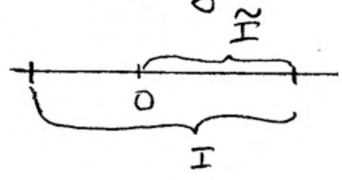
$\Rightarrow g(t) \leq a e^{b(t-t_0)} \quad \forall t \in I$.

Insbes., falls $a = 0$ in (*): $g \equiv 0$.

<u>Beweis</u>: o.E. $t_0 = 0$ (betrachte sonst $\tilde{g}(t) = g(t + t_0)$ auf $I - t_0$)

Wir zeigen die Beh. für $t > 0$; für $t < 0$ analog

$\tilde{I} := I \cap [0, \infty)$ (nichtent. Intervall)



$h(t) := a + b \int_0^t g(s)\, ds$, $t \in \tilde{I}$

$\Rightarrow h \in C^1(\tilde{I})$, $g \leq h$ auf $\tilde{I}$ nach Vorauss.

Auf $\tilde{I}$ gilt: $\quad \dot{h} = bg \leq bh \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(h e^{-bt}\right) = (\dot{h} - bh) e^{-bt} \leq 0$$

$\Rightarrow h e^{-bt}$ ist mon. fallend auf $\tilde{I}$

$\Rightarrow h(t) e^{-bt} \leq h(0) = a \quad \forall t \in \tilde{I}$

$\Rightarrow g(t) \leq h(t) \leq a e^{bt}$ auf $\tilde{I}$. ∎

Das Lemma v. Gronwall ist nützlich für Wachstumsabschätzungen von Lösungen von DGs.

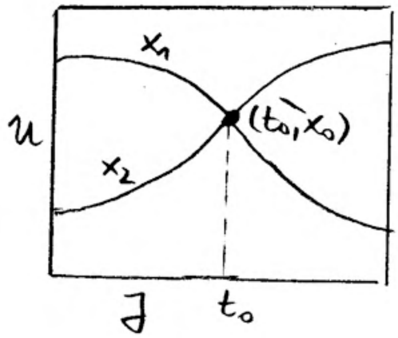
Beweis v. Satz 10.7.

1. Schritt: $\exists \varepsilon > 0$, so dass $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t \in I$ mit $|t-t_0| < \varepsilon$.

Dazu: Setze $x_0 := x_1(t_0) = x_2(t_0)$.

Sei $J \times U$ offene Umgeb. von (t_0, x_0) so, dass f Lipschitz bzgl. x auf $J \times U$ mit Konst. $L > 0$.

Dabei o.E. $J = \{t \in I : |t - t_0| < \varepsilon\}$



Ferner o.E. $x_i(t) \in U$ $\forall t \in J$ $(i = 1, 2)$ (verkleinere sonst ε)

$y := x_2 - x_1 \Rightarrow y(t_0) = 0$.

Zu zeigen: $y \equiv 0$ auf J

Integralversion des AWP $\Rightarrow$

$$\forall t \in J: \quad y(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f(\underbrace{s, x_2(s)}_{\in J \times U}) - f(\underbrace{s, x_1(s)}_{\in J \times U}) \Big)\, ds$$

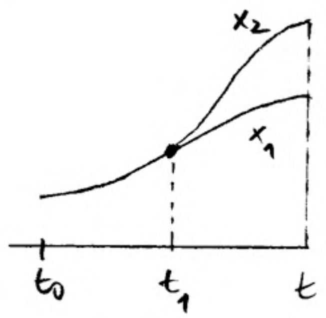
$$\Rightarrow \|y(t)\| \le \left| \int_{t_0}^{t} L \|x_2(s) - x_1(s)\|\, ds \right| = L \cdot \left| \int_{t_0}^{t} \|y(s)\|\, ds \right|$$

L.v. Gronwall mit $a = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ $\forall t \in J$.

2. Schritt: Beh: $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t \in I$ mit $t > t_0$

(analog für alle $t \in I$ mit $t < t_0$)

Beweis: Fixiere $t \in I$, $t > t_0$. $y := x_2 - x_1$



$t_1 := \sup\{\tau \in [t_0, t] : y(\tau) = 0\}$

y stetig $\Rightarrow y(t_1) = 0$

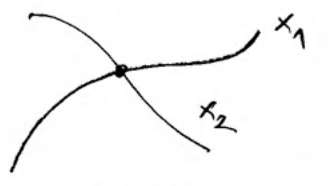
Angen. $t_1 < t \Rightarrow$ (1. Schritt für t_1 statt t_0)

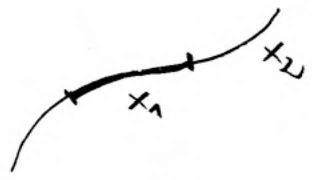
$\exists \delta > 0$ mit $t_1 + \delta < t$ und $y(t_1 + \delta) = 0$,

im Widerspruch zur Def. von t_1

Also folgt $t_1 = t \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$ ∎

Konsequenz: In der Situation des Eind.heitssatzes können sich 2 Lsgen x_1, x_2 nicht schneiden, es sei denn, sie sind identisch, oder eine ist Fortsetzung der anderen.





$x_2: I_2 \to \mathbb{R}^n$ Fortsetzung von $x_1: I_1 \to \mathbb{R}^n$:$\Leftrightarrow$ $I_1 \subseteq I_2$ und $x_2|_{I_1} = x_1$.

Nun: Zur Existenz einer Lsg des AWP

$$\dot{x} = f(t,x); \quad x(t_0) = x_0; \qquad f: G \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}, \; G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ offen}, (t_0, x_0) \in G$$

Äquivalente Integralform:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

Grundidee: Fasse dies als Fixpktgleichung für die Fkt x (als Element eines geeigneten vollst. metrischen Raums) auf.
Dann: Banachscher Fixpunktsatz!

10.9. Lemma $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall $\Rightarrow$

$$X = C(I, \mathbb{R}^n) = \{u : I \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}\}$$

ist Banachraum mit Norm $\|u\|_\infty := \sup_{t \in I} \|u(t)\|$ ($< \infty$, da I komp.)

Konvergenz in X: $u_k \xrightarrow[\|.\|_\infty]{} u \Leftrightarrow u_k \to u$ glm. auf I
$\Leftrightarrow$ alle Komponenten von u_k konv. glm. gegen die von u.

Beweis: Sei $(u_k) \subseteq X$ Cauchyfolge bzgl. $\|.\|_\infty \Rightarrow$
$\forall t \in I$ ist $(u_k(t))_k$ ist Cauchyf. in $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, also konvergent:

$$u_k(t) \to u(t), \quad u: I \to \mathbb{R}^n$$

Sogar $u_k \to u$ glm. auf I, denn: Sei $\|u_k - u_m\|_\infty < \varepsilon \; \forall k, m \geq n_0$

$\Rightarrow \|u_k(t)-u(t)\| = \lim_{m\to\infty}\|u_k(t)-u_m(t)\| < \varepsilon \;\; \forall k \geq n_0$ und $\forall t \in I$

$\Rightarrow \|u_k - u\|_\infty \to 0$. Also auch u stetig ■

(Bem: Der Beweis ist wörtlich wie für $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ in Kap. 4, nur mit $\|.\|$ statt $|.|$)

Zentraler Satz dieses Abschnitts:

10.10. <u>Satz v. Picard-Lindelöf</u> (<u>lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz</u>)

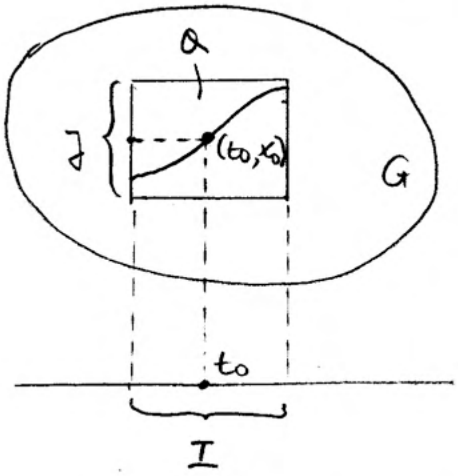
Sei $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig + lokal Lipschitz bzgl. x

$\Rightarrow$ zu jedem $(t_0,x_0)\in G$ exist. ein offenes Intervall $I_\delta(t_0) = (t_0-\delta, t_0+\delta)$, so dass das AWP

$$(A) \quad \dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

genau 1 Lsg auf $I_\delta(t_0)$ besitzt.

<u>Genauer</u>: Wähle kompakten Quader $Q = I\times J \subseteq G$ um (t_0,x_0), $I = \overline{I_\delta(t_0)}$, $J = \overline{B_r(x_0)} = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-x_0\| \leq r\}$, so dass $f|_Q$ Lipschitz bzgl. x mit Konst. $L>0$;



dabei sei $\delta>0$ so klein, dass $\delta L < 1$ und $\delta\cdot\underbrace{\|f\|_{\infty,Q}}_{=\sup_{(t,x)\in Q}\|f(t,x)\|} \leq r$

$\Rightarrow$ (A) hat auf I genau 1 Lsg. Diese verläuft in J und ist gleichmäßiger Limes der Folge der „Picard-Iterierten"

$$x_0(t) := x_0\,; \qquad x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_k(s))\,ds, \quad t\in I \quad (k\in\mathbb{N}_0)$$

Beweis: Wegen Eind.heitssatz ist nur noch der Existenzteil zu zeigen.

$\mathcal{M} := C(I, J) = \{u \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|u(t) - x_0\| \leq r \ \forall t \in I\}$

1. Picard-Operator: Für $u \in \mathcal{M}$ def. $Pu : I \to \mathbb{R}^n$ durch

   $Pu(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$, $t \in I$. $Pu \in C(I, \mathbb{R}^n)$ (HDI)

   Beobachte: $Pu = u \iff u$ löst das AWP (A).

2. $u \in \mathcal{M} \Rightarrow Pu \in \mathcal{M}$, denn: $t \in I \Rightarrow$

   $\|Pu(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\underbrace{s, u(s)}_{\in Q})\|\, ds \right| \underset{|t - t_0| \leq \delta}{\leq} \delta \cdot \|f\|_{\infty, Q} \leq r$

3. $\mathcal{M}$ ist vollständiger metr. Raum mit $d(u,v) = \|u - v\|_\infty$, denn:
   $\mathcal{M} = \{u \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|u - x_0\|_\infty \leq r\} \Rightarrow \mathcal{M}$ ist abgeschl. Teilmenge des BR $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$, also vollst. nach Satz 4.17.
   (Achtung: $\mathcal{M}$ ist kein Vektorraum!)

4. $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ist Kontraktion, denn:

   $$u, v \in \mathcal{M} \Rightarrow \|Pu - Pv\|_\infty = \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\, ds \right\|$$
   $$\leq \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|}_{\leq L \|u(s) - v(s)\|}\, ds \right|$$
   $$\leq \underbrace{\delta L}_{< 1} \cdot \|u - v\|_\infty$$

5. Banachscher Fixpktsatz $\Rightarrow \exists!\, x \in \mathcal{M}$ mit $Px = x$.
   x löst (A) und hat die angeg. Eigenschaften ($x_{k+1} = Px_k$!) ∎

Bsp: $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Picard-Iterierte: $x_0(t) = x_0$; $x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t x_k(s)\, ds$

$x_1(t) = x_0 + \int_0^t x_0\, ds = x_0(1 + t)$

$x_2(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1 + s)\, ds = x_0\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right)$.

Induktion $\Rightarrow$ $x_k(t) = x_0\left(1 + t + \ldots + \frac{t^k}{k!}\right) \to x_0 e^t$ (eind. Lsg des AWP)

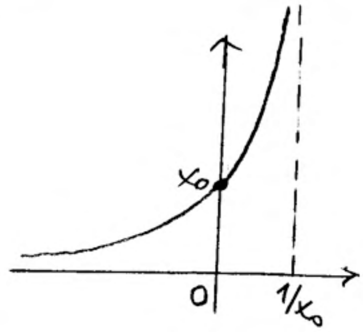
Hier: (punktweise) Konv. $\forall t \in \mathbb{R}$

__Beachte:__ Selbst wenn die rechte Seite von $\dot{x} = f(t,x)$ auf ganz $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ def. und überall lokal Lipschitz bzgl. x ist, sind die Lsg eines AWP evtl. nur in einer kleinen Umgeb. von t_0 def.!

__Bsp:__ $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Separation $\Rightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \quad \text{auf } \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right)$$

Die Lsg explodiert für $t \uparrow \frac{1}{x_0}$



(vgl. auch Bsp 2, S.125)

Bei Verzicht auf (lokale) L-Bed. hat man zumindest noch einen lokalen Existenzsatz:

10.11. __Satz v. Peano__ (ohne Beweis, siehe z.B. Aulbach, Gew. DG)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f: G \to \mathbb{R}^n$ __stetig__

$\Rightarrow$ Jedes AWP $\quad \dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$

besitzt eine Lsg auf einem offenen Intervall um t_0

Aber: die Lsg ist nicht notwendig eindeutig,

Bsp: $\dot{x} = |x|^{2/3}$ ($\rightarrow$ Verzweigungen)

__Zu DG höherer Ordnung:__

(*) $\quad x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$, $n \in \mathbb{N}$.

$F: G \to \mathbb{R}$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen.

Äquiv. System: $\quad \dot{y} = f(t,y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t,y) \end{pmatrix}$; $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Man sieht: f (lokal) Lipschitz bzgl. y $\Longleftrightarrow$

F " " " "

$\Rightarrow$ der Eindeutigkeitssatz und Picard-Lindelöf übertragen sich auf AWP zu (*).

<u>Bsp</u>: $\ddot{x} + \underbrace{\omega^2 x}_{= -F(t,x,\dot{x})} = 0$, $\omega > 0$

Bekannte Lsgen: $x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

AWP: $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b \Rightarrow x(t) = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t)$

Diese Lsg ist eindeutig nach Eind. Satz, da $F(t, y_1, y_2) = -\omega^2 y_1$ (global) Lipschitz bzgl. $y = (y_1, y_2)$.

Maximale Lösungen

Betrachte das AWP

$$(A) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} ; \quad f: G \to \mathbb{R}^n \text{ stetig + lokal Lipschitz bzgl. } x$$

<u>Def.</u> Eine Lsg $x: I \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>maximal</u>, falls sie keine echte Fortsetzung besitzt
(Dabei sind Lsgen stets auf Intervallen def.)

10.12. <u>Satz</u> Das AWP (A) besitzt genau 1 maximale Lsg $x: I_{max} \to \mathbb{R}^n$.
Das max. Definitionsintervall I_{max} ist offen.

<u>Beweis:</u> $I := \bigcup \{ J \text{ Intervall um } t_0 : (A) \text{ hat Lsg } x_J : J \to \mathbb{R}^n \}$

$I \neq \emptyset$ nach Picard-Lindelöf, I (nichtentartetes) Intervall um t_0

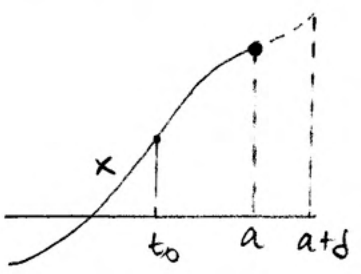
Def: $x: I \to \mathbb{R}^n$, $x(t) := x_J(t)$ falls $t \in J$

x wohldef. nach Eindeutigkeitssatz, denn:

$t \in J \cap \tilde{J} \Rightarrow x_J(t) = x_{\tilde{J}}(t)$

x löst (A): klar. Also ist I max. Definitionsintervall.

I offen: angenommen nein. Sei etwa der rechte Randpkt $a \in I$,



Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ das AWP

$\dot y = f(t,y)$, $y(a) = x(a)$

hat eine Lsg auf einem Intervall

$(a-\delta, a+\delta)$, die (wegen Eind. Satz) x echt

fortsetzt $\lightning$ ■

Unter geeigneten Voraussetzungen an f (stärker als in Picard-L.) sind alle max. Lsgen global definiert:

10.13 <u>Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz</u>

Sei $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall) stetig.

f genüge für jedes kompakte Teilintervall $J \subseteq I$ einer (globalen) Lipschitzbed. auf $J \times \mathbb{R}^n$:

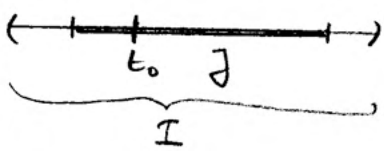
$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x-y\| \quad \forall t \in J,\ x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Jedes AWP $\dot x = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ mit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

hat eine eindeutige, auf ganz I definierte Lösung

(dh. jede max. Lsg ist global definiert)

<u>Beweis:</u> Nach Aufg. 3, T-Blatt 15 hat das AWP $x(t_0) = x_0$ auf jedem komp. Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ eine (eind.) Lsg $\Rightarrow$ die max. Lsg ist auf ganz I def. ■



<u>Bsp 1</u> $\dot x = t|x|$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$J \subseteq \mathbb{R}$ komp. $\Rightarrow |f(t,x) - f(t,y)| = |t| \cdot \big||x| - |y|\big| \le \underbrace{\max_{t \in J} |t|}_{<\infty} \cdot |x-y|$

$\xRightarrow[\text{E+E-Satz}]{\text{globaler}}$ jedes AWP hat eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ def. Lsg.

Bem: Manchmal betrachtet man DG mit $\mathbb{C}$-wertiger rechter Seite und sucht $\mathbb{C}$-wertige Lösungen:

$\dot{x} = f(t,x)$, $f: G \to \mathbb{C}^n$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ offen

Gesucht: Lsg $x \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ auf Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$

Dabei $C^1(I,\mathbb{C}^n) = \{x : I \to \mathbb{C}^n \text{ stetig diffbar}\}$, wo

$x: I \to \mathbb{C}^n$ diffbar in $t \in I$:$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \dot{x}(t)$ exist. in $\mathbb{C}^n$ ($\Leftrightarrow$ alle Komponenten von x sind diffbar in t)

Alle bisherigen Sätze gelten entsprechend, mit ident. Beweis.

§ 11 Lineare Differentialgleichungen

Hier: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}^n$ mit Norm $\|.\|$, $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit der induz. Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

1. Die Struktur des Lösungsraums

Seien $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $b = (b_1, .., b_n) : I \to \mathbb{K}^n$ stetig, $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall (äquivalent: alle a_{ij} und b_i sind stetig)

Lineares System mit Koeff.matrix A und Inhomogenität b:

$$(*) \qquad \dot{x} = A(t)x + b(t)$$

$(*)$ homogen $\Leftrightarrow b \equiv 0$; sonst inhomogen

Falls A = konst: Lineares System mit konst. Koeffizienten

11.1. Existenz- und Eindeutigkeitssatz f. lineare Systeme

Jedes AWP zu $(*)$ mit $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$, $t_0 \in I$ hat eine eindeutige, auf ganz I definierte Lsg $x \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Beweis: mit globalem E+E-Satz.

$f(t,x) = A(t)x + b(t)$ auf $I \times \mathbb{K}^n$ ist stetig und global Lipschitz bzgl. x auf jedem $J \times \mathbb{K}^n$, $J \subseteq I$ kompaktes Intervall.

Denn: $t \in J \Rightarrow$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le \|A(t)\| \cdot \|x-y\| \le L\|x-y\|, \text{ mit}$$

$$L = \max_{t\in J} \underbrace{\|A(t)\|}_{\text{stetig}} < \infty$$

■

Betrachte neben $(*)$ das homogene System

$$(H) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

$L_H := \{x \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : x \text{ löst } (H)\}$ offenbar $\mathbb{K}$-VR

11.2. Satz (1) $\dim L_H = n$

(2) Für Lösungen $x_1, \dots, x_k \in L_H$ sind äquivalent:

(i) $x_1, \dots, x_k$ sind linear unabhängig (als Fkt auf I)

(ii) $\forall t \in I$ sind $x_1(t), \dots, x_k(t)$ lin. unabh. in $\mathbb{K}^n$

(iii) $\exists t_0 \in I$: $x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$ sind lin. unabhängig

(3) Sei $x_p : I \to \mathbb{K}^n$ eine beliebige partikuläre Lsg von (*)
(Existenz nach Satz 11.1.) $\Longrightarrow$
Die Menge L der Lösungen von (*) ist geg. durch

$$L = x_p + L_H = \{x_p + x : x \in L_H\}$$

Der Lösungsraum L von (*) ist also affiner Unterraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ der Dimension n.

Beweis: (1) zu $t_0 \in I$ betrachte die AOB.

$$\phi_{t_0} : L_H \to \mathbb{K}^n, \quad \phi_{t_0}(x) := x(t_0)$$

ϕ_{t_0} ist VR-Homomorphismus: $\phi_{t_0}(c_1 x + c_2 y) = c_1 x(t_0) + c_2 y(t_0)$

$$= c_1 \phi_{t_0}(x) + c_2 \phi_{t_0}(y)$$

„Anfangswerthomomorphismus"

E+E-Satz 11.1. $\Longrightarrow$ ϕ_{t_0} ist bijektiv

$\Longrightarrow$ ϕ_{t_0} Isomorphismus $\Longrightarrow$ $\dim L_H = \dim \mathbb{K}^n = n$

(2) Jedes ϕ_t ist Isomorphismus, führt also lin. unabhängige Tupel $x_1, \dots, x_k \in L_H$ in lin. unabh. Tupel $x_1(t), \dots, x_k(t)$ über, und umgekehrt.

(3) $x \in L \iff \dot{x} = Ax + b \iff \dot{x} - \dot{x}_p = Ax + b - (Ax_p + b)$

$$\iff (x - x_p)' = A(x - x_p) \qquad [A = A(t),\ b = b(t)]$$

$$\iff x - x_p \in L_H \qquad \blacksquare$$

Def. Seien $x_1, \dots, x_n : I \to \mathbb{K}^n$ Lsgen der homogenen DG

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)\, x$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{X} := (x_1, \dots, x_n) : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt eine Lösungsmatrix von (H)

Eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ von L_H heißt ein <u>(Lösungs-) Fundamentalsystem</u> von (H). Die matrixwertige AGB.

$\mathbb{X} = (x_1, \dots, x_n) : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt dann eine <u>Fundamentalmatrix</u> von (H)

<u>Beobachtungen:</u> Sei $\mathbb{X} = (x_1, \dots, x_n)$ Lsg-Matrix von (H) $\Rightarrow$

(1) $\dot{\mathbb{X}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = (A(t)x_1(t), \dots, A(t)x_n(t)) = A(t)\mathbb{X}(t)$

(2) $\mathbb{X}$ ist F-Matrix $\underset{\text{Satz 11.2.}}{\Longleftrightarrow}$ $\det \mathbb{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$\Longleftrightarrow \quad \exists t_0 \in I : \det \mathbb{X}(t_0) \neq 0$

(3) Sei $\mathbb{X}$ F-Matrix $\Rightarrow$ die allg. Lsg von (H) ist geg. durch

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = \mathbb{X}(t) \cdot c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Ein AWP $x(t_0) = x_0$ legt c eindeutig fest:

$$c = \mathbb{X}(t_0)^{-1} x_0 .$$

<u>Bsp:</u> $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} x, \quad \omega \in \mathbb{R}$; explizit: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega x_1 \end{cases}$

$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}, \; y(t) = \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$ sind Lsgen.

Lsg-Matrix dazu: $\mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$

$\det \mathbb{X}(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x, y\}$ ist F-System.

Bestimmung einer partikulären Lsg der inhomogenen DG

$$(D) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t) \qquad \text{(auf Intervall } I\text{)}$$

Ansatz (Variation d. Konstanten) $\quad x(t) = X(t)\cdot u(t)$

X: F-Matrix von (H), $\quad u \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ gesucht

Einsetzen in (D): $\quad \underbrace{\dot{X}u}_{= AXu} + X\dot{u} = \dot{x} \overset{!}{=} Ax + b = AXu + b$

$\iff \dot{u} = X^{-1}b. \qquad$ Also:

11.3. Satz $\quad$ Sei $X: I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ F-Matrix von $\dot{x} = A(t)x \Rightarrow$

$x_p(t) = X(t)u(t)$ mit $u(t) = \int X(t)^{-1}b(t)\,dt \quad$ (komp. weise Stammfkt)

ist partikulare Lsg von (D)

2. Homogene lineare Systeme mit konst. Koeffizienten

Bauart: $\quad \dot{x} = Ax, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konst.

Falls $n = 1$: $\quad x(t) = c\cdot e^{At}, \ t \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{K}$.

Hat höherdim. Verallgemeinerung! Dazu:

Die Matrix-Exponentialfunktion

Erinnerung (Blatt 10): Sei X BR, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert in X.

Eine Reihe $\sum_1^{\infty} x_n$ in X mit $\sum_1^{\infty} \|x_n\| < \infty$ heißt absolut konv.

Hier: $X = \mathbb{K}^{n\times n}$ mit der von $(\mathbb{K}^n, \|.\|)$ induz. Operatornorm $\|.\|$

Bem: Zu $\|.\|_\infty$ auf $\mathbb{K}^n$: $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (A = (a_{ij}))$

Da alle Normen auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ äquiv., folgt:

$$\|A_k - A\| \to 0 \iff \|A_k - A\|_\infty \to 0 \iff a_{k,ij} \to a_{ij} \quad \forall i,j.$$

<u>Cauchy-Produkt</u>: Seien $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ absolut konv. in $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} A_j B_{k-j}\right), \text{ auch absolut konv.}$$

Beweis: wie für Reihen in $\mathbb{C}$.

11.4. <u>Satz</u> (<u>Matrixexponentialfkt</u>)

(1) $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergiert (sogar absolut) im $\mathbb{K}^{n\times n}$ $(A^0 = I)$

(2) $e^A e^B = e^{A+B}$ <u>sofern</u> $AB = BA$

(3) $e^A \in GL(n,\mathbb{R})$; $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

<u>Beweis</u>: (1) $\sum_0^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \le \sum_0^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty$

(2) $$e^A e^B = \left(\sum_0^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_0^{\infty}\frac{B^k}{k!}\right) \underset{CP}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{A^j}{j!}\frac{B^{k-j}}{(k-j)!}\right) \underset{\substack{AB=BA\\ +\text{binom. Satz}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k = e^{A+B}.$$

(3) $e^A \cdot e^{-A} \underset{(2)}{=} e^{A+(-A)} = e^0 = I \Rightarrow$ Beh ∎

<u>Bsp</u>: 1. $A = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \Rightarrow e^A = (e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})$

2. $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow AB \ne BA$, $e^A e^B \ne e^{A+B}$.

Betrachte nun

$$(*) \quad \dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

11.5. <u>Satz</u> (1) Das AWP zu $(*)$ mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$ hat die (eindeutige) Lsg

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) $\{v_1,\dots,v_n\}$ Basis des $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow \{e^{tA}v_1,\dots,e^{tA}v_n\}$ ist F-System von $(*)$

Insbes: $X(t) = e^{tA}$ ist F-Matrix von (*)

Beweis: (1) $x(0) = e^0 x_0 = x_0$; ferner:

$$\frac{1}{h}(x(t+h) - x(t)) = \frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA})x_0 = \frac{1}{h}(e^{hA} - I)\underbrace{e^{tA}x_0}_{x(t)}$$

$\frac{1}{h}(e^{hA} - I) \to A$ (in Op. Norm) für $h \to 0$, denn

$$\|\frac{1}{h}\underbrace{(e^{hA} - I)}_{hA + \frac{h^2}{2}A^2 + \dots} - A\| = \frac{1}{|h|}\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^k A^k}{k!}\| \leq |h|\|A\|^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^k\|A\|^k}{(k+2)!}}_{\leq e^{|h|\|A\|}}$$

$\to 0$ für $h \to 0$

$\Rightarrow$ x diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ∎

(2) $v_i \in \mathbb{K}^n \Rightarrow e^{tA}v_i$ ist Lsg von (*) Rest aus Satz 11.1. ∎

Bem: Das AWP $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0$ $(t_0 \in \mathbb{R})$
hat die eind. Lsg $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$

Berechnung von e^{tA} über Exp-Reihe i. A. schwierig.
Nützlich: Jordansche Normalform (→ Ana 3)

Einfacher Fall: Sei v Eigenvektor (EV) von A zum EW $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow e^{tA}v = e^{\lambda t}v \qquad (\text{da } A^k v = \lambda^k v \ \forall k)$$

Damit:

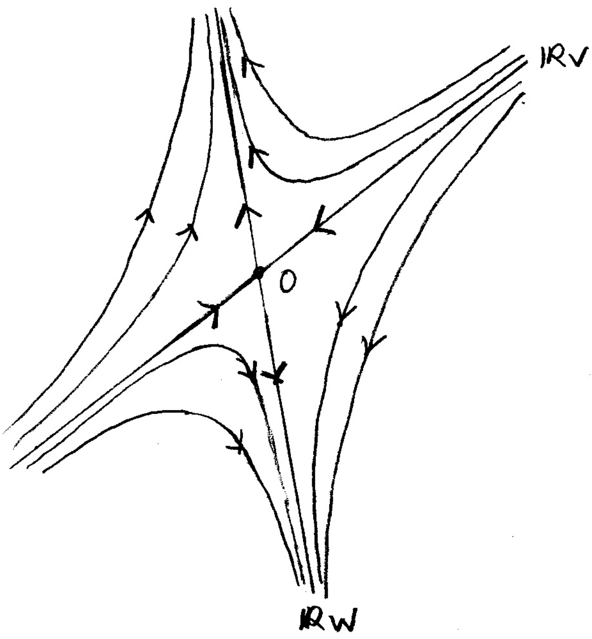
11.6. Satz Sei A diagonalisierbar, d.h. $\exists$ Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{K}^n$ bestehend aus EV von A mit $Av_i = \lambda_i v_i$ $\Rightarrow$
$\{e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, e^{\lambda_n t}v_n\}$ ist F-System von $\dot{x} = Ax$

Bsp: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ habe 2 reelle EW $\lambda \neq \mu$. EV dazu: v, w
$\Rightarrow$ allgemeine Lsg von $\dot{x} = Ax$:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t}v + c_2 e^{\mu t}w, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Verlauf der Lsgen im $\mathbb{R}^2$
(sog. Phasenporträt)

im Fall $\lambda < 0 < \mu$:



0 ist konst. Lsg
(sog. Gleichgewichts-
Lsg)

Mehr zu linearen DG: Analysis 3

FINIS!