Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 10

Aufgabe T1. Sei $U = (0,\infty) \times (0,\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$. Begründen Sie, dass f auf ganz U differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe T2. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2$. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(1,2,1)$ und berechnen Sie in diesem Punkt die Richtungsableitung von f in diese Richtung.

Aufgabe T3. Zeigen Sie: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\|x\|_2^2/4t}$$

löst die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta f - \partial_t f = 0.$$

f ist (bis auf einen Normierungsfaktor) der sogenannte *Wärmeleitungskern*. Skizzieren Sie für verschiedene Werte von t die Funktion $g_t(r) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-r^2/4t}$.

Aufgabe T4. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *homogen vom Grad* $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$f(tx) = t^\lambda f(x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Geben Sie Beispiele von Funktionen in 2 Variablen, die homogen vom Grad 3 bzw. $\frac{1}{2}$ sind.

(b) Beweisen Sie für eine differenzierbare, vom Grad λ homogene Funktion f die *Eulersche Identität*

$$f'(x) \cdot x = \lambda f(x).$$

Hinweis: Kettenregel.