Aufgaben für die Tutorien: Blatt 12

Aufgabe T1.

(a) (*Majorantenkriterium in Banachräumen.*) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

konvergiert in X.

(b) Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit einer Operatornorm $\|\cdot\|$ versehen. Zeigen Sie: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$ ist $I - A$ invertierbar, und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad \text{(Neumannsche Reihe).}$$

Aufgabe T2. (*Die Jacobi-Transformation*)
Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} x(1-y) \\ xy \end{pmatrix}.$$

(a) Begründen Sie, dass f stetig differenzierbar ist, und geben Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x,y)$ an.

(b) Beweisen Sie, dass f den Streifen $(0,\infty)\times(0,1)$ diffeomorph auf den Quadranten $(0,\infty)\times(0,\infty)$ abbildet. Worauf wird das Quadrat $(0,1)\times(0,1)$ abgebildet?

Aufgabe T3. Zeigen Sie: Eine bilineare Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ ist stetig differenzierbar mit

$$D\beta(x,y)(h,h') = \beta(x,h') + \beta(h,y), \quad (h,h') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$