Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks

Analysis 2

SS 2021

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 13

Aufgabe T1. (*Höhenlinien*) Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Begründen Sie, dass jede Niveaumenge von f in der Nähe einer Stelle $(a,b) \in U$ mit $\nabla f(a,b) \neq 0$ sich lokal als Funktionsgraph darstellen lässt.

Aufgabe T2. Wir betrachten die Gleichung

$$f(x,y) := x^3 - 3x + y + e^y + 1 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie (ohne Verwendung des Satzes über implizite Funktionen), dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x,y) = 0$. Dies liefert also eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Auflösung $y = g(x)$.

(b) Begründen Sie unter Heranziehen des Satzes über implizite Funktionen, dass die Auflösung $y = g(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, und diskutieren Sie ihre Extrema.

Aufgabe T3. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x + y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.