

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 14

Aufgabe T1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} + x \cos t = \sin t \cos t.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $x(0) = 1$.

Aufgabe T2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1+t)\dot{x} = 1+x^2, \quad x(0) = x_0$$

und ihren maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von $x_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe T3. Eine *Ähnlichkeits-Differentialgleichung* ist eine Differentialgleichung der Bauart

$$(*) \quad \dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right); \quad t \neq 0.$$

Zeigen Sie:

- (a) Streckungen mit Zentrum $(0, 0)$ führen Lösungen in Lösungen über, d.h. mit $x(t)$ ist auch die Funktion $x_a(t) = a \cdot x\left(\frac{t}{a}\right)$ für jeden Faktor $a \neq 0$ eine Lösung von $(*)$.
- (b) Ist $x(t)$ eine Lösung von $(*)$, so genügt $y(t) := x(t)/t$ einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $t\dot{x} = x \ln x - x \ln t$, $x(1) = 1$.