Aufgaben für die Tutorien: Blatt 15

Aufgabe T1.

(a) Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} \,=\, xe^{tx}\,, \quad x(0) = 1$$

eine eindeutige (lokale) Lösung auf einem offenen Intervall I um 0 besitzt. Zeigen Sie ferner für diese Lösung: $x(t) > 0$ für alle $t \in I$.

(b) Beweisen Sie, dass jedes Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$\dot{x} = t\sin(tx)$$

eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

Aufgabe T2. Kontrolle der Lösungen. Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f \in C(G,\mathbb{R}^n)$, $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen; dabei sei f (global) Lipschitz auf G bzgl. x mit Lipschitzkonstante $L > 0$.

Beweisen Sie: Sind x, y zwei auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ definierte Lösungen dieser DG, so gilt

$$\|x(t) - y(t)\| \,\leq\, \|x(t_0) - y(t_0)\| \cdot e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } \; t \in [t_0, t_1].$$

Tip: Integralform von Lösungen und Lemma von Gronwall.

Aufgabe T3. Ein Existenz- und Eindeutigkeitslemma. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und (global) Lipschitz bzgl. x mit

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \,\leq\, L\|x-y\| \quad \forall t \in I,\, \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Beweisen Sie: Jedes Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{ mit } \; t_0 \in I,\, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

besitzt eine eindeutige, auf ganz I definierte Lösung.

Anleitung: Ohne Einschränkung kann man $t_0 = 0$ annehmen. Der Picard-Operator ist auf ganz $C(I,\mathbb{R}^n)$ definiert und wird kontrahierend, wenn man $C(I,\mathbb{R}^n)$ mit einer gewichteten Supremumsnorm der Form

$$\|u\|_* := \max_{t\in I} \|u(t)e^{-\alpha|t|}\|$$

mit einer geeigneten Konstanten $\alpha > 0$ versieht.