Aufgaben für die Tutorien: Blatt 4

Aufgabe T1. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \ln x$ in $a = \frac{1}{2}$ und untersuchen Sie, in welchem Bereich die Reihe konvergiert.

Aufgabe T2. Finden Sie eine möglichst große Konstante $m > 0$ und eine möglichst kleine Konstante $M > 0$, so dass

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}).$$

Begründen Sie, dass die von Ihnen bestimmten Konstanten optimal sind.

Aufgabe T3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie: Die Taylorreihe $Tf(x; 0)$ konvergiert für kein $x > 0$ gegen $f(x)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Die Ableitung der Funktion $g(x) = p(1/x)e^{-1/x}$ mit $x \neq 0$ und einem Polynom p ist wieder von der Form $g'(x) = q(1/x)e^{-1/x}$ mit einem Polynom q.

Aufgabe T4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen offen, abgeschlossen oder keines von beidem sind und beweisen Sie dies ($\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Norm).

(a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

(b) $[0, 2) \times [0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$