Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 5

Aufgabe T1. (*Produktmetrik*) Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume. Zeigen Sie, dass auf $X := X_1 \times X_2$ durch

$$d(x, y) := \max\bigl(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\bigr)$$

eine Metrik definiert ist.

Aufgabe T2. (*Die Abstandsfunktion*) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Der Abstand eines Punktes $x \in X$ von A ist definiert als

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ für alle $x, y \in X$.
(b) Die Funktion $x \mapsto d(x, A)$ ist Lipschitz-stetig auf X mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

Aufgabe T3. Zeigen Sie für Teilmengen A, B eines metrischen Raums X:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(b) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
(c) Gilt auch $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
(d) Bestimmen Sie $\overline{A}$, $\mathring{A}$ und ∂A für:

   (i) $A = [-1, 0) \cup (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$,
   (ii) $A = \mathbb{Q} \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$.

   ($\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Norm.)

Aufgabe T4. Es sei X eine Menge, versehen mit der diskreten Metrik d. Bestimmen Sie die offenen Kugeln in X und zeigen Sie, dass alle Teilmengen von X offen sind.