Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 6

Aufgabe T1. Beweisen Sie den Satz von der globalen Stetigkeit aus der Vorlesung:
Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig auf X.

(b) $V \subseteq Y$ offen $\implies$ $f^{-1}(V)$ offen in X.

(c) $A \subseteq Y$ abgeschlossen $\implies$ $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Aufgabe T2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie: Die durch den Graphen von f definierte Menge

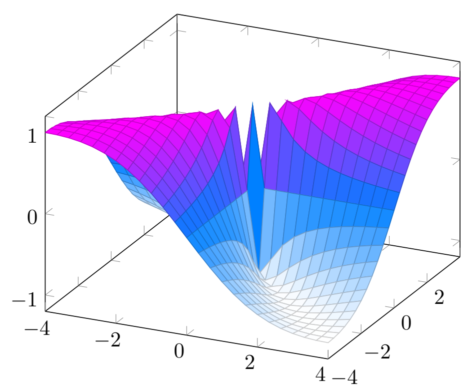
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le f(x)\}$$

ist abgeschlossen.

Aufgabe T3. Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist dann für jedes offene $U \subseteq X$ auch $f(U)$ offen? Ist für jedes abgeschlossene $A \subseteq X$ auch $f(A)$ abgeschlossen? Beweisen oder widerlegen Sie!

Aufgabe T4. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Zeigen Sie: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $x \mapsto f(x, c)$ und $y \mapsto f(c, y)$ stetig (d.h. alle Einschränkungen auf achsenparallele Geraden sind stetig), aber f ist nicht stetig in $(0, 0)$.