Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 7

Aufgabe T1. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind kompakt?

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$
(b) $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^3 + z^4 = 1\}$

Aufgabe T2. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum vollständig ist.

Aufgabe T3. Beweisen Sie:

(a) (*Tubenlemma*) Sei X ein beliebiger und K ein kompakter metrischer Raum. Sei ferner $x_0 \in X$ und $W \subseteq X \times K$ eine offene Menge mit $\{x_0\} \times K \subseteq W$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von x_0, so dass $U \times K \subseteq W$.
(b) Seien X, Y metrische Räume und seien $K \subseteq X$, $L \subseteq Y$ kompakte Mengen. Dann ist $K \times L$ ebenfalls kompakt.

Aufgabe T4. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$|\lambda| > \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big)}.$$

Zeigen Sie: $x_1 = ... = x_n = 0$ ist die einzige Lösung des Gleichungssystems $Ax = \lambda x$.