Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Aufgaben für die Tutorien: Blatt 8

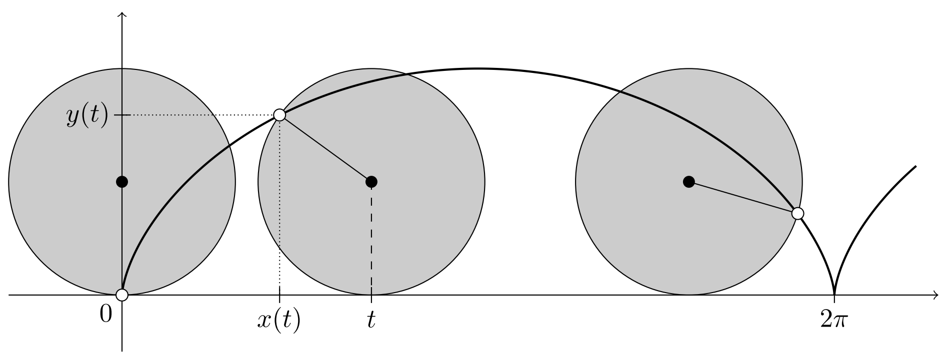
Aufgabe T1. Beweisen Sie:

(a) Die Addition $A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto x+y$ ist stetig.
(b) Sind $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist auch $K + L = \{x+y : x \in K, y \in L\}$ kompakt.

Aufgabe T2. Wir betrachten $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ jeweils mit der Summennorm $\|\cdot\|_1$. Zeigen Sie, dass dann die Operatornorm jeder linearen Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gegeben ist durch

$$\|T\| = \max\Big\{\sum_{i=1}^m |a_{ij}| : 1 \leq j \leq n\Big\} =: \|A\|_1 \quad \text{(Spaltensummennorm von } A).$$

Aufgabe T3. (*Die Zykloide*) Die Einheitskreisscheibe rolle ohne zu gleiten auf der x_1-Achse. Der Punkt des Kreisrandes, der zur Zeit $t = 0$ im Ursprung liegt, beschreibt dabei eine Zykloide.



(a) Machen Sie sich klar, dass die Zykloide parametrisiert ist durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie die Länge des Zykloidenbogens zwischen $t = 0$ und $t = 2\pi$.
(c) Bestimmen Sie die singulären Punkte von γ.

Aufgabe T4. Sei X ein metrischer Raum, und $(X_i)_{i\in I}$ sei eine Familie wegzusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcup_{i\in I} X_i$ wegzusammenhängend ist.