Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 1

Aufgabe T 1 (De Morgansche Gesetze).
Es seien P und Q Aussagen. Zeigen Sie die folgenden beiden semantischen Äquivalenzen anhand einer Wahrheitstafel:

(a) $\neg(P \vee Q) \;\equiv\; \neg P \wedge \neg Q$

(b) $\neg(P \wedge Q) \;\equiv\; \neg P \vee \neg Q$

Aufgabe T 2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zum Knobeln:
Aufgabe T 3. Behauptung: Alle Kinder besitzen dieselbe Augenfarbe!
Beweis: Wir beweisen per vollständiger Induktion über n, dass je n Kinder dieselbe Augenfarbe besitzen.
Induktionsanfang $n = 1$: Jedes Kind besitzt eine Augenfarbe.
Induktionsschritt: Betrachte eine Gruppe von $n+1$ Kindern. Nimm eines beiseite, dann bleibt eine Gruppe von n Kindern übrig. Nach Induktionsvoraussetzung besitzen diese n Kinder dieselbe Augenfarbe. Nun betrachte wieder die ganze Gruppe der $n+1$ Kinder und nimm ein anderes beiseite. Auch jetzt besitzen die verbleibenden n Kinder dieselbe Augenfarbe. Da es Kinder gibt, die zu beiden Untergruppen gehören, ist die gemeinsame Augenfarbe der Kinder der zweiten Gruppe dieselbe wie zuvor. Daher besitzen die $n+1$ Kinder alle dieselbe Augenfarbe.
Aufgabe: Finden Sie den Fehler in diesem „Beweis“.

Aufgabe T 4 (Mächtigkeit der Potenzmenge).

(a) Bestimmen Sie die Potenzmenge von $M = \{1, 2, 3\}$.

(b) Es sei A eine Menge, $|A| = n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass für die Mächtigkeit der Potenzmenge gilt

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Griechisches Alphabet

Kleinbuchstaben

α	Alpha	ι	Iota	ρ, ϱ	Rho
β	Beta	κ	Kappa	σ	Sigma
γ	Gamma	λ	Lambda	τ	Tau
δ	Delta	μ	My	υ	Ypsilon
ϵ	Epsilon	ν	Ny	ϕ, φ	Phi
ζ	Zeta	ξ	Xi	χ	Chi
η	Eta	o	Omikron	ψ	Psi
θ, ϑ	Theta	π	Pi	ω	Omega

Einige Großbuchstaben

Γ	Gamma
Δ	Delta
Θ	Theta
Λ	Lambda
Π	Pi
Σ	Sigma
Φ	Phi
Ψ	Psi
Ω	Omega

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 1

Aufgabe H 1 (Distributivgesetze). Es seien P, Q, R Aussagen. Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstafel:

(a) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(b) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

3 Punkte

Aufgabe H 2. Es seien A, B, C Mengen.

(a) Zeigen Sie:

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

(b) Widerlegen Sie die Behauptung

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$$

durch zwei geeignete (ordentlich skizzierte) Venn-Diagramme.

4 Punkte

Aufgabe H 3.

(a) Erraten Sie eine Formel für

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

und beweisen Sie Ihre Gültigkeit per vollständiger Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

5 Punkte

Aufgabe H 4. Zeigen Sie per vollständiger Induktion die Gültigkeit der Identität

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hierbei ist

$$x^{a^b} := x^{(a^b)}.$$

4 Punkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 29. Oktober 2013, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.