Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 2

Aufgabe T 1.

(a) Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Rekursion aus der Vorlesung:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \text{für } k, n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k \leq n.$$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Aufgabe T 2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{K}$ die folgenden Aussagen. Geben Sie dabei in jedem Schritt an, welche Axiome (bzw. welche Folgerungen) Sie gerade verwenden.

(a) $-(x+y) = -x - y$

(b) $x\,y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$

(c) $(-x)\,y = -x\,y$ und $(-x)\,(-y) = x\,y$

Aufgabe T 3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n \geq n^2$? Stellen Sie die richtige Behauptung auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe T 4. Beweisen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung für reelle Zahlen

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$$

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 2

Aufgabe H 1. Leiten Sie die folgenden Aussagen aus den Anordnungsaxiomen der reellen Zahlen ab. Bereits in der Vorlesung bewiesene Folgerungen dürfen verwendet werden.

(a) $0 \leq x < y,\ 0 \leq a < b \implies a\,x < b\,y$

(b) $x > 0 \iff x^{-1} > 0$

(c) $0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1}$

5 Punkte

Aufgabe H 2. Beweisen Sie mit Hilfe des binomischen Satzes: Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n > \frac{n^2}{4}\,x^2$$

3 Punkte

Aufgabe H 3. Zeigen Sie: Die Zahl $M := 2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn auch n eine Primzahl ist.
Hinweis: Geometrische Summenformel.

3 Punkte

Aufgabe H 4. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden beiden Ungleichungen:

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Bernoulli-Ungleichung

(b) $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$

4 Punkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 5. November 2013, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.