Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 3

Aufgabe T 1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und X, Y nichtleer. Ordnen Sie den Aussagen auf der linken Seite jeweils die äquivalente Aussage der rechten Seite zu.

f injektiv	$\exists g : Y \to X \; \forall x \in X, y \in Y : \; g(f(x)) = x, f(g(y)) = y$
f surjektiv	$\exists y \in Y : \; f(X) = \{y\}$
f bijektiv	$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
f konstant	$f(X) = Y$

Aufgabe T 2. Bestimmen Sie das Infimum der Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \, x^2 > 7, \, x > 0\}$$

Aufgabe T 3.

(a) Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$. Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$ sowie das Urbild $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

(b) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für $A, B \subseteq Y$ gilt:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Aufgabe T 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$. Entscheiden Sie, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 3

Aufgabe H 1.

(a) Bestimmen Sie von der Menge
$$A := \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} :\ m, n \in \mathbb{N} \right\}$$
das Supremum und das Infimum. Entscheiden Sie, ob es sich dabei sogar um ein Maximum bzw. Minimum handelt.

(b) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass
$$\sup(B \cup C) = \max\{\sup B,\, \sup C\}$$

4 Punkte

Aufgabe H 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen injektiv bzw. surjektiv sind. Bestimmen Sie im bijektiven Fall jeweils die Umkehrfunktion.

(a) $f : [0, \infty) \to [1, \infty),\ x \mapsto x^2 + 4x + 1$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\,x - \lfloor x \rfloor$

4 Punkte

Aufgabe H 3. Seien $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ ihre Komposition. Zeigen Sie:

(a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

(b) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

(c) f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3 Punkte

Aufgabe H 4.
Es seien a, b positive reelle Zahlen. Durch
$$A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a, b) := \sqrt{a\,b}, \qquad H(a, b) := \frac{2\,a\,b}{a+b}$$
wird deren **arithmetisches**, **geometrisches** bzw. **harmonisches Mittel** definiert.
Rechnen Sie nach, dass
$$H(a, b) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}$$
und beweisen Sie die Ungleichung
$$H(a, b) \,\le\, G(a, b) \,\le\, A(a, b)$$
Zeigen Sie, dass Gleichheit nur für $a = b$ eintritt.

4 Punkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 12. November 2013, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.