Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 4

Der Termin der Klausur ist Donnerstag, der 20.02.2014.

Raum und Zeit ebenso wie zugelassene Hilfsmittel werden noch bekannt gegeben.

Aufgabe T 1. Welche Beispiele für Grenzwerte von Folgen wurden bereits in der Vorlesung behandelt? Erstellen Sie eine Liste.

Aufgabe T 2. Entscheiden Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(b) $a_n := \dfrac{n!}{2^n}$

(c) $a_n := \sqrt{n+10} - \sqrt{n}$ *Hinweis:* $x - y = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$

(d) $a_n := \dfrac{n^k}{x^n}$ mit $x \in \mathbb{R}, |x| > 1$ und festem $k \in \mathbb{N}$

Aufgabe T 3. Wir betrachten die Rekursionsvorschrift

$$a_0 := \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2 - a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

(b) Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe T 4. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) folgende Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = a \iff (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge}$$

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 4

Aufgabe H 1. Entscheiden Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n := \dfrac{n^3 - 4n}{2n^4 + 1}$

(b) $a_n := \sqrt[n]{x^n + y^n}$ wobei $0 \le x \le y$

Tipp: Sandwich-Regel

(c) $a_n := \dfrac{(\sqrt{n} - 1)\sqrt{3n}}{1 - 2n}$

(d) $a_1 := 3$ und $a_{n+1} := 2a_n - 1$

4 Punkte

Aufgabe H 2. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ab konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|a_n\, b_n - ab| \le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$

3 Punkte

Aufgabe H 3. Die unendlich iterierte Wurzel

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

wird als Folge rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

5 Punkte

Aufgabe H 4 (Die Fibonacci-Folge). Leonardo von Pisa (12./13. Jh.) - genannt Fibonacci - stellt in seinem Buch „Liber Abaci“ aus dem Jahr 1202 die folgende „Kaninchenaufgabe“:

Jemand setzt ein Paar Kaninchen in einen Garten, der auf allen Seiten von einer Mauer umgeben ist, um herauszufinden, wieviele Kaninchen innerhalb eines Jahre geboren werden. Wenn angenommen wird, dass jeden Monat jedes Paar ein weiteres Paar erzeugt, und dass Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt erstmals gebären, wie viele Paare Kaninchen werden dann jedes Jahr geboren?

Die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat ist somit durch die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ \text{ für } n \ge 1,$$

gegeben. Diese Folge wird **Fibonacci-Folge** genannt.
Zeigen Sie:

(a) $a_n \ge n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}$ für alle $n \ge 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}\, a_{n-1}}{a_n^2} = 1$

4 Punkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 19. November 2013, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.