Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 5

Aufgabe T 1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ dar und berechnen Sie ihren Betrag:

$$z = \frac{1}{1+3i}, \qquad z = \frac{1}{(2-i)^2}$$

Aufgabe T 2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

genau dann keine reellen Lösungen hat, wenn $|a| < 1$. In diesem Fall hat die Gleichung zwei komplexe Lösungen, die auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegen.

Aufgabe T 3. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(a) $M := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \geq |z-1|\}$.

(b) $M := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |2z - i| \leq 4\}$.

(c) $M := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((1+i)z) = 1\}$.

Aufgabe T 4.

(a) Zeigen Sie die folgenden asymptotischen Aussagen für $n \to \infty$:

$$(n+1)^3 - n^3 = \Theta(n^2), \qquad n! = o(n^n)$$

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ reelle Folgen und es existiere der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: c \in \mathbb{R}$. Dann ist $a_n = O(b_n)$.

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 5

Aufgabe H 1. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und Divergenz:

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n}, \qquad a_n := (-1)^n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)$$

3 Punkte

Aufgabe H 2.

(a) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z = \frac{3-i}{1+2i}, \qquad z = \frac{1}{2+3i} + \frac{2i}{-2+3i}.$$

(b) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung $z^2 = i$

4 Punkte

Aufgabe H 3. Sei $0 < q < 1$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit

$$|a_{n+1} - a_n| \;\leq\; q\,|a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(a) $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $|a_{n+k} - a_n| \leq \dfrac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0|$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

4 Punkte

Aufgabe H 4. Entscheiden Sie, in welchen der folgenden Aussagen die Landau-Symbole korrekt verwendet werden. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \Theta\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big), \qquad n! = o(2^n)$

(b) Ist $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} c_i x^i$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$, so gilt: $p(n) = \Theta(n^k)$

3 Punkte

Zusatzaufgabe Z 5.

(a) Es seien $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ und $|a|^2 > b$. Zeigen Sie, dass durch die Lösungen der Gleichung

$$z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + b = 0$$

ein Kreis um a mit Radius $\sqrt{|a|^2 - b}$ beschrieben wird.

(b) Es ist $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ ein Kreis in der komplexen Ebene. Zeigen Sie, dass im Fall $|a| \neq r$ das Bild von K unter der Abbildung $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ ebenfalls ein Kreis ist. Geben Sie auch seinen Radius und Mittelpunkt an.

4 Bonuspunkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 26. November 2013, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.