Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 6

Aufgabe T 1. Dividieren Sie $p(x) := x^4 - 3x^3 - 1$ durch $q(x) := x^2 - 2$ mit Rest.

Aufgabe T 2 (Wurzelkriterium).

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine komplexe Folge. Angenommen, es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q \quad \text{für alle } n \ge n_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit } a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{für gerade } k, \\ \frac{1}{3^k} & \text{für ungerade } k. \end{cases}$$

Aufgabe T 3.

(a) Begründen Sie folgende Variante des Majorantenkriteriums:
Seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n = O(b_n)$, d.h. es gibt ein $C > 0$, so dass $|a_n| \le C\,|b_n|$ für alle $n \ge n_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ ist konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent}$$

(b) Beweisen Sie das *Minorantenkriterium:* Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen reeller Zahlen mit $a_n \ge b_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, so auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe T 4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für alle $s \in \mathbb{N}$, $s \ge 2$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a + k^n}{b + k^m}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$. *Hinweis:* Aufgabe T3 (a)

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *Hinweis:* Aufgabe T3 (b)

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^k}$ mit $q \in \mathbb{C}$ und $|q| < 1$ bzw. $|q| > 1$

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 6

Aufgabe H 1.

(a) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so auch $\overline{z}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Hinweis: $p(i) = 0$.

4 Punkte

Aufgabe H 2 (Parallelogramm-Gleichung). Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 \;=\; 2\,(|z|^2 + |w|^2)$$

Geben Sie dieser Gleichung eine geometrische Interpretation.

2 Punkte

Aufgabe H 3.

(a) Entscheiden Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Gibt es im Fall der Divergenz zumindest eine konvergente Teilfolge?

(i) $a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$ (ii) $a_n = \frac{i^n}{n+i}$

(b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ *Hinweis:* Aufgabe T 2, Blatt 4.

6 Punkte

Aufgabe H 4. Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}\ .$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

3 Punkte

Zusatzaufgabe Z 5. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$$

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Eigenschaft der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

4 Bonuspunkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 3. Dezember 2013, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.