Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

# Analysis für Informatiker

## – Aufgaben für die Tutorien – Blatt 9

**Aufgabe T 1.**

(a) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x),\quad \lim_{x\downarrow 1} f(x),\quad \lim_{x\to 1} f(x),\qquad \lim_{x\uparrow -1} f(x),\quad \lim_{x\downarrow -1} f(x),\quad \lim_{x\to -1} f(x)$$

existieren. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

**Aufgabe T 2.** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass es dann sogar ein $c > 0$ gibt mit $f(x) \geq c$ für alle $x \in [a,b]$.

**Aufgabe T 3 (Ein Fixpunktsatz).** Beweisen Sie: Ist $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion, so gibt es (mindestens) ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.
*Hinweis:* Betrachten Sie $g(x) := f(x) - x$.

**Aufgabe T 4.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$. Man sagt, $f$ nimmt auf $D$ ein (globales) Maximum bzw. Minimum an, wenn es ein $x_0 \in D$ gibt mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ ein Maximum $M$ oder ein Minimum $m$ annimmt.

(b) Darf man in (a) das „oder“ durch „und“ ersetzen?

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

# Analysis für Informatiker

## – Hausübungen – Blatt 9

**Aufgabe H 1.** Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{-x} = x^2$$

eine Lösung in $[0,2]$ besitzt.

**3 Punkte**

**Aufgabe H 2.**

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$$

*Hinweis:* Geometrische Summenformel. (Differenzieren ist nicht erlaubt.)

(b) Gegeben sei das reelle Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to +\infty} p(x) = \infty$$

**3 Punkte**

**Aufgabe H 3.** Skizzieren Sie die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

In welchen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $f$ stetig?

**3 Punkte**

**Aufgabe H 4.** Gegeben sei die Funktion

$$f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x^2}{2\,e^x - 1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ stetig auf $[1,\infty)$ ist.

(b) Untersuchen Sie, ob $f$ auf $[1,\infty)$ ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt.
*Hinweis:* Differenzieren ist nicht erlaubt.

**4 Punkte**

**Zusatzaufgabe Z 5.**

(a) Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, wobei es ein $\varepsilon > 0$ gebe mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$. Zeigen Sie für $c \in \mathbb{R}$ die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c \iff f(x_0) = c \;\wedge\; \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = c \;\wedge\; \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = c$$

(b) Untersuchen Sie die Funktion

$$\mathrm{zack}(x) := \left|\left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor - x\right|$$

auf Stetigkeit.

**5 Bonuspunkte**

---

*Abgabe der Übungen:* Bis Dienstag, den 7. Januar 2014, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.