Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 10

Aufgabe T 1.

(a) Zeigen Sie für $a, b > 0$:

$$a^x\, b^x \;=\; (ab)^x \qquad \text{und} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

(b) Zeigen Sie, dass für $a > 0,\ a \neq 1$ gilt: $\log_a(x) \;=\; \dfrac{\ln x}{\ln a}$ für alle $x > 0$.

(c) Berechnen Sie

$$\text{(i)}\quad \exp_2\left(\frac{3}{2}\right) \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \log_2(32) \qquad\qquad \text{(iii)}\quad \log_2\left(\frac{1}{8}\right)$$

Aufgabe T 2. Zeigen Sie für festes $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[k]{x}} = 0$$

D.h. ln wächst für $x \to \infty$ langsamer als jede Wurzelfunktion gegen ∞.
Hinweis: Setzen Sie $x = e^{ky}$.

Aufgabe T 3.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen auf dem jeweils sinnvollen Definitionsbereich:

$$\text{(i)}\quad f(x) = \frac{(1+x)^2}{2+x^3} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad f(x) = x \ln x \qquad\qquad \text{(iii)}\quad f(x) = a^x$$

(b) Untersuchen Sie, in welchen $x \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist. Skizzieren Sie f.

Achtung: $x = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

Aufgabe T 4. Eine Funktion f heißt **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung einer differenzierbaren geraden (ungeraden) Funktion stets ungerade (gerade) ist.

(b) Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ein reelles Polynom. Zeigen Sie: $p(x)$ ist genau dann gerade (ungerade), wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden (geraden) Indizes k.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten und alles Gute im neuen Jahr!

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 10

Aufgabe H 1. Wir betrachten den Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(a) Zeigen Sie (ohne Verwendung der Ableitung): $x \to \sinh x$ ist stetig, ungerade und auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{e^x}$$

und skizzieren Sie den Graphen von $\sinh$.

(c) Beweisen Sie: Die Funktion $x \mapsto \sinh x$ auf $\mathbb{R}$ besitzt eine Umkehrfunktion

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{(Areasinus hyperbolicus).}$$

Diese ist streng monoton wachsend sowie stetig, und es gilt

$$\operatorname{arsinh} x \;=\; \ln\big(\sqrt{x^2+1} + x\big).$$

5 Punkte

Aufgabe H 2. Untersuchen Sie in welchen Punkten die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und berechnen Sie die Ableitung:

(i) $f(x) = \cosh x$ (ii) $f(x) = \sinh x$ (iii) $f(x) = \cos x$

(iv) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$ (v) $f(x) = x^x$ (vi) $f(x) = xe^{-1/x}$

5 Punkte

Aufgabe H 3.

(a) Verifizieren Sie für $x, y > 0$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{\ln x + \ln y}{2} \;\le\; \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\downarrow 0}\,(x \ln x)$

3 Punkte

Aufgabe H 4. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;=\; e^x$$

Hinweis: Logarithmieren.

4 Punkte

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Zusatzübungen – Blatt 10

Zusatzaufgabe Z 5. Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$f(x+y) \;=\; f(x) \cdot f(y) \qquad \text{und} \qquad f(1) = e$$

genügen.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $f(x)$ für $x \in \mathbb{Q}$ und beachten Sie Aufgabe H 4, Blatt 8.

5 Bonuspunkte

Zusatzaufgabe Z 6 (Die Fibonacci-Folge II). Wir betrachten den Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

Dieser wird rekursiv durch die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}$ definiert.
Zeigen Sie:

(a) Mit den Fibonacci-Zahlen, $a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, (vgl. Aufgabe H 4, Blatt 4) gilt

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen den **goldenen Schnitt** $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfolgen (x_{2n}) und (x_{2n+1}).

6 Bonuspunkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 14. Januar 2014, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.