Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 11

Aufgabe T 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$$

Aufgabe T 2. Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und besitze n Nullstellen in (a,b). Zeigen Sie, dass dann ihre Ableitung $f'(x)$ mindestens $n-1$ Nullstellen in (a,b) besitzt.

Aufgabe T 3. Es seien n reelle Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ gegeben. Untersuchen Sie die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) := \left(\sum_{k=1}^{n} (x-a_k)^2\right)^{1/2}$$

auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe T 4.

(a) Zeigen Sie: $\ln x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav.

(b) Folgern Sie hieraus die **Youngsche Ungleichung**: Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$x^{1/p} y^{1/q} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \qquad \text{für alle } x, y > 0$$

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 11

Aufgabe H 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{\sin^2 x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}$$

3 Punkte

Aufgabe H 2. Zeigen Sie:

(a) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a, b). Dann ist $f \geq g$ auf $[a, b]$.

Bemerkung: Analog gilt $f > g$ auf $(a, b]$ falls $f' > g'$ statt $f' \geq g'$.

(b) Beweisen Sie hiermit:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \qquad \text{für } x > 1$$

4 Punkte

Aufgabe H 3. Es sei $x \in (a, b)$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

Bemerkung: In Anwendungen dient dieser Bruch mit hinreichend kleinen h als Näherung für $f''(x)$.

2 Punkte

Aufgabe H 4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := x^\alpha e^{-x}$$

auf dem Definitionsbereich $(0, \infty)$ für $\alpha < 0$, bzw. auf $[0, \infty)$ für $\alpha \geq 0$.

(a) Untersuchen Sie die Funktion in Abhängigkeit von α auf lokale und globale Extrema.

(b) Bestimmen Sie das Konvexitätsverhalten der Funktion in Abhängigkeit von α.

6 Punkte

Zusatzaufgabe Z 5.

(a) Beweisen Sie die **Jensensche Ungleichung**:
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion und $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Dann gilt für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

Hinweis: Vollständige Induktion.
Schreiben Sie dazu $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ als $(1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$.

(b) Beweisen Sie die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:
Seien $x_1, \ldots, x_n > 0$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Hinweis: Logarithmieren.

4 Bonuspunkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 21. Januar 2014, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.