Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 12

Aufgabe T 1.

(a) Berechnen Sie die dritte Einheitswurzel $e^{2\pi i/3}$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die exakten Werte von $\sin x$ und $\cos x$ an den Stellen

$$\frac{2\pi}{3}, \qquad \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{6}.$$

Hinweis: $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$

Aufgabe T 2. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von

(a) $1 + i$ (b) $1 - i$ (c) $(1 + i)^3(1 - i)^5$

Aufgabe T 3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)\, z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

Aufgabe T 4. Wir betrachten die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \frac{e^{x/n}}{x^2 + n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie:

(a) f_n ist auf $\mathbb{R}$ unbeschränkt.

(b) Für jedes $R > 0$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{[-R,R]} < \infty.$$

(c) Begründen Sie, dass durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion definiert ist.

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 12

Aufgabe H 1. Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -1.$$

Skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene.

3 Punkte

Aufgabe H 2.

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\uparrow \pi/2} \tan x$ und $\lim\limits_{x\downarrow -\pi/2} \tan x$.

Zeigen Sie:

(b) Der Tangens $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, streng monoton wachsend, und bijektiv. Geben Sie die Ableitung $\tan'(x)$ an.

(c) Die Umkehrfunktion des Tangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar mit Ableitung

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

4 Punkte

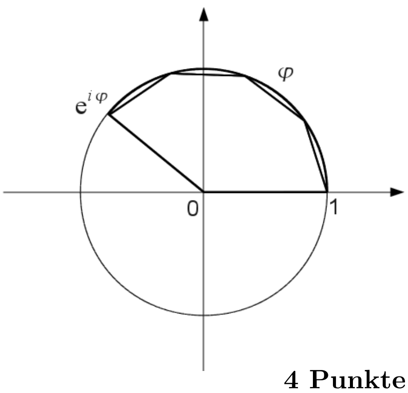
Aufgabe H 3.

Es sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Um die Länge des Kreisbogens von 1 bis $e^{i\varphi}$ zu bestimmen, nähern wir ihn durch Streckenzüge an. Zeigen Sie:

(a) $|e^{ik\varphi/n} - e^{i(k-1)\varphi/n}| = |e^{i\varphi/n} - 1|$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |e^{ik\varphi/n} - e^{i(k-1)\varphi/n}| = \varphi$

Hinweis: Restgliedabschätzung für die Exponentialfunktion mit $n = 1$.



4 Punkte

Aufgabe H 4.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$.

(b) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{n+1}{6n+1}\right)^n$ konvergiert.

4 Punkte

Zusatzaufgabe Z 5 (Die Fibonacci-Folge III). Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Hinweis: Aufgabe Z 6, Blatt 10.

(b) Für $|z| < R$ gilt $(1 - z - z^2) f(z) = 1$, also

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Hinweis: Berechnen Sie $(1 - z - z^2) f(z)$ indem Sie gleiche Potenzen von z zusammenfassen.

3 Bonuspunkte

Abgabe der Übungen: Bis Dienstag, den 28. Januar 2014, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.