Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

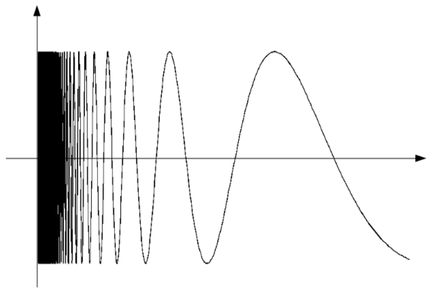
# Analysis für Informatiker

## – Aufgaben für die Tutorien – Blatt 13

**Aufgabe T 1.**
Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine Regelfunktion auf $[0,1]$ ist.



**Aufgabe T 2.** Bestimmen Sie in Abhänigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + b}$$

**Aufgabe T 3 (Der natürliche Logarithmus als Stammfunktion von $\frac{1}{x}$).** Wir haben den natürlichen Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} : (0, \infty)$ eingeführt. Er kann alternativ auch als Stammfunktion der rationalen Funktion $\frac{1}{x}$ definiert werden. Dazu setzt man

$$L(x) := \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Logarithmus ln):

(a) Die Funktion $L$ ist differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit Ableitung $L'(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $L$ ist streng monoton wachsend und konkav.

(c) $L(xy) = L(x) + L(y)$.

(d) $L(e^x) = x \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe T 4 (Die Arcustangens-Reihe).**
Zeigen Sie: Der Arcustangens besitzt die Potenzreihenentwicklung

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \text{für } x \in (-1, 1).$$

*Anleitung:* Bestimmen Sie zunächst den Konvergenzradius der Potenzreihe. Gehen Sie anschließend wie in der Vorlesung bei der Logarithmusreihe vor! Also: Was ist die Ableitung von $\arctan x$?

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied WS 2013/14

# Analysis für Informatiker
## – Hausübungen – Blatt 13

**Aufgabe H 1.**

(a) Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^{n+1}}$$

(b) Berechnen Sie (ohne de l'Hospital) den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5}.$$

**3 Punkte**

**Aufgabe H 2.**

(a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{(i)} \int_{-2}^{1} x^3 - \sqrt{x+3}\, dx \qquad \text{(ii)} \int_0^1 x^2 e^{-x^3}\, dx \qquad \text{(iii)} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq m$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\, dx = 0; \qquad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\sin(mx)\, dx = 0$$

**4 Punkte**

**Aufgabe H 3 (Die Binomialreihe).** Wir betrachten für $s \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n \qquad (*)$$

mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten $\binom{s}{n}$ (vgl. H 3, Blatt 7). Zeigen Sie:

(a) Für $s \notin \mathbb{N}_0$ gilt: Der Konvergenzradius der Reihe $(*)$ ist $R = 1$.

(b) $\binom{s}{n} + \binom{s}{n-1} = \binom{s+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n \qquad \text{für alle } x \in (-1,1)$$

*Anleitung:* Zeigen Sie, dass $(1+x)\, f'(x) = s\, f(x)$ auf $(-1,1)$, und folgern Sie, dass die Funktion $g(x) := f(x)(1+x)^{-s}$ konstant gleich 1 ist.

**5 Punkte**

**Zusatzaufgabe Z 4.**

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig mit Periode $p > 0$, d.h. es gelte $f(t+p) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int_x^{x+p} f(t)\, dt = \int_0^p f(t)\, dt.$$

*Hinweis:* Differenzieren Sie nach $x$.

(b) Wir betrachten die Integrale aus Aufgabe H 2 (b), diesmal mit den Integrationsgrenzen 0 und $\pi$. Zeigen Sie, dass auch in diesem Fall die Integrale gleich 0 sind.

**4 Bonuspunkte**

---

*Abgabe der Übungen:* Bis Dienstag, den 4. Februar 2014, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.