Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Aufgaben für die Tutorien – Blatt 14

Aufgabe T 1.

(a) Beweisen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

(b) Die **Betafunktion**. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

falls das Integral existiert. Zeigen Sie, dass dieser Fall genau für $x, y > 0$ eintritt.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Aufgabe T 2. Entscheiden Sie: Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^s}$$

Hinweis: Integralkriterium.

Aufgabe T 3. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion

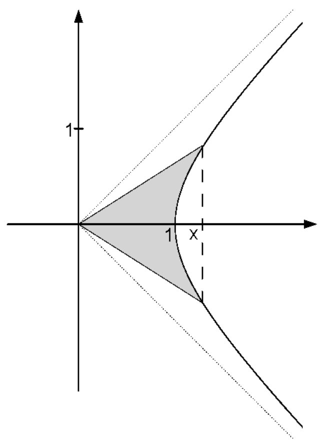
$$f(x) = \ln(1+e^x)$$

im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe T 4.

(a) Bestimmen Sie $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ für $x > 1$.
Hinweis: Substitution $x = \cosh u$.
Additionstheorem für $\sinh x$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des grauen Hyperbelsektors der Hyperbel $y^2 = x^2 - 1$ gemäß Skizze.



Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler / A. Schmied

WS 2013/14

Analysis für Informatiker

– Hausübungen – Blatt 14

Aufgabe H 1. Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

Hinweis: Grenzwertkriterium.

Aufgabe H 2. Bestimmen Sie zu

$$f(x) := e^{\sqrt{x}}$$

das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe H 3.

(a) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\int f(x)f'(x)\,dx.$$

Hinweis: Differenzieren Sie $(f(x))^2$.

(b) Existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Bestimmen Sie jeweils eine zugehörige Stammfunktion und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Aufgabe H 4 (Dirichletsches Konvergenzkriterium).

(a) Die Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei stetig und besitze eine beschränkte Stammfunktion auf $[1,\infty)$. Zeigen Sie, dass dann das Integral

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^s}\,dx$$

für jedes $s > 0$ existiert.
Hinweis: Partielle Integration.

(b) Folgern Sie die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Abgabe der Übungen: Bis Freitag, den 7. Februar 2014, 11:00 Uhr im jeweiligen orangen Briefkasten auf D1. Bitte schreiben Sie auf Ihr Deckblatt deutlich Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer.