Prof. Dr. Margit Rösler
M.Sc. Dominik Brennecken
Insitut für Mathematik

Proseminar Analysis - WS 2023/24

Vorbereitung: Integration von Regelfunktionen (nach [K]). *D. Brennecken/M. Rösler.*

Themenblock konvexe Funktionen (Vorträge 1 - 2):

Konvexität ist eine wichtige Eigenschaft, aus der sich z.B. interessante Ungleichungen ableiten lassen. Sie spielt auch beim Studium der Gammafunktion (s. unten) eine Rolle.

Vortrag 1: Konvexität.
Literatur: [K], Kapitel 9.7.

Vortrag 2: Konvexe Funktionen und Ungleichungen.
Literatur: [K], Kapitel 9.8.

Themenblock Fourierreihen (Vorträge 3 - 8):

In der Theorie der Fourierreihen geht es um die Darstellung periodischer Funktionen als Überlagerung von elementaren trigonometrischen Funktionen (Sinus- und Cosinusfunktionen), und um die Konvergenzeigenschaften von Reihen solcher Funktionen. Fourierreihen treten z.B. beim Studium von Schwingungsvorgängen auf.

Vortrag 3: Trigonometrische Polynome und Fourierreihen.
In diesem Vortrag werden Grundbegriffe zu Fourierreihen eingeführt und Beispiele diskutiert. Literatur: [LH], Kapitel 11.1., ferner alternative Darstellung aus [K], S. 326 ergänzen (vgl. auch Aufgaben 5 und 6, Kapitel 11.4. in [LH]).

In den Vorträgen 4 - 6 geht es um verschiedene Aspekte der Konvergenz von Fourierreihen.

Vortrag 4: Der Konvergenzsatz von Fejér.
Literatur: [LH], Kapitel 11.2. bis einschließlich Satz 11.6.

Vortrag 5: Punktweise Konvergenz von Fourierreihen.
Literatur: [LH], Kapitel 11.2. ab Korollar 11.7.

Vortrag 6: Konvergenz von Fourierreihen im quadratischen Mittel.
Literatur: [LH], Kapitel 4.3. (Skalarprodukte und Orthogonalität) und Kapitel 11.3.

Vortrag 7: Diracfolgen und der klassische Approximationssatz von Weierstraß.
Es wird gezeigt, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann. Literatur: [K], Kapitel 15.5.

Vortrag 8: Das isoperimetrische Problem.
Welche Kurve in der Ebene umschließt bei festem Umfang die größte Fläche? Das kann mittels Fourierreihen beantwortet werden! Literatur: [K], Kapitel 16.8. Die Leibnizsche Sektorformel ([K], Kapitel 12.5.) soll erklärt, aber nicht bewiesen werden.

Themenblock Gammafunktion (Vorträge 9 - 12):

Die Gammafunktion ist neben der Exponentialfunktion eine der wichtigsten Funktionen der Analysis. Sie interpoliert die Fakultät $n \mapsto n!$ und besitzt zahlreiche interessante Eigenschaften, von denen wir einige kennenlernen werden.

Vortrag 9: Die Gammafunktion und der Satz von Bohr-Mollerup.
Die Gammafunktion wird anhand ihrer Integraldarstellung eingeführt, und es wird ein wichtiger Charakterisierungssatz bewiesen. Literatur: [F], §20, S. 246 Mitte bis S. 249 Mitte. Anwendung: die Legendresche Verdopplungsformel ([F], Aufgabe 20.9.; siehe auch [K], Seite 357).

Vortrag 10: Darstellungen der Gammafunktion nach Gauß und Weierstraß Hier handelt es sich um recht bemerkenswerte Produkt-Darstellungen der Gammafunktion.
Literatur: [F], S. 249 Mitte bis S. 251. Das Wallissche Produkt für π darf ohne Beweis verwendet werden.

Vortrag 11: Die Eulersche Summationsformel.
Diese Formel stellt einen nützlichen Zusmamenhang her zwischen Summation und Integration und dient der Vorbereitung für den folgenden Vortrag. Literatur: [K], Kapitel 11.10 bis Seite 225 Mitte. Fakultativ: Ausblick auf die allgemeine Eulersche Summationsformel auf Seite 226.

Vortrag 12: Die Stirlingsche Formel.
Die Stirlingsche Formel erlaubt eine Approximation der Gammafunktion für große Argumente. Sie liefert insbesondere eine wichtige Nährungsformel für $n!$ bei großem n.
Literatur: [K], Kapitel 17.3. Als Spezialfall auch die Stirlingsche Formel zur Approximation von $n!$ angeben ([K], S. 228).

Abschlussvortrag:

Vortrag 13: Das Newton-Verfahren.
Dies ist ein klassisches Verfahren zur nährerungsweisen Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen. Literatur: [K], Kapitel 14.4. (Erfordert an einer Stelle Kenntnisse über Taylorreihen).

Literatur:

[F] O. Forster: Analysis 1. Springer Verlag, 12. Auflage 2016.

[K] K. Königsberger, Analysis I, 6. Auflage 2004.

[LH] R. Lasser, F. Hofmaier, Analysis I+II. Springer Spektrum 2012.

Alle diese Lehrbücher sind als online-Ressourcen in unserer Bibliothek verfügbar.