Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

Reelle Analysis

Übungsblatt 10
WS 2015/16

Gruppenübung für Woche 11

Aufgabe G1: Entscheiden Sie, ob die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

über die Menge $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : y \leq x\}$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Hausübungen

Aufgabe H1: (2 Punkte) Begründen Sie, dass $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, y > 0\}$ Borel-messbar ist, und berechnen Sie

$$\int_A ye^{-(x^2+y^2)/2}\, d(x,y).$$

Aufgabe H2: (7 Punkte)

a) Entscheiden Sie jeweils, ob die Funktion $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ über die angegebene Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-integrierbar ist:

$$\text{(i) } A = [0,R] \times [0,\infty],\ R > 0; \quad \text{(ii) } A = [0,\infty)^2.$$

b) Beweisen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Anleitung: Da wir bereits wissen, dass dieses Regelintegral konvergiert, genügt es zu zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} I_k = \frac{\pi}{2}$, wobei

$$I_k = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Berechnen Sie I_k mit dem Satz von Fubini. Verwenden Sie dazu die Darstellung $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$. Noch ein Tip zur Integration: $e^{-xy}\sin x = \operatorname{Im}\big(e^{(i-y)x}\big)$.

c) Warum läßt sich $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ nicht direkt mittels Fubini und obiger Darstellung von $\frac{1}{x}$ berechnen?

Aufgabe H3: (4 Punkte) Betrachen Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \text{ und } x \leq y < x+1 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0 \text{ und } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Werteverteilung von f und begründen Sie, dass f Borel-messbar ist.

b) Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \Big) dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \Big) dx$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$?

BITTE WENDEN!

Aufgabe H4: (3 Punkte) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Zeigen Sie: Die Funktion $h(x,y) = f(x)g(y)$ $(x \in X, y \in Y)$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, und

$$\int_{X \times Y} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X f \, d\mu \cdot \int_Y g \, d\nu.$$

Hinweis: Beachten Sie H4, Blatt 9.

Aufgabe H5: (**Zusatzaufgabe, 3 Extrapunkte**.) Wir betrachten das Intervall $[0,1]$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,1])$. Sei λ das Lebesgue-Maß und μ das Zählmaß auf $\mathcal{B}([0,1])$. Berechnen Sie für die charakteristische Funktion der Diagonalen $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x = y\}$ die iterierten Integrale

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} 1_D(x,y) d\lambda(x) \Big) d\mu(y) \quad \text{und} \quad \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} 1_D(x,y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x).$$

Warum steht Ihr Ergebnis nicht im Widerspruch zum Satz von Tonelli?

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 15.1.2016, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.
