Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

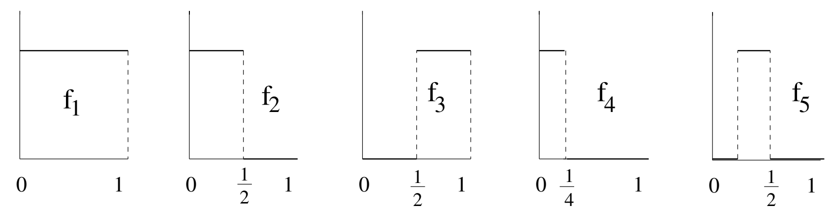
Reelle Analysis

Gruppenübungen für Woche 13

Aufgabe G1: Der wandernde Buckel. Zu $n \in \mathbb{N}$ seien ν und k die eindeutig bestimmten Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ mit $n = 2^\nu + k$ und $k < 2^\nu$. Wir definieren $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \left[\frac{k}{2^\nu}, \frac{k+1}{2^\nu}\right); \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Begründen Sie: Die Folge (f_n) konvergiert bzgl. $\|\,.\|_1$ gegen 0, aber sie ist für kein $x \in [0,1)$ punktweise konvergent.
2. Geben Sie eine auf $[0,1)$ punktweise konvergente Teilfolge von (f_n) an.



Aufgabe G2: Gegeben seien $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1 + x_3x_4$, $g(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_2x_3$.
Zeigen Sie, dass

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : f(x) = 2, g(x) = 0\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist, und geben Sie ihre Dimension an.

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte)

(1) Beweisen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, so ist $L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ für alle $p > 1$.

(2) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass $L^p(\mathbb{R}) \nsubseteq L^q(\mathbb{R})$ und $L^q(\mathbb{R}) \nsubseteq L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < q < \infty$.

Aufgabe H2: (4 Punkte)

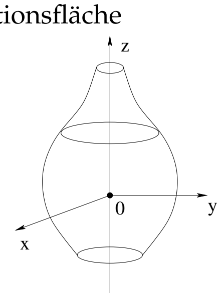
(1) Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, so dass die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x^tAx = 1\}$$

nicht leer ist. Beweisen Sie: Q ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$.

(2) Begründen Sie, dass $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ keine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe H3: (2+3+2 Punkte) Rotationsflächen im $\mathbb{R}^3$. Sei $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\nabla f(x) \neq 0$ auf $M = f^{-1}(0)$. M ist also eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Durch Rotation von M (als Teilmenge der xz-Ebene betrachtet) um die z-Achse entsteht die Rotationsfläche



$$R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0), f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0\}.$$

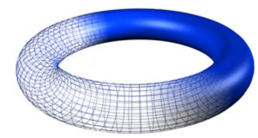
(1) Zeigen Sie: R ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$.

(2) M sei die Spur einer regulären C^1-Kurve $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall), d.h. $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Geben Sie eine Immersion $\Gamma : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ an, die R als Bild hat.

BITTE WENDEN!

(3) Durch Rotation der Kreislinie

$$\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + z^2 = r^2\}, \ 0 < r < a$$



um die z-Achse entsteht ein Torus T im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass T eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ ist, und schreiben Sie T als Bild einer Immersion.

Aufgabe H5: (Zusatzaufgabe, 4 Extra-Punkte) Die **Hermite-Polynome** $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{R}$ sind definiert durch

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}); \quad \text{dabei sei } H_0 := 1.$$

1. Zeigen Sie: H_n ist ein Polynom vom Grad n.
2. Für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ gilt $\int_{\mathbb{R}} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$.
3. Folgern Sie: Die Hermite-Funktionen $h_n(x) := e^{-x^2/2} H_n(x)$ bilden ein Orthogonalysystem in $L^2(\mathbb{R})$, d.h. $\int_{\mathbb{R}} h_n(x) h_m(x) dx = 0$ für $n \neq m$.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 29.1.2016, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.