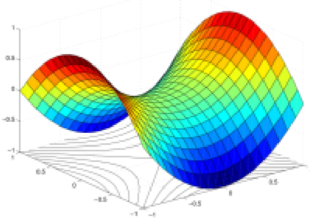
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

Reelle Analysis

Übungsblatt 13
WS 2015/16

Gruppenübungen für Woche 14

Aufgabe G1:



Gegeben sei das hyperbolische Paraboloid

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}.$$

(1) Begründen Sie, dass H eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie den Tangentialraum und den Normalenraum an H im Punkt $a = (1, 1, 0)$.

(2) Berechnen Sie die Oberfläche $vol_2(M)$ der Teilfläche

$$M = \{(x, y, z) \in H : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) (a) *Die stereographische Projektion.* Sei $N = e_n$ der Nordpol der Sphäre S^{n-1} im $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{N\}, \quad \psi(x) = N + \frac{2}{\|x - N\|^2} \cdot (x - N)\,.$$

Zeigen Sie:

1. $\psi(x)$ und x liegen auf derselben Halbgeraden durch 0.
2. ψ ist ein Diffeomorphismus. Geben Sie seine Umkehrabbildung an.
3. ψ bildet $S^{n-1} \setminus \{N\}$ homöomorph ab auf die Hyperebene $E_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.

(b) Warum ist es nicht möglich, die Sphäre S^{n-1} mit einer einzigen (globalen) Karte zu parametrisieren?

Aufgabe H2: (4 Punkte) Es sei $n \geq 3$. Beweisen Sie:

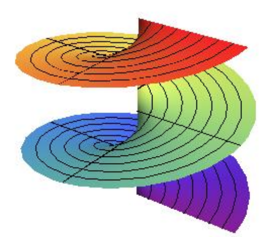
(1) Sind $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ und $T_a M_1 \neq T_a M_2$ für jedes $a \in M_1 \cap M_2$, so ist $M_1 \cap M_2$ eine $n-2$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(2) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und E eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, so dass $M \cap E$ nur aus einem Punkt a besteht, so gilt $E = a + T_a M$.

Aufgabe H3: (5 Punkte) Die Wendelfläche.

Sei $c > 0$ und $\gamma : (0, \infty) \times \mathbb{R} =: \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ c\varphi \end{pmatrix}.$$



(1) Zeigen Sie: Die Wendelfläche $W = \gamma(\Omega)$ ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$.

(2) Berechnen Sie das Integral von $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ über die Teilfläche $M = \{\gamma(r, \varphi) : (r, \varphi) \in (0, 1) \times (0, 2\pi)\}$.

BITTE WENDEN!

Aufgabe H4: Wir identifizieren den Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen $n\times n$-Matrizen mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ via

$$X=(x_{ij})\mapsto(x_{11},\dots,x_{1n},\,x_{21},\dots,x_{2n}\,,\dots x_{n1},\dots,x_{nn}).$$

(1) **(3 Punkte)** Beweisen Sie: Die **spezielle lineare Gruppe**

$$SL(n,\mathbb{R})=\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}:\,\det X=1\}$$

ist eine (n^2-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(2) **(Zusatzaufgabe, 2 Extra-Punkte)** Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $G=SL(n,\mathbb{R})$ in der Einheitsmatrix I gegeben ist durch

$$T_IG=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\,\mathrm{spur}A=0\}$$

Dabei ist $\mathrm{spur}A=\sum_{i=1}^n a_{ii}$ für $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 5.2.2016, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.