Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

Reelle Analysis

Übungsblatt 5
WS 2015/16

Gruppenübungen für Woche 6

Aufgabe G1: Sei X eine unendliche Menge. Zeigen Sie: $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra.

Aufgabe G2: Es sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Beweisen Sie für $A, B \in \mathcal{R}$:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Hieraus folgt insbesondere, dass $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) Begründen Sie, dass die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Borelmengen sind:

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x^2 + y^4 \leq 10\}$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, \ y \in [-1,1]\}$.

Aufgabe H2: (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Borel-σ-Algebra des $\mathbb{R}^d$ von jedem der folgenden Mengensysteme $\mathcal{E}_i$ erzeugt wird:

- $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : \ a,b \in \mathbb{Q}^d, \ a < b\}$
- $\mathcal{E}_2 = \{[a,b) : \ a,b \in \mathbb{Q}^d, \ a < b\}$
- $\mathcal{E}_3 = \{[a,b] : \ a,b \in \mathbb{Q}^d, \ a < b\}$
- $\mathcal{E}_4 = \{K \subset \mathbb{R}^d : K \text{ kompakt}\}$

Tip: Führen Sie einen Zirkelschluss, z.B. $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \mathcal{B}_d \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Aufgabe H3: (6 Punkte) Sei X eine unendliche Menge und

$$\mathcal{R} := \{A \subseteq X : \ \text{entweder } A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Setze $\mu(A) := 0$, falls A endlich und $\mu(A) := \infty$ sonst. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{R}$ ist ein Ring, aber keine σ-Algebra.
b) μ definiert einen Inhalt auf $\mathcal{R}$.
c) Ist X überabzählbar, so ist μ sogar ein Prämaß.

Aufgabe H4: (1 Punkt) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine σ-additive Abbildung. Zeigen Sie: Ist $\mu(\emptyset) > 0$, so ist $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

BITTE WENDEN!

Reelle Analysis

Aufgabe H5: (Zusatzaufgabe, 4 Extrapunkte) In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass es auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ kein Mass μ gibt mit

$$(*) \quad \mu([0,1]) = 1 \quad \text{und } \mu(x+A) = \mu(A) \text{ für alle } x \in \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dazu auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}.$$

Aus jeder der Äquivalenzklassen wählen wir einen Vertreter $x \in [0,1]$. (Hier geht das Auswahlaxiom ein.) Sei $X \subseteq [0,1]$ das so erhaltene Vertretersystem. Zeigen Sie:

1. $\mathbb{R} = \cup_{x\in X}(x+\mathbb{Q})$ und $\mathbb{R} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}(X+q)$, mit beide Male disjunkten Vereinigungen.
2. Ist μ ein Mass auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, welches $(*)$ erfüllt, so führt die Annahme $\mu(X) = 0$ ebenso wie die Annahme $\mu(X) > 0$ auf einen Widerspruch.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 27.11.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.

Literatur:

- H. Amann, J. Escher: Analysis 3, Birkhäuser
- K. Königsberger, Analysis 2, Springer (zu Mannigfaltigkeiten)
- H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie, de Gruyter
- J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, Springer
- D. L. Cohn: Measure Theory, Birkhäuser

Allgemein (auch weiterführend) zur reellen Analysis sehr empfehlenswert:

- G.B. Folland: Real Analysis, Wiley Interscience
- W. Rudin: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill

Einiges findet man auch in dem folgenden guten Stochastik-Lehrbuch:

- A. Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer