Reelle Analysis

Gruppenübungen für Woche 7

Aufgabe G1: Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Beweisen Sie: Für jede abzählbare Familie von Mengen $A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

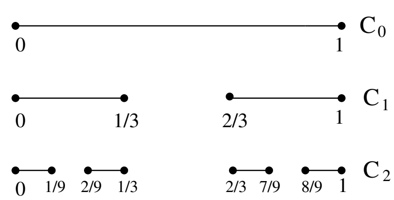
Aufgabe G2: Zeigen Sie für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$:

(a) $\lambda_d(\mathbb{R}^d) = \infty$.

(b) Ist $A \in \mathcal{B}_d$ beschränkt, so ist $\lambda_d(A) < \infty$. Gilt auch die umgekehrte Aussage?

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) Das Cantorsche Diskontinuum



Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $A_0 := \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k, 2k+1]$ und $A_n := \frac{1}{3}A_{n-1}$ für $n \geq 1$ definierte Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$, sowie

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\,, \quad C := A \cap [0,1].$$

C heißt Cantorsches Diskontinuum.

Die Skizze zeigt die ersten der Mengen $C_n := A_0 \cap \ldots A_n \cap [0,1]$. Als Schnitt der abgeschlossenen Menge A mit der kompakten Menge $[0,1]$ ist C kompakt.

(1) Zeigen Sie: C enthält kein Intervall positiver Länge (man sagt: C ist nirgends dicht).

(2) Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda_1(C)$ von C.

Aufgabe H2: (4 Punkte) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathcal{B}_d$ und $x \in \mathbb{R}^d$, so gilt auch $x + A \in \mathcal{B}_d$.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^d : x + A \in \mathcal{B}_d\}$.

Aufgabe H3: (3 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $\mathbb{R}$ sei mit der Borel-σ-Algebra versehen. Zeigen Sie: Ist f meßbar, so sind auch $|f|$ und $cf,\ c \in \mathbb{R}$ meßbar.
Folgt umgekehrt aus der Meßbarkeit von $|f|$ auch die Meßbarkeit von f? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe H4: (5 Punkte)

(1) **Zum Bildmaß.** Beweisen Sie Satz 5.4. der Vorlesung:
Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ zwei Meßräume, μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ und $\varphi : X \to X'$ eine messbare Abbbildung. Dann ist durch

$$\mu'(A') := \mu(\varphi^{-1}(A')),\ A' \in \mathcal{A}'$$

ein Maß auf $\mathcal{A}'$ definiert.

(2) Beweisen Sie, dass das Lebesgue-Mass λ_d auf $\mathcal{B}_d$ invariant ist unter orthogonalen Transformationen des $\mathbb{R}^d$, d.h. für jede Abbildung $T \in O(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\lambda_d(T^{-1}(A)) = \lambda_d(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}_d\,.$$

Erinnerung: $O(\mathbb{R}^d) = \{T \in End(\mathbb{R}^d) : \|Tx\|_2 = \|x\|_2\ \forall x \in \mathbb{R}^d\}$.

Aufgabe H5: (Zusatzaufgabe, 4 Extrapunkte) Wir betrachten die Mengensysteme

$$\mathcal{R} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar}\}$$
$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

Gemäß Aufgabe G1, Blatt 5 ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Zeigen Sie:

(1) $\mathcal{R}$ ist ein Ring, und $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$.

(2) Durch $\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

(3) Das durch $\mu(A) := 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$ definierte Prämaß auf $\mathcal{R}$ besitzt mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen zu einem Maß auf $\mathcal{A}$.

(4) Ist μ σ-endlich?

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 4.12.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.