Reelle Analysis

Gruppenübungen für Woche 9

Aufgabe G1: Uneigentliches (Regel-) Integral und Lebesgue-Integral.
Sei f eine Regelfunktion auf dem Intervall $[a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $b \leq \infty$. Zeigen Sie:
f ist genau dann Lebesgue-integrierbar über $[a,b)$, wenn das uneigentliche Regelintegral von f über $[a,b)$ *absolut* konvergiert, d.h. wenn $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. In diesem Fall stimmen Lebesgue- und Regelintegral überein:

$$\int_{[a,b)} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich für uneigentliche Integrale über Intervalle $(a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a$ und Intervalle $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Geben Sie ein Beispiel einer Regelfunktion auf $[0,\infty)$ an, deren uneigentliches Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergiert, die aber nicht Lebesgue-integrierbar über $[0,\infty)$ ist.

Aufgabe G2: Berechnen Sie unter sorgfältiger Begründung (auch der Existenz) den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

Hausübungen

Aufgabe H1: (1+2+2 Punkte) Beweisen Sie:

(a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann gilt für jedes $c > 0$ die *Ungleichung von Markov:*

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}\big) \leq \frac{1}{c}\|f\|_1 .$$

(b) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0,\infty]$ messbar mit $\int_X f\, d\mu < \infty$. Dann ist die Menge $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ eine μ-Nullmenge.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$ und $\int_U f d\lambda = 0$. Dann ist $f = 0$ auf U.

Aufgabe H2: (3 Punkte) Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} 1_{[0,1]} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 - 1_{[0,1]} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Was ist die Relevanz dieser Folge im Zusammenhang mit dem Lemma von Fatou?

Aufgabe H3: (4 Punkte) Beweisen Sie mittels Reihenentwicklung des Sinus und mit sorgfältiger Begründung aller Schritte:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin x\, dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!}$$

Aufgabe H4: (4 Punkte) Beweisen Sie durch geeignete Reihenentwicklung des Integranden, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert und den angegebenen Wert hat:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Achten Sie auf sorgfältige Begründung aller Schritte!

BITTE WENDEN!

Reelle Analysis

Aufgabe H5: (Zusatzaufgabe, 4 Extrapunkte) Vervollständigung eines Maßraumes.
Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, falls jede Teilmenge einer μ-Nullmenge messbar ist, d.h. falls gilt: Ist $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und $F \subset N$, so ist auch $F \in \mathcal{A}$. (Wegen der Monotonie von μ ist dann auch F eine μ-Nullmenge). Wir setzen

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\}, \ \ \mathcal{A}_0 := \{A \cup F : A \in \mathcal{A}, \exists N \in \mathcal{N} : F \subseteq N\}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{A}_0$ ist eine σ-Algebra, und μ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß μ_0 auf $\mathcal{A}_0$, so dass der Maßraum $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ vollständig ist.

Der Maßraum $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ heißt die Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Die Vervollständigung $(B_d)_0$ der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_d$ bzgl. λ_d heißt *Lebesgue-Borel-σ-Algebra*, und die Vervollständigung von λ_d wird ebenfalls als Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 18.12.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.