Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

Reelle Analysis

Übungsblatt 9
WS 2015/16

Gruppenübungen für Woche 10

Aufgabe G1: Gegeben sei eine Diagonalmatrix $S = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit *positiven* Diagonaleinträgen. Zeigen Sie: Für $A \in \mathcal{B}_d$ ist auch $S(A) := \{Sx : x \in A\} \in \mathcal{B}_d$, und

$$\lambda_d(S(A)) = \det S \cdot \lambda_d(A).$$

Aufgabe G2: Berechnen Sie das Volumen (d.h. das Lebesgue-Maß)

(1) der Kugel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(2) Des Ellipsoids $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}, \quad a, b, c > 0.$

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) (Maße mit Dichten) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ messbar. Beweisen Sie:

(a) Durch $\mu_g(A) := \int_A g \, d\mu$ ist ein Maß μ_g auf $(X, \mathcal{A})$ definiert. Es heißt das Maß mit Dichte g bzgl. μ und wird auch mit $g\mu$ bezeichnet.

(b) Für messbares $f : X \to [0, \infty]$ gilt

$$(*) \qquad \int_X f d\mu_g = \int_X fg \, d\mu.$$

Für messbares $f : X \to \mathbb{C}$ ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu_g)$ genau dann, wenn $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und in diesem Fall gilt ebenfalls die Identität $(*)$.

Aufgabe H2: (5 Punkte) Das Newton-Potential. Auf einem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^3$ sei ein endliches Borelmaß μ gegeben (d.h. $\mu(K) < \infty$), das als Massenverteilung auf K interpretiert wird. Das Newton-Potential im Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$, das durch die Anziehungskraft dieses Körpers erzeugt wird, ist (bis auf einen Normierungsfaktor) gegeben durch

$$u(x) = \int_K \frac{1}{\|x - y\|} \, d\mu(y).$$

Dabei bezeichnet $\|\,.\,\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:
u ist zweimal stetig differenzierbar und harmonisch auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$, d.h. $\Delta u(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

Aufgabe H3: (3 Punkte) Beweisen Sie: Für $f(x) = e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist $\widehat{f} = f$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. Stellen Sie für $\widehat{f}$ eine Differentialgleichung (1. Ordnung) auf. Welcher Differentialgleichung genügt f?

Aufgabe H4: (2 Punkte) Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$ zwei Messräume. Wir betrachten die Projektionen $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i, (x_1, x_2) \to x_i$. Zeigen Sie, dass die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ erzeugt wird von der Menge der $\pi_i^{-1}(A_i)$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$.

BITTE WENDEN!

Aufgabe H5: (4 Punkte) Sei $A \in \mathcal{B}_d$ und $f : A \to [0, \infty)$ messbar. Wir betrachten

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in A,\, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass $E \in \mathcal{B}_{d+1}$ und dass

$$\lambda_{d+1}(E) = \int_A f(x) d\lambda_d(x).$$

Bemerkung: Für $d = 1$ besagt dies, dass das Integral von f über A tatsächlich gleich dem Flächeninhalt unter dem Graphen von f ist.

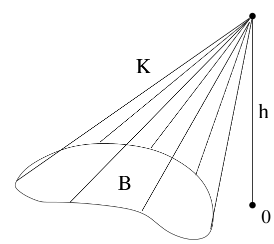
Aufgabe H6: (Zusatzaufgabe, 4 Extrapunkte). *Volumen eines Kegels.* Sei $B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt. Der Kegel mit Basis B und Höhe $h > 0$ ist definiert durch

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq h,\, x \in \big(1 - \frac{y}{h}\big)B\big\}.$$

(1) Zeigen Sie: K ist kompakt, und $\lambda_d(K) = \frac{h}{d} \cdot \lambda_{d-1}(B)$.
Hinweis: Aufgabe G1.

(2) Berechnen Sie das Volumen des Standard-Simplex

$$\Delta_d := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1, \ldots, x_d \geq 0,\, x_1 + \ldots + x_d \leq 1\}.$$



Hinweis: Verwenden Sie das Aufgabe G1!

****

Frohe Weihnachten und alles Gute zum neuen Jahr!

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 8.1.2016, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.