# Analysis I

Prof. Dr. Margit Rösler
Institut für Mathematik
Universität Paderborn

WS 2020/21

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

Dieses Skriptum ist begleitend zu meiner Vorlesung Analysis 1 im Wintersemester 2020/21 an der Universität Paderborn entstanden. Es basiert inhaltlich auf einer Reihe von Vorlesungen, die ich an der TU Clausthal und der Universität Paderborn gehalten habe. Im Bereich der bekannten Lehrbuchliteratur habe ich mich dabei immer wieder an der „Analysis 1“ von K. Königsberger (Springer-Verlag, 6. Auflage 2004) orientiert.

Für Kommentare und Korrekturen bin ich jederzeit dankbar.

Paderborn, den 4. Februar 2021,
Margit Rösler

# Kapitel 1

# Grundlagen

Die Analysis gehört zu den Grundpfeilern der Mathematik. Ihr Gegenstand ist das Studium funktionaler Abhängigkeiten. Dabei hat man es häufig mit kontinuierlichen Abläufen zu tun, bei denen Grenzprozesse eine wichtige Rolle spielen. Der Name Analysis kommt vom griechischen „analyein“ (= auflösen, zerlegen). Die Entwicklung der Analysis hat seit jeher in engem Wechselspiel mit naturwissenschaftlichen Fragestellungen gestanden (Astronomie, Physik). Als ihre Begründer werden oft die Erfinder der „Infinitesimalrechnung“ genannt, Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

## 1.1 Aussagen

Eine *Aussage* in der Mathematik ist ein sprachlicher Ausdruck, das entweder wahr ($w$) oder falsch ($f$) ist. Ist eine Aussage wahr, so sagt man auch, dass sie *gilt*.

**Beispiele:**
„$1+1=2$“ ist eine wahre Aussage.
„Guten Morgen“ ist keine mathematische Aussage.

**Verknüpfung von Aussagen.**
Aus gegebenen Aussagen lassen sich durch Verknüpfungen (wie *und*, *oder*, *nicht*) neue Aussagen bilden, deren Wahrheitswerte vom Wahrheitswert der beteiligten Komponenten abhängt.

(1) **Negation:** $\neg P$ (nicht $P$). Die Aussage $\neg P$ ist genau dann wahr, wenn $P$ falsch ist.

Beispiel: Sei $P =$ „Alle Kühe sind lila“. Dann ist $\neg P =$ „Es gibt eine Kuh, die nicht lila ist“.

**Achtung:** In der Mathematik heißt „es gibt ein“ stets: „es gibt mindestens ein“ !

(2) **Konjunktion:** $P \wedge Q$ ($P$ und $Q$).
Die Aussage $P \wedge Q$ ist genau dann wahr, wenn sowohl $P$ als auch $Q$ wahr ist.

(3) **Disjunktion:** $P \vee Q$ ($P$ oder $Q$).
Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen $P, Q$ wahr ist.
Die Disjunktion $\vee$ ist ein nicht-ausschließendes oder, d.h. kein „entweder-oder“.

Beispiel: Die Aussage „ $1+1=2$ oder es regnet“ ist wahr (unabhängig davon, ob es regnet oder nicht).

(4) **Implikation**: $P \Rightarrow Q$ (aus $P$ folgt $Q$).
Diese Aussage ist falsch, wenn $P$ wahr, aber $Q$ falsch ist. Ansonsten ist sie wahr.

Beispiel: Ist $P$ die Aussage „Es regnet“ und $Q$ die Aussage „Die Sonne scheint nicht“, so ist $P \Rightarrow Q$ die Aussage „Wenn es regnet, dann scheint die Sonne nicht“.

Diese Aussage ist genau dann falsch, wenn möglich ist dass es regnet und gleichzeitig die Sonne scheint.

**Achtung:** Die Implikation beschreibt in der Regel keine inhaltliche Kausalität im Sinne von „$P$ ist Ursache für $Q$“. Beispielsweise ist

$$\text{die Erde ist eine Scheibe} \Rightarrow 2+2=4$$

eine wahre Aussage!

(5) **Äquivalenz**: $P \Leftrightarrow Q := (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. ($P$ ist äquivalent zu $Q$).

Das Symbol $:=$ bedeutet, dass die linke Seite durch die Rechte Seite definiert wird.

Die Aussage $P \Leftrightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn $P$ und $Q$ entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Durch diese Operationen lassen sich auch kompliziertere Aussagen mit mehr Komponenten zusammensetzen. Die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen kann man übersichtlich anhand einer **Wahrheitstafel** zusammenstellen. Für die Operationen (1) - (5) sieht sie so aus:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |

**Definition.** Eine zusammengesetzte Aussage, die für jede Belegung in der Wahrheitstafel wahr ist, heißt *allgemeingültig* oder *Tautologie*.

**Bemerkung:** Eine *Definition* ist eine Festlegung eines mathematischen Begriffs.

**Beispiele für Tautologien:**

1. $P \vee \neg P$ ist eine Tautologie, denn

| $P$ | $\neg P$ | $P \vee \neg P$ |
|---|---|---|
| $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $w$ |

(Konvention: $\neg$ bindet stärker als $\vee$ oder $\wedge$.)

2. **Logische Distributivgesetze**:

$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R);$$
$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

Mit einer Wahrheitstafel sieht man leicht, dass diese Aussagen allgemeingültig sind.

3. **Kontrapositionsgesetz:** $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Diese Tautologie ist eine wichtige Regel fürs logische Schließen!

Beispiel: Die Aussage „Wenn die Sonne aufgegangen ist, dann läuten die Glocken“ ist äquivalent zu: „Wenn die Glocken nicht läuten, ist die Sonne nicht aufgegangen“.

**Beweise:** Ein Beweis ist eine Folge logischer Schlüsse, die zeigt, dass eine gegebene Aussage wahr ist. Dabei hat man es in der Regel mit Aussagen der Form $P \Rightarrow Q$ und $P \Leftrightarrow Q$ zu tun.

## 1.2 Mengen

**Definition nach Georg Cantor**: Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte (unseres Denkens) zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Diese Definition ist sehr vage! Tatsächlich ist eine präzisere Fundierung des Mengenbegiffs möglich (und für den strukturellen Aufbau der Mathematik auch erforderlich), doch das würde zu Beginn des Studiums mehr Verwirrung stiften als nützen. Wir stellen uns auf folgenden *pragmatischen Standpunkt:* Eine Menge ist gebildet, wenn feststeht, welche Objekte dazugehören.

**Schreibweisen:** Man schreibt

| | |
|---|---|
| $x \in A$ | falls das Objekt $x$ ein Element der Menge $A$ ist. |
| $x \notin A$ | sonst. |
| $A \subseteq B$ | falls die Menge $A$ eine *Teilmenge* von $B$ ist, d.h. jedes Element von $A$ ist auch Element von $B$. Hierfür schreibt man auch $B \supseteq A$ und nennt $B$ eine *Obermenge* von $A$. |
| $A = B$ | falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, d.h. falls $A$ und $B$ dieselben Elemente besitzen. |
| $A \subsetneq B$ | falls $A$ eine echte Teilmenge von $B$ ist, d.h. $A \subseteq B$ aber $A \neq B$. |
| $\emptyset$ | für die leere Menge (die Menge ohne Elemente) |

**Beschreibung von Mengen**:

a) **durch Aufzählung.** Beispiele:

$$A = \{1, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \textbf{Menge der natürlichen Zahlen}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} \qquad \textbf{Menge der ganzen Zahlen}$$

Achtung: Es gibt keine einheitliche Konvention, ob $0$ eine natürliche Zahl ist oder nicht. Wir verwenden die Konvention $0 \notin \mathbb{N}$.

b) **durch eine charakterisierende Eigenschaft.** Beispiel:

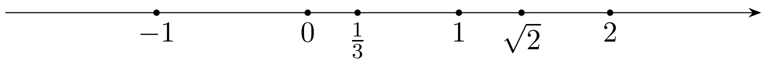
$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ ist gerade}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k\}. \end{aligned}$$

**Weitere Mengen von Zahlen:**

- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\}$ **Menge der rationalen Zahlen**

- $\mathbb{R}$ : **Menge der reellen Zahlen**.

Die Menge $\mathbb{R}$ wird oft als Zahlengerade veranschaulicht. Sind auf der Geraden die Punkte 0 und 1 festgelegt, so entspricht jede reelle Zahl genau einem Punkt auf der Geraden, und umgekehrt. In der Schule haben Sie die reellen Zahlen wahrscheinlich als Dezimalzahlen kennengelernt.




Wir werden im Verlauf der Vorlesung für die reellen Zahlen einen Satz grundlegender Eigenschaften (*Axiome*) angeben, durch die sie eindeutig charakterisiert sind. Es bestehen die echten Inklusionen

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Die letzte Inklusion werden wir in Kapitel 2 und 3 der Vorlesung beweisen: es gibt z.B. eine reelle Zahl $x = \sqrt{2} = 1,4142...$ mit $x^2 = 2$, aber es gibt keine rationale Zahl mit dieser Eigenschaft. Tatsächlich gibt es sehr viele reelle Zahlen, die nicht rational sind: die Menge $\mathbb{Q}$ ist sehr „löchrig“ im Zahlenstrahl.

Wir werden in Kapitel 2 bereits mit den reellen Zahlen arbeiten, um hinreichend interessante Beispiele behandeln zu können. Dabei setzen wir voraus, dass Ihnen die Rechenregeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ aus der Schule bekannt sind: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{array}{llr}
x + y = y + x\,; & xy = yx & \text{(Kommutativgesetze)} \\
(x + y) + z = x + (y + z)\,; & (xy)z = x(yz) & \text{(Assoziativgesetze)} \\
x + 0 = x\,; & x \cdot 1 = x & \\
x + (-x) = 0\,; & x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 & \text{sofern } x \neq 0 \\
x(y + z) = xy + xz & & \text{(Distributivgesetz)}
\end{array}$$

Tatsächlich finden sich diese Rechenregeln in den Körperaxiomen wieder, die wir in Kapitel 3.1 als Bestandteil der Axiome für die reellen Zahlen ausführlich behandeln werden.

**Einschub: Aussagen mit Quantoren**

In der Mathematik hat man es oft mit Aussagen folgender Art zu tun: „Für jedes $x \in X$ gilt die Aussage $P(x)$“. Oder: „Es gibt ein $x \in X$, so dass $P(x)$ erfüllt ist“. Dabei ist $X$ eine Menge, und $P(x)$ ist eine von $x \in X$ abhängige Aussage. Um solche Aussagen kompakt notieren zu können, verwendet man sogenannte Quantoren, nämlich den **Allquantor** $\forall$ und den **Existenzquantor** $\exists$. Wir werden folgende Typen von Aussagen mit Quantoren verwenden:

| Aussage | Schreibweise |
|---|---|
| Für alle $x \in X$ gilt $P(x)$ | $\forall x \in X : P(x)$ |
| Es gibt (mindestens) ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt | $\exists\, x \in X : P(x)$ |
| Es gibt genau ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt | $\exists!\, x \in X : P(x)$ |
| Es gibt kein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt | $\nexists\, x \in X : P(x)$ |

**Beispiele:**

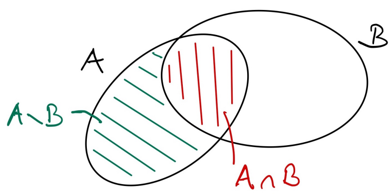
1. $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2$.
   Ausformuliert: „Es gibt eine $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$".
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
   Ausformuliert: „Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt ...."
3. $\forall x \in \mathbb{Q}\, \exists\, n \in \mathbb{N} :\; n \cdot x \in \mathbb{Z}$.
   Ausformuliert: „Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x \in \mathbb{Z}$".
   Das ist eine wahre Aussage. **Achtung:** Das hier auftretende $n \in \mathbb{N}$ hängt von $x$ ab!

**Mengenoperationen.**
Seien $A$ und $B$ Mengen. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
A \cup B &:= \{x : x \in A \,\vee\, x \in B\} && \text{(Vereinigung von } A \text{ und } B\text{)}\\
A \cap B &:= \{x : x \in A \,\wedge\, x \in B\} && \text{(Durchschnitt von } A \text{ und } B\text{)}\\
A \setminus B &:= \{x \in A : x \notin B\} && \text{(Komplement von } B \text{ in } A\text{)}
\end{aligned}
$$

$A \cup B$ ist also die Menge aller Objekte, die in $A$ oder in $B$ enthalten sind, etc.

Zur Veranschaulichung von Mengenoperationen sind **Venn-Diagramme** nützlich:




**1.1 Lemma.** *Sind $A, B, C$ Mengen, so gilt*

(1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *und* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
*(Assoziativität von $\cup$ und $\cap$).*

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
*(Distributivität von $\cup$ und $\cap$).*

**Bemerkung:** Ein *Lemma* ist eine einfache Aussage, oder auch eine Hilfsaussage.

*Beweis.* Wir beweisen den ersten Teil von Aussage (2), der Rest geht analog. Aufgrund des logischen Distributivgesetzes haben wir folgende Kette von Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff \big[x \in A\big] \wedge \big[(x \in B) \vee (x \in C)\big]\\
&\iff \big[(x \in A) \wedge (x \in B)\big] \vee \big[(x \in A) \wedge (x \in C)\big]\\
&\iff \big[x \in (A \cap B)\big] \vee \big[x \in (A \cap C)\big]\\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}
$$

□

Allgemeiner kann man auch Vereinigungen und Durchschnitte von beliebig vielen Mengen bilden:

**Definition.** Sie $I$ eine nichtleere Menge, und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge $A_i$ gegeben. (Die Menge $I$ fungiert als Indexmenge). Dann setzt man

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists\, i \in I : x \in A_i\}.$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall\, i \in I : x \in A_i\}.$$

Eine weitere wichtige Mengenoperation ist das kartesische Produkt:

**Definition.** Das *kartesische Produkt* zweier Mengen $A$ und $B$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$ :

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ferner setzt man $A^2 := A \times A$.

In einem geordneten Paar $(a, b)$ kommt es, im Gegensatz zur Menge $\{a, b\}$, auf die Reihenfolge der beiden Elemente an, d.h. es gilt

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'.$$

Bemerkung: Man kann das Paar $(a, b)$ präzise definieren als $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$. Auf diese Weise ist gekennzeichnet, dass $a$ die erste Komponente und $b$ die zweite Komponente des Paars ist.

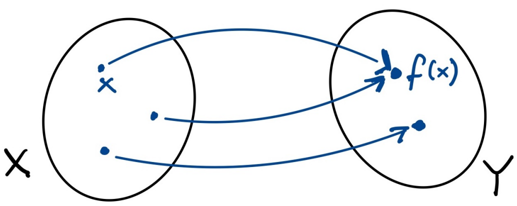
**Beispiel:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\circ, *\}$. Dann ist $A \times B = \{(1, \circ), (2, \circ), (3, \circ), (1, *), (2, *), (3, *)\}$.

## 1.3 Abbildungen

**Definition.** Seien $X$ und $Y$ zwei Mengen. Eine *Abbildung (Funktion)* von $X$ nach $Y$ ist eine Vorschrift $f$, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Man bezeichnet dieses Element mit $y = f(x)$ und schreibt

$$f : X \longrightarrow Y,\ x \mapsto f(x).$$

Die Menge $X$ heißt der *Definitionsbereich* von $f$, $Y$ der *Wertebereich* von $f$. Für jedes Element $x \in X$ nennt man $f(x)$ das *Bild* von $x$ unter $f$ oder auch den *Wert* von $f$ an der Stelle $x$.




Bei jedem $x \in X$ startet genau ein Pfeil. Aber es gibt möglicherweise Punkte aus $Y$, an denen kein Pfeil endet.

**Definition.** Der *Graph* der Abbildung $f : X \to Y$ ist die Menge

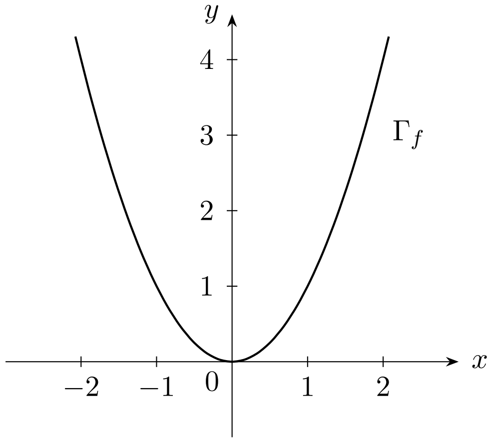
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Wir werden immer die Bezeichnung „Funktion" statt Abbildung verwenden, wenn der Wertebereich eine Menge von Zahlen ist.

**Beispiele:**

(1) $X = \{\text{alle Studierenden an der UPB}\}$. $f : X \to \mathbb{N},\ x \mapsto \text{Alter von } x$.

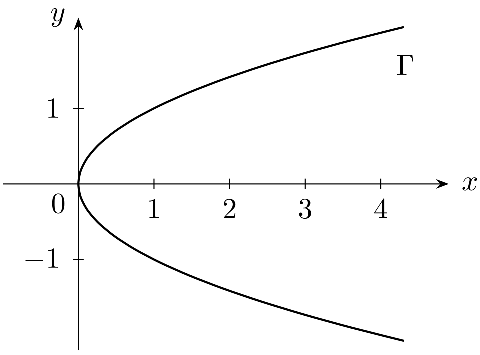
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
Der Graph $\Gamma_f$ ist eine Parabel mit Scheitel $(0,0)$.



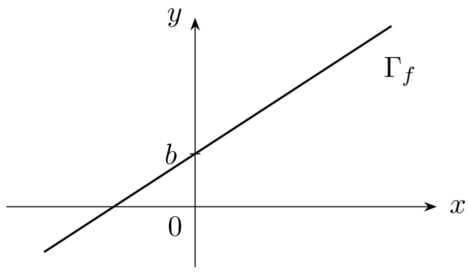

(3) Dagegen ist die Menge

$$\Gamma = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$$

*kein* Funktionsgraph, da z.B. $(1,1) \in \Gamma$ und $(1,-1) \in \Gamma$.




(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R}$ fest).
Eine Funktion dieser Bauart nennt man *linear*, genauer : *affin-linear*. Ihr Graph ist eine Gerade mit Steigung $a$ und Achsenabschnitt $b$.




(5) Eine Verallgemeinerung von Beispielen (2) und (4) sind *Polynomfunktionen* (in der Schule auch ganzrationale Funktionen genannt):

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

(6) Die *identische Abbildung* auf einer Menge $X$ ist die Abbildung

$$id = id_X : X \to X,\ x \mapsto x.$$

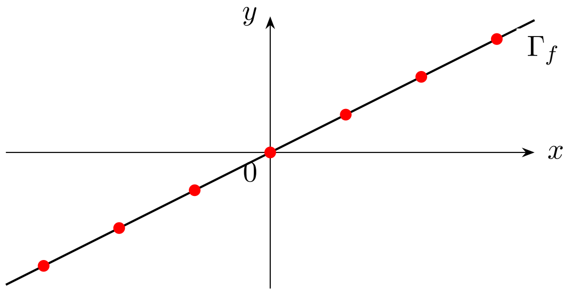
**Beachte:** Für die Charakterisierung einer Abbildung ist neben der Abbildungsvorschrift auch der Definitionsbereich wichtig! Ein Beispiel: Die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x$$

besitzen zwar dieselbe Abbildungsvorschrift, aber die Definitionsbereiche sind verschieden, es handelt sich also um verschiedene Funktionen. $g$ ist eine *Einschränkung (Restriktion)* von $f$, wir schreiben den Sachverhalt als

$$g = f|_{\mathbb{Z}}\,.$$

Der Graph von $f$ ist eine Gerade, der Graph von $g$ besteht aus einzelnen Punkten.




**Definition.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt die in $Y$ enthaltene Menge

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

das *Bild von* $A$ unter $f$.
Die Menge $f(X) \subseteq Y$ wird das *Bild von* $f$ genannt.

(ii) Für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt die in $X$ enthaltene Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

das *Urbild* von $B$ unter $f$.

**Achtung:** Die Bezeichnung $f^{-1}(B)$ ist etwas gewöhnungsbedürftig, denn sie besagt **nicht**, dass $f^{-1}$ eine Abbildung wäre!

**Beispiel:** Betrachte die Funktion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$. Dann gilt

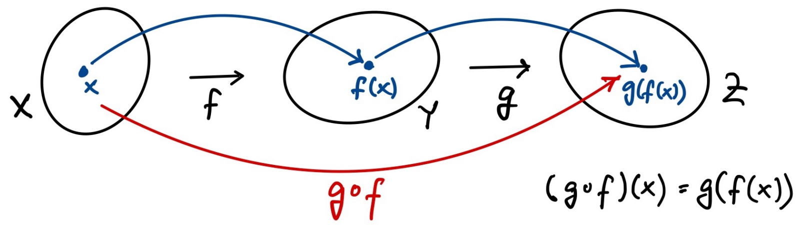
$$f(\{-2, 5\}) = \{4, 25\},\ f^{-1}(\{4, 25\}) = \{\pm 2, \pm 5\},\ f^{-1}(\{3\}) = \emptyset,\ f^{-1}(\{3, 4\}) = \{\pm 2\}.$$

**Komposition von Abbildungen.**

Sofern die Definitions- und Bildbereiche zusammenpassen, kann man Abbildungen verknüpfen, d.h. hintereinanderausführen.

**Definition.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die *Komposition* (oder *Verknüpfung*) von $f$ und $g$ ist die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g\big(f(x)\big).$$




**Beispiel.** Wir betrachten die Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1, \; g(x) = x^2.$$

Wir können $f$ und $g$ in beiden Reihenfolgen verknüpfen. Es ist

$$(g \circ f)(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1, \quad (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1.$$

Wir sehen, dass $f \circ g \neq g \circ f$. Die Reihenfolge bei der Komposition ist also wichtig!

Es gilt aber:

**1.2 Satz (Assoziativität der Komposition).** *Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Abbildungen. dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

*Beweis.* Wir rechnen nach: Für jedes $x \in X$ gilt

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g\big(f(x)\big)\big) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = \big((h \circ g) \circ f\big)(x).$$

$\square$

**Eigenschaften von Abbildungen.**

**Definition.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(1) $f$ heißt **injektiv**, falls es zu jedem $y \in Y$ *höchstens* ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

(2) $f$ heißt **surjektiv**, falls es zu jedem $y \in Y$ *mindestens* ein $x \in X$ gibt mit $y = f(x)$.

(3) $f$ heißt **bijektiv**, falls $f$ sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

**Also:**

- $f$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- $f$ ist genau dann surjektiv, wenn folgendes gilt:

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : y = f(x).$$

  Also: $f$ surjektiv $\iff f(X) = Y$.

- $f$ ist genau dann bijektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $y = f(x)$. Also:

$$f \text{ bijektiv } \iff \forall y \in Y \, \exists! \, x \in X : y = f(x).$$

**Beispiele.**

(1) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$ ist injektiv, denn: $n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m$. Sie ist nicht surjektiv, da $1 \notin f(\mathbb{N})$.

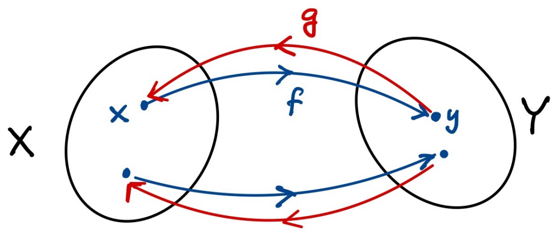
(2) Die Abbildung
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \geq 2 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$
ist surjektiv. Sie ist aber nicht injektiv, da $f(1) = 1 = f(2)$.

(3) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$ ist bijektiv.

(4) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie ist auch nicht surjektiv, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Die Umkehrabbildung.**

Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Es gibt also zu jedem $y \in Y$ genau ein Element $x \in X$ mit $y = f(x)$. Wir können daher durch
$$g(y) := x \quad \text{falls } f(x) = y.$$
eine Abbildung $g : Y \to X$ definieren. Damit gilt
$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y.$$
Im folgenden Diagramm entsteht $g$ aus $f$ dadurch, dass die Abbildungspfeile umgedreht werden.




**Definition.** Die Abbildung $g : Y \to X$ heißt die *Umkehrabbildung (Umkehrfunktion)* von $f$. Man schreibt $g = f^{-1}$.

Falls $f : X \to Y$ bijektiv ist, gilt also:
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

**1.3 Satz.** *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$f$ ist bijektiv.*

(2) *Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ mit*
$$(*) \qquad g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y.$$
*In diesem Fall ist $g = f^{-1}$.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass die beiden Implikationen $(1) \Longrightarrow (2)$ und $(2) \Longrightarrow (1)$ gelten.
$(1) \Longrightarrow (2):$ Dis folgt bereits aus unseren vorherigen Überlegungen.
$(2) \Longrightarrow (1):$ $f$ ist injektiv, denn: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wegen $g \circ f = id_X$ erhalten wird hieraus durch Anwenden von $g$ auf beiden Seiten:

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

$f$ ist auch surjektiv, denn: Sei $y \in Y$ beliebig. Wegen $f \circ g = id_Y$ gilt $y = f(g(y))$. Wir setzen nun $x := g(y)$. Dann ist $x \in X$, und wir haben $y = f(x)$, d.h. $y$ liegt im Bild von $f$. Die Abbildung $g$ in Aussage (2) ist ausserdem eindeutig, weil wir ja wissen dass $f(g(y)) = y$ ist, und dass $f$ injektiv ist. Da auch $f^{-1}$ die Eigenschaften $(*)$ hat, folgt daher $g = f^{-1}$. □

**Beispiel:** Betrachte die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 3x + 2$. Ist $f$ bijektiv? Wenn ja, was ist die Umkehrfunktion? Um das zu eruieren, versuchen wir die Gleichung $y = 3x + 2$ nach $x$ aufzulösen. Das ist hier einfach:

$$y = 3x + 2 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}(y - 2).$$

Obige Gleichung hat als für jedes $y \in \mathbb{Q}$ eine eindeutige Auflösung nach $x$. Das zeigt: $f$ ist bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y - 2)$.

# Kapitel 2

# Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

## 2.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Beim systematischen Aufbau der Mathematik werden sämtliche Aussagen und Sätze einer mathematischen Theorie nach logischen Regeln aus einigen (in sich widerspruchsfreien) Grundannahmen abgeleitet, den sogenannten *Axiomen*. Auch für die natürlichen Zahlen gibt es ein Axiomensystem, durch welches diese eindeutig charakterisiert werden können, die sogenannten *Peano-Axiome*. Eines der Peano-Axiome ist das

**Induktionsaxiom:** Sei $M$ eine Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:

(1) $1 \in M$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in M \Longrightarrow n+1 \in M$.

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Sprachlich ausgedrückt: Ist $M$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ die 1 enthält, und ist mit $n$ auch der Nachfolger $n+1$ in $M$ enthalten, so gilt $M = \mathbb{N}$. Oder: Beginnt man bei 1, so erreicht man durch fortlaufendes Zählen alle natürlichen Zahlen.

Aus dem Induktionsaxiom ergibt sich ein wichtiges Beweisprinzip für Aussagen, die natürliche Zahlen involvieren, das Prinzip der vollständigen Induktion.

**2.1 Satz (Prinzip der vollständigen Induktion).** *Gegeben sei eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $P(n)$. Angenommen es gelten die folgenden beiden Sachverhalte:*

(I) *$P(1)$ ist wahr. (Induktionsanfang)*

(II) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. (Induktionsschritt)*

*Dann ist $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Diese Menge erfüllt offenbar die beiden Eigenschaften (1) und (2) des Induktionsaxioms. Also folgt $M = \mathbb{N}$. □

Das Prinzip der vollständigen Induktion lässt sich gut durch den *Dominoeffekt* veranschaulichen: Wir haben eine unendlich lange Kette von Dominosteinen aufgestellt, und zwar so, dass jeder Stein, wenn er umkippt, den nachfolgenden trifft, so dass dieser ebenfalls umkippt. Kippen wir den ersten Stein um, so kippen nach und nach alle unendlich vielen Dominosteine.

**Verschiebung des Induktionsanfangs:** Gegeben seien Aussagen $P(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ (wobei die Startzahl $n_0 \in \mathbb{Z}$ gegeben ist). Dann gilt das Prinzip der vollständigen Induktion entsprechend mit Induktionsanfang bei $n = n_0$ anstelle von $n = 1$. Das sollte anschaulich klar sein. Um es rigoros zu begründen, betrachte man die umindizierten Aussagen $\widetilde{P}(n) := P(n + n_0 - 1)$, $n \in \mathbb{N}$, und wende auf diese das Prinzip der vollständigen Induktion an.

**Rekursion.**

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ ist durch ihre Werte $f_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Man nennt eine solche Abbildung eine *Folge* in $X$ und schreibt sie in der Form $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ oder $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Folgen werden oft *rekursiv definiert*, d.h. durch

(i) Angabe des Startwertes $f_1$.

(ii) Angabe einer Vorschrift, nach der $f_{n+1}$ aus $f_n$ (oder allgemeiner aus $f_1, \ldots, f_n$) zu bestimmen ist.

Aus dem Induktionsaxiom folgt, dass hierdurch eine eindeutige Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert ist.

**Beispiel:** Setze $f_1 := 2,\ f_{n+1} := f_n + 3$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$.

## 2.2 Beispiele zur vollständigen Induktion

**Vorbereitung: Summen und Produkte**

**Definition.** Gegeben sei eine Menge reeller Zahlen $a_k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ sei und $m, n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen mit $m \leq n$. Man setzt dann

$$(*) \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k \ :=\ a_m + \ldots + a_n\,; \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Der Index $k$ wird als Laufindex bezeichnet.

**Beispiel:** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{2} k^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 6\,; \quad \prod_{k=2}^{4}\left(\frac{k}{2}\right) \ =\ 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$

Manchmal ist es bequem, auch Summen bzw. Produkte zuzulassen, bei denen der obere Index kleiner ist als der untere. Dazu trifft man folgende

**Konvention:** Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n < m$ setzt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \ \text{(leere Summe)}; \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \ \text{(leeres Produkt)}.$$

**Achtung:** Die Definition $(*)$ ist etwas heuristisch, weil wir eigentlich nicht geklärt haben, was die Punkte $\ldots$ bedeuten. Eine präzise Definition muß rekursiv erfolgen. Zum Beispiel definiert man eine Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

$$\sum_{k=1}^{0} a_k := 0\,; \quad \sum_{k=1}^{n} a_k := \Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big) + a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

**Beispiele:**

(1) **Die Fakultät.** Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Zahl $n!$ (sprich: $n$ Fakultät) rekursiv durch

$$0! := 1\,; \quad n! := n \cdot (n-1)! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist also

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

(2) **Potenzen.** Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$x^n := \prod_{k=1}^{n} x\,. \quad \text{(Das ist } n \text{ mal derselbe Faktor } x\text{).}$$

Insbesondere gilt damit für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$x^0 = 1.$$

Also ist auch $0^0 = 1$ (!)

**Potenzgesetze:** Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}\,; \quad \big(x^m\big)^n = x^{mn} \quad (n \text{ Faktoren } x^m).$$

**Achtung:** Im Allgemeinen ist $(x^n)^m \neq x^{n^m} = x^{(n^m)}$ !

Die Potenzgesetze können mit vollständiger Induktion bewiesen werden; wir wollen diese wichtige Beweistechnik aber an etwas interessanteren Beispielen einüben.

**Beispiel 1: Die Arithmetische Summe.** Wir wollen die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$ berechnen, also den Wert der Summe

$$1 + \ldots + n \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\,.$$

Diese Aufgabe hat der berühmte Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß als zehnjähriger Schüler für $n = 100$ folgendermaßen gelöst:

$$1 + \cdots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Setzt man $n = 100$, so gilt also $\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$.

Wir haben damit bereits eine Vermutung, die wir nun mit vollständiger Induktion beweisen werden:

**2.2 Satz (Arithmetische Summenformel).** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{1}{2} n(n+1).}$$

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass die Aussage

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
(I) Induktionsanfang $n = 1$: $P(1)$ ist tatsächlich wahr, da $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ gilt.
(II) Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir nehmen an, $P(n)$ sei wahr (das ist die sogenannte **Induktionsvoraussetzung**). Wir schreiben

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big) + (n+1).$$

Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung (kurz: I.V.) auf die abgespaltene Summe rechts an und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \underset{I.V.}{=} \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Dies besagt, dass auch $P(n+1)$ wahr ist, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen. Mit vollständiger Induktion folgt nun aus (I) und (II) dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. □

**Beispiel 2: Die geometrische Summenformel.**

**2.3 Satz.** *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$$

Für $x = 1$ würde auf der rechten Seite eine Division durch Null entstehen, daher ist dieser Fall in der Formel ausgeschlossen. Im Fall $x = 1$ ist der Wert der Summe links offenbar gleich $n+1$.

*Beweis.* Mit Induktion nach $n$.
(I) Induktionsanfang $n = 0$: $x^0 = 1 = \dfrac{1 - x^1}{1 - x}$, die Aussage ist also richtig für $n = 0$.
(II) Induktionsschritt $n \to n+1$: Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \Big(\sum_{k=0}^{n} x^k\Big) + x^{n+1} \underset{I.V.}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen. □

**Beachte:** Ein Beweis mit vollständiger Induktion setzt voraus, dass man die zu beweisende Aussage kennt, bzw. zumindest eine Vermutung dafür hat. Eine solche Vermutung kann man manchmal durch explizite Rechnungen für kleine (oder spezielle) Werte von $n$ gewinnen.

## 2.3 Etwas Kombinatorik

Kombinatorik – zumindest in ihrer elementaren Form, wie wir sie hier betreiben – ist die Lehre vom „geschickten Abzählen".

**Bezeichnung:** Für eine endliche Menge $A$ bezeichnen wir mit $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$. $|A|$ heißt die *Mächtigkeit* von $A$.

**Aufgabe:** Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine (nichtleere) Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ (d.h. wir nehmen an, dass die $a_i$ in obiger Aufzähling paarweise verschieden sind). Wieviele verschiedene Anordnungen der Elemente $a_1, \dots, a_n$ gibt es?

Mögliche Anordnungen, falls $n = 2$: $a_1 a_2$, $a_2 a_1$. Die möglichen Anordnungen entsprechen den Anordnungen 12 und 21 der Indizes $1, 2$. Falls $n = 3$, so sind die möglichen Anordnungen der Indizes: $123, 132, 213, 231, 312, 321$.

Jede Anordnung von $a_1, \dots, a_n$ ist von der Form $f(a_1) \dots f(a_n)$ mit einer eindeutigen Bijektion $f : A \to A$, und jede solche Bijektion liefert eine Anordnung von $a_1, \dots, a_n$.

**Definition.** Sei $M$ eine (beliebige) Menge. Eine bijektive Abbildung $f : M \to M$ heißt eine *Permutation* von $M$.

**2.4 Satz.** *Sei $A$ eine endliche Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Anzahl der Permutationen von $A$ gleich $n!$.*

*Beweis.* Mit Induktion nach $n$.
(I) $n = 1$: Es gibt 1 Permutation einer einelementigen Menge.
(II) Induktionsschritt $n \to n + 1$: Sei $A$ eine Menge mit $|A| = n + 1$. Wir besetzen zunächst Position 1. Dafür gibt es $n+1$ Möglichkeiten. Ist Position 1 besetzt, so verbleiben $n$ Elemente, mit denen wir die Positionen 2 bis $n + 1$ besetzen müssen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es hierfür $n!$ Möglichkeiten. Wir erhalten also insgesamt $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ mögliche Anordnungen der Elemente von $A$. □

Die Fakultät $n!$ wächst sehr rasch bei wachsendem $n$. Z.B. ist $10! = 3628800$ und $1000! > 4 \cdot 10^{2568}$. Im Gegensatz zur arithmetischen Summe gibt es keine geschlossene Formel für $n!$. Daher sind Formeln, mit denen man $n!$ für große $n$ näherungsweise berechnen kann, wichtig.

**Definition (Binomialkoeffizienten).** Für natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ setzt man

$$\boxed{\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n - j + 1}{j} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.}$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen Binomialkoeffizienten, gesprochen: „$k$ aus $n$" (oder „$n$ über $k$").

**Beachte:** Für $k = 0$ haben wir ein leeres Produkt, also ist

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

**Weitere Folgerungen:**

1. $\displaystyle\binom{n}{1} = n\,;\ \binom{n}{n} = 1.$

2. $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$.

3. Für $0 \le k \le n$ gilt
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

**2.5 Satz (Rekursionsformel).** *Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$ gilt*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

*Beweis.* Übung! □

Aus dieser Rekursion folgt sofort mit Induktion nach $n$, dass die Binomialkoeffizienten stets ganzzahlig sind – was aus ihrer Definition nicht unmittelbar ersichtlich ist:

**2.6 Korollar.** *Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist* $\displaystyle\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$.

Obige Rekursionsformel läßt sich schön am *Pascalschen Dreieck* veranschaulichen; dabei entstehen ein Binomialkoeffizient in Zeile $n \in \mathbb{N}$ durch Addition der schräg über ihm liegenden Koeffizienten in Zeile $n-1$.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

**2.7 Satz.** *Die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge $M$ ist* $\displaystyle\binom{n}{k}$.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst die Randfälle: Falls $k > n$, so besitzt $M$ keine $k$-elementigen Teilmengen; falls $k = 0$, so besitzt sie genau eine, nämlich die leere Menge. Sei nun $0 \le k \le n$. Wir veranschaulichen uns die Menge $M$ als eine Menge von Kugeln in einer Urne, die mit den Nummern 1 bis $n$ versehen sind. Wir ziehen nun $k$ Kugeln ohne Zurücklegen (d.h. eine bereits gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug nicht wieder zurückgelegt), wobei wir die

Reihenfolge der Züge notieren. Dann gibt es beim 1. Zug $n$ Möglichkeiten eine Kugel zu ziehen, beim 2. Zug noch $n-1$ Möglichkeiten usw., bis beim $k$-ten Zug schließlich noch $n-k+1$ Möglichkeiten bestehen, eine Kugel zu ziehen. Insgesamt sind dies $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ Möglichkeiten, $k$ Kugeln unter Beachtung der Reihenfolge zu ziehen. Nach Satz 2.4 kommt dabei jede $k$-elementige Menge von Kugeln in $k!$ verschiedenen Anordnungen (Reihenfolgen) vor. Die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $M$ ist daher gegeben durch

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

□

**Beispiel:** Beim Zahlenlotto „6 aus 49“ werden 6 von 49 nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es gibt $\binom{49}{6} = 13983816$ mögliche Ziehungen (die Reihenfolge der gezogenen Kugeln ist irrelevant). Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige ist daher ungefähr $1 : 14\cdot 10^6$!

Die Binomialkoeffizienten sind nicht nur von Bedeutung in der Kombinatorik, sondern ebenso in der Analysis. Für gegebene reelle Zahlen $x, y$ möchten wir die Potenzen $(x+y)^n$ mit beliebigen Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ berechnen. Für kleine Werte von $n$ ist das schnell zu bewerkstelligen:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass hier die Binomialkoeffizienten auftreten. Tatsächlich gilt allgemein:

**2.8 Satz (Binomischer Satz).** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und beliebige Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.}$$

Insbesondere gilt (mit $y = 1$): $\quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,.$

*Beweis.* Mit Induktion nach $n$.

(I) Induktionsanfang $n = 0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$.

(II) Induktionsschritt $n \to n+1$: Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n = (x+y)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) && \text{(nach I.V.)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} && \text{(Distributivgesetz)}
\end{aligned}$$

Um in beiden Summen einheitliche Exponenten zu erhalten, führen wir nun in der ersten Summe eine Indexverschiebung durch: wir verwenden, dass

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \qquad (\text{für } a_k \in \mathbb{R}).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\ &= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^k y^{n-k+1},\end{aligned}$$

wobei wir zuletzt die Summanden mit $k=0$ und $k=n+1$, die jeweils nur in einer der beiden Summen auftauchen, abgespalten haben. Nun können wir in der Klammer $[\dots]$ die Rekursionsformel der Binomialkoeffizienten (Satz 2.5) verwenden, die beiden separaten Summanden wieder eingliedern, und erhalten so schließlich

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.$$

Damit ist der Induktionschritt abgeschlossen. $\square$

# Kapitel 3

# Die reellen Zahlen

## 3.1 Motivation

In der Geschichte der Mathematik war stets eine wesentliche Motivation für die Erweiterung bestehender Zahlbereiche der Wunsch, möglichst allgemeine Gleichungen innerhalb des verfügbaren Zahlbereichs lösen zu können. So ist die Erweiterung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ motiviert durch das Ziel, beliebige Gleichungen der Form

$$x + n = m \quad \text{mit } n, m \in \mathbb{N}$$

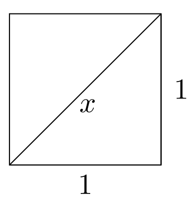
lösen zu können. Beachte, dass eine solche Gleichung, obwohl sie durch natürliche Zahlen beschrieben wird, im Allgemeinen keine Lösung in $\mathbb{N}$ hat, sie ist aber stets lösbar in $\mathbb{Z}$. Das nächste Ziel, Gleichungen der Form

$$x \cdot n = m \quad \text{mit } n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

lösen zu können, führt analog auf die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zur Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Tatsächlich sind dann in $\mathbb{Q}$ alle Gleichungen der Form $x + a = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und $x \cdot a = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, eindeutig auflösbar. Dies ist ein zentraler Aspekt der Körperstruktur von $\mathbb{Q}$ (siehe unten). Will man aber auch Gleichungen der Form

$$(*) \quad x^n = m \quad \text{mit } n, m \in \mathbb{N}$$

lösen, so ist das in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht möglich. Betrachtet man z.B. ein Quadrat der Seitenlänge $1$, so genügt die Länge $x$ seiner Diagonalen der Gleichung




$$x^2 = 2.$$

Bereits die Pythagoräer (im 6. Jahrh. v. Chr.) erkannten, dass diese einfache quadratische Gleichung keine rationale Lösung besitzt. Wir werden das in den Übungen beweisen. Weil die Pythagoräer aber überzeugt waren, dass sich derartige geometrische Verhältnisse stets durch rationale Zahlen beschreiben lassen, wurde durch diese Erkenntnis ihr philosophisches Weltbild erschüttert. Wir werden sehen, dass sich mit der Erweiterung von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auch Gleichungen der Form $(*)$ lösen lassen, und allgemeiner alle Gleichungen der Form $x^a = b$ mit $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$. Es gibt präzise Konstruktionen der Zahlbereichserweiterungen

$$\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R},$$

wobei *Erweiterung* besagt, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. In dieser Vorlesung setzen wir die Menge der rationalen Zahlen als gegeben voraus. Für die Konstruktion der in der Analysis besonders wichtigen reellen Zahlen aus den rationalen gibt es verschiedene Methoden. Die wichtigste Methoden sind sogenannte Dedekindschen Schnitte sowie die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mittels Cauchyfolgen. Beide Methoden erfordert einigen Aufwand und analytische Vorarbeiten. Da wir aber in dieser Vorlesung möglichst bald mit den reellen Zahlen auf gesichertem Fundament arbeiten möchten, wählen wir für ihre Einführung die gängige *axiomatische Methode*, d.h. wir charakerisieren $\mathbb{R}$ durch einen Satz von Axiomen. Tatsächlich lässt sich beweisen, dass es (bis auf Umbenennungen) genau eine Menge gibt, die diese Eigenschaften hat, und dass sie übereinstimmt mit der Menge der Zahlen, die man durch eines der oben genannten konstruktiven Verfahren erhält. Die erste dieser axiomatischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$, zu der wir nun kommen, ist die Körperstruktur.

## 3.2 Körper

**Definition.** Ein *Körper* ist eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Operationen $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x + y$ (die Addition), sowie $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (die Multiplikation), so dass folgende Axiome erfüllt sind.

**1. Axiome der Addition:**

(A1) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$. *(Assoziativität)*

(A2) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x + y = y + x$. *(Kommutativität)*

(A3) Existenz eines *neutralen Elements*: Es existiert ein Element $0 \in \mathbb{K}$ *(Null)* mit

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{K}.$$

(A4) Existenz von *Inversen*: Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ existiert ein $y \in \mathbb{K}$ mit $x + y = 0$.

**2. Axiome der Multiplikation:**

(M1) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. *(Assoziativität)*

(M2) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$. *(Kommutativität)*

(M3) Existenz eines *neutralen Elements*: Es existiert ein Element $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *(Eins)* mit

$$x \cdot 1 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{K}.$$

(M4) Existenz von *Inversen*: Zu jedem $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert ein $z \in \mathbb{K}$ mit $x \cdot z = 1$.

**3. Distributivgesetz:**

(D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

**Bemerkungen:**

1. Um die Operationen zu spezifizieren, schreibt man für einen Körper oft $(\mathbb{K},+,\cdot)$. Die Elemente eines Körpers nennen wir oft auch *Zahlen*, da man mit ihnen rechnet wie mit rationalen (oder reellen) Zahlen.
2. Eine Menge $\mathbb{K}$ mit einer Operation $+$, welche die Eigenschaften (A1)–(A4) erfüllt, heißt *abelsche Gruppe*. $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe.
3. Wichtig bei obigen Axiomen ist, dass man bei Addition und Multiplikation nicht aus $\mathbb{K}$ herausfällt: Für $x,y\in\mathbb{K}$ gilt stets $x+y,\ x\cdot y\in\mathbb{K}$.
4. Man schreibt meist kurz $xy$ statt $x\cdot y$. Ausserdem rechnet man *Punkt vor Strich*, d.h. $xy+z=(xy)+z\neq x(y+z)$.

**3.1 Satz (Folgerungen aus den Körperaxiomen).** *Sei $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ein Körper. Dann gelten:*

(1) *$0$ und $1$ sind eindeutig bestimmt.*

(2) *Inverse bzgl. beiden Operationen sind eindeutig bestimmt, d.h. zu jedem $x\in\mathbb{K}$ gibt es genau ein $y\in\mathbb{K}$ mit $x+y=0$, analog für die Multiplikation.*

***Bezeichnung:*** *Mit $-x$ bezeichnen wir das additive Inverse von $x\in\mathbb{K}$, mit $x^{-1}=\frac{1}{x}$ das multiplikative Inverse von $x\neq 0$.*

(3) *Für beliebige $a,b\in\mathbb{K}$ hat die Gleichung $a+x=b$ eine eindeutige Lösung in $\mathbb{K}$, nämlich*

$$x=b+(-a)=:b-a.\quad \textit{(Subtraktion)}$$

*Falls $a\neq 0$, so hat auch die Gleichung $a\cdot x=b$ eine eindeutige Lösung in $\mathbb{K}$, nämlich*

$$x=b\cdot\frac{1}{a}=:\frac{b}{a}.\quad \textit{(Division)}$$

(4) *$-(-x)=x$ ; ferner gilt für $x\neq 0$: $(x^{-1})^{-1}=x$.*

(5) *Für alle $x\in\mathbb{K}$ gilt: $x\cdot 0=0$.*

(6) *$xy=0\iff x=0\vee y=0$.*

(7) *$-(x+y)=-x-y$ . Falls $xy\neq 0$, so gilt auch $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$.*

(8) *$(-x)y=-xy$ ; insbesondere: $(-1)\cdot y=-y$. Ferner: $(-x)\cdot(-y)=xy$.*

*Beweis.* (1) Beweis für $0$ (für $1$ analog): Sei auch $0'\in\mathbb{K}$ neutral bzgl. der Addition. Dann folgt

$$0\underset{(A3)}{=}0+0'\underset{(A2)}{=}0'+0\underset{(A3)}{=}0'.$$

(2) Für die Addition (für die Multiplikation analog): Sei $x+y=0=x+y'$. Dann folgt

$$y\underset{(A3)}{=}y+0=y+(x+y')\underset{(A1)}{=}(y+x)+y'\underset{(A2)}{=}(x+y)+y'=0+y'\underset{(A2)}{=}y'+0\underset{(A3)}{=}y'.$$

(3) Für „$+$“: Wir schließen zunächst folgendermaßen:

$$a+x=b\implies (a+x)+(-a)=b+(-a)\underset{(A1),(A2)}{\implies} x+\underbrace{(a+(-a))}_{=0\text{ nach}(A4)}=b-a\underset{(A3)}{\implies} x=b-a.$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass $x = b - a$ die Gleichung tatsächlich löst:

$$a + (b - a) = a + (b + (-a)) \underset{(A1),(A2)}{=} b + (a + (-a)) = b + 0 = b.$$

(4) Beweis der ersten Aussage: $(-x) + x \underset{(A2)}{=} x + (-x) = 0 \underset{(2)}{\Longrightarrow} x = -(-x)$.

(5) $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) \underset{(D)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0 \underset{(3)}{\Longrightarrow} x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0$.

(6), (7) und (8): Übung. □

**Endliche Summen und Produkte:** Für Zahlen aus $\mathbb{K}$ definiert man endliche Summen und Produkte rekursiv, wie wir es schon in Kapitel 2.2 getan haben:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) + x_n & \text{falls } n \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Wiederholte Anwendung des Assoziativ-und Kommutativgesetzes zeigt, dass das Ergebnis unabhängig ist von der Reihenfolge der Summanden und von Klammersetzungen. Analog definiert man

$$\prod_{k=1}^{n} x_k := \begin{cases} \left(\prod_{k=1}^{n-1} x_k\right) \cdot x_n & \text{falls } n \in \mathbb{N}; \\ 1 & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Aus dem Distributivgesetz (D) erhält man mittels vollständiger Induktion das Distributivgesetz für endliche Summen,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j.$$

**Potenzen:** Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$x^n := \prod_{k=1}^{n} x \quad (n \in \mathbb{N}_0); \quad \text{insbesondere: } x^0 = 1.$$

**Potenzgesetze:** Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(*) \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}\,; \quad x^n y^n = (xy)^n\,; \quad (x^n)^m = x^{nm}.$$

Diese Eigenschaften beweist man leicht mit vollständiger Induktion.

Für $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir weiter

$$x^{-n} := (x^{-1})^n.$$

Damit gilt $x^{-n} = (x^n)^{-1}$, wegen $x^n \cdot (x^{-1})^n = (x \cdot x^{-1})^n = 1$.
Im Fall $x, y \neq 0$ gelten die Potenzgesetze $(*)$ auch für alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen exemplarisch die zweite Eigenschaft für $x, y \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$:

$$x^n y^n = (x^{-n})^{-1} (y^{-n})^{-1} \underset{\text{Satz 3.1(7)}}{=} (x^{-n} y^{-n})^{-1} = [(xy)^{-n}]^{-1} = (xy)^n,$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass $-n > 0$.

**Beispiele:** 1. Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper. $\mathbb{Z}$ mit denselben Operationen ist kein Körper. Denn die Elemente aus $\mathbb{Z}$, mit Ausnahme von $\pm 1$, besitzen keine multiplikativen Inversen. Allerdings ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe.

2. **Beispiel eines endlichen Körpers.** Wir betrachten eine zweielementige Menge $\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ mit Addition und Multiplikation gemäss der folgenden Verknüpfungstafel:

| $+$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{0}$ |

| $\cdot$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |

Direktes Nachrechnen zeigt, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist, mit Null $0 = \overline{0}$ und Eins $1 = \overline{1}$.

## 3.3 Angeordnete Körper

In einem angeordneten Körper lassen sich je zwei Elemente der Größe nach vergleichen.

**Definition.** Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper $\mathbb{K}$, in dem eine Teilmenge positiver Elemente $\mathbb{K}_+ \subseteq \mathbb{K}$ ausgezeichnet ist (Bezeichnung: $x > 0$ für $x \in \mathbb{K}_+$), so dass folgende Axiome erfüllt sind:

(O1) Für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$x > 0,\ x = 0\,,\ -x > 0.$$

(O2) $x > 0 \wedge y > 0 \implies x + y > 0,\ xy > 0 \qquad$ (Verträglichkeitsaxiome).

**Bezeichnungen:** Man schreibt

$$\begin{aligned}
&x > y \ \ (x \text{ größer als } y) \ :\Longleftrightarrow\ x - y > 0,\\
&x < y \ \ (x \text{ kleiner als } y) \ :\Longleftrightarrow\ y > x,\\
&x \geq y \ :\Longleftrightarrow\ x > y \vee x = y,\\
&x \leq y \ :\Longleftrightarrow\ y \geq x.
\end{aligned}$$

Ist $-x > 0$, so heißt $x$ *negativ.*

**3.2 Satz** (**Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen**).

(1) $x < 0 \iff -x > 0$.

(2) *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen*

$$x < y,\ x = y\,,\ y < x \quad \textit{(Trichotomie).}$$

(3) $x < y \wedge y < z \implies x < z \quad$ *(Transitivität der Relation $<$).*

(4) $x < y \implies x + z < y + z$ *für alle* $z \in \mathbb{K}$.

(5) $x < y \iff -x > -y$.

(6) $x < y \wedge a < b \implies x + a < y + b$.

(7) (i) $x < y \wedge a > 0 \implies ax < ay$.

(ii) $x < y \wedge a < 0 \implies ax > ay$.

(8) $0 \leq x < y \wedge 0 \leq a < b \implies ax < by$.

(9) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$. *Insbesondere gilt:* $1 = 1^2 > 0$.

(10) $x > 0 \implies x^{-1} > 0$.

(11) $0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1}$.

*Beweis.* (1) $x < 0 \iff 0 > x \iff -x = 0 - x > 0$.

(2) folgt aus (O1) für $x - y$.

(3) Aus $y - x > 0$ und $z - y > 0$ folgt mit (O2), dass $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$.

(4) und (5) beweist man ebenso mit Differenzbildung.

(6) $(y + b) - (x + a) = (y - x) + (b - a) \underset{(O2)}{>} 0$.

(7) (i) Für $a > 0$ gilt: $ay - ax = a(y - x) \underset{(O2)}{>} 0$, da $y - x > 0$.

(ii) Für $a < 0$ gilt $-a > 0$ nach (1), und mit (i) und (O2) folgt: $ax - ay = (-a)(y - x) > 0$.

(8) $by - ax = by - ay + ay - ax = (b - a)y + a(y - x)$. Wegen $b - a > 0$ und $y > 0$ ist mit (O2) auch $(b - a)y > 0$. Wegen $x < y$ und $a \geq 0$ gilt ferner $a(y - x) \geq 0$. Wiederum mit (O2) folgt $(b - a)y + a(y - x) > 0$.

(9) Ist $x > 0$, so erhalten wir aus (O2), dass $x^2 = x \cdot x > 0$. Ist $x < 0$, also $-x > 0$, so folgt ebenso $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$.

(10) und (11): Übungen. □

**Beispiele.** $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper mit der üblichen Relation $>$. Dagegen kann der Körper $\mathbb{F}_2$ nicht angeordnet werden, denn: In $\mathbb{F}_2$ gilt $1+1 = 0$. Wäre $\mathbb{F}_2$ angeordnet, so müsste aber $1 > 0$ sein, und daraus würde $0 = 1 + 1 > 0$ folgen, ein Widerspruch zur Trichotomie.

**3.3 Lemma.** *Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x, y \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$x < y \iff x^n < y^n.$$

*Beweis.* Übung. □

**3.4 Satz (Bernoulli-Ungleichung).** *Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und sei $x \in \mathbb{K}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt*

$$\boxed{(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.}$$

*Dabei ist $nx \in \mathbb{K}$ definiert als $nx := n \cdot x := \sum_{k=1}^{n} x = x + \ldots + x$ ($n$ Summanden). Insbesondere: $0 \cdot x = 0$.*

*Beweis.* Mit vollständiger Induktion nach $n$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Aussage offenbar richtig: $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

Schluss $n \to n + 1$: Wegen $1 + x \geq 0$ erhalten wir unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x) \cdot (1 + x)^n \underset{I.V.}{\geq} (1 + x) \cdot (1 + nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Das *Maximum* bzw. *Minimum* zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{K}$ ist die größere bzw. kleinere der beiden:

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y; \\ y & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y; \\ y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der *(absolute) Betrag* von $x \in \mathbb{K}$ ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

**3.5 Satz (Eigenschaften des Betrags).**

(1) $|x| = \max(x, -x) \geq 0$ *und* $|x| = |-x|$.
(2) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(3) $|xy| = |x| \cdot |y|$ *(Multiplikativität)*
(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecks-Ungleichung).*

*Beweis.* Teile (1) und (2) sind klar.
(3) Setze $\xi := |x|$, $\eta := |y|$. Dann ist $x \in \{\pm\xi\}$, $y \in \{\pm\eta\}$ und daher $xy \in \{\pm\xi\eta\}$. Wegen $\xi, \eta \geq 0$ folgt $|xy| = |\xi\eta| = \xi\eta = |x| \cdot |y|$.
(4) Wegen $\pm x \leq |x|$, $\pm y \leq |y|$ folgt aus Satz 3.2(6), dass $\pm(x + y) \leq |x| + |y|$. Dies impliziert die Behauptung.

□

**3.6 Korollar.** (1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ *(Umgekehrte Dreiecksungleichung).*
(2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *sofern* $y \neq 0$.

*Beweis.* (1) Wir verwenden einen Standardtrick beim Rechnen mit Beträgen, und zwar ergänzen wir zunächst $x$ durch eine „produktive Null“ und wenden dann die Dreiecksungleichung an:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Hieraus folgt $|x| - |y| \leq |x - y|$ und durch Vertauschen von $x, y$ auch $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Zusammen ergibt sich die Behauptung.
(2) Wir schreiben zunächst $x = \frac{x}{y} \cdot y$ und erhalten $|x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$. Wegen $|y| \neq 0$ folgt hieraus die Behauptung. □

**Bemerkung (Zum Auflösen von Beträgen in Ungleichungen):** Für $a > 0$ gilt:

$$|x| < a \iff -a < x < a.$$

Dies sieht man sofort mit einer Fallunterscheidung. Analoges gilt für $\leq$.

## 3.4 Das Vollständigkeitsaxiom

In diesem Abschnitt lernen wir das entscheidende Axiom kennen, welches die reellen Zahlen von den rationalen abhebt, nämlich das Vollständigkeitsaxiom.
Im gesamten Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ einen beliebigen angeordneten Körper. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Begriffen.

**Definition.** Sei $M$ eine Teilmenge von $\mathbb{K}$.

(1) Eine Zahl $s \in \mathbb{K}$ heißt *obere Schranke* von $M$, falls

$$x \leq s \quad \text{für alle } x \in M.$$

$s \in \mathbb{K}$ heißt *untere Schranke* von $M$, falls $x \geq s$ für alle $x \in M$.

(2) $M$ heißt *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt*, falls $M$ eine obere (bzw. eine untere) Schranke $s \in \mathbb{K}$ besitzt.

(3) $M$ heißt *beschränkt*, falls $M$ nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

(4) Ein Element $m_0 \in M$ heißt *Maximum* von $M$, wenn es zugleich obere Schranke von $M$ ist. Analog heißt $m_0 \in M$ *Minimum* von $M$, wenn es zugleich untere Schranke von $M$ ist. Bezeichnung:

$$m_0 = \max M \quad \text{bzw.} \quad m_0 = \min M.$$

**Achtung:** 1. Eine obere (und analog untere) Schranke von $M$ ist, sofern existent, im Allgemeinen nicht eindeutig: denn ist $s \in \mathbb{K}$ eine obere Schranke von $M$, so ist auch jede Zahl $s' \in \mathbb{K}$ mit $s' > s$ eine obere Schranke von $M$.
2. Dagegen sind $\max M$ und $\min M$ eindeutig, sofern existent. Wir zeigen das für das Maximum. Seien dazu $m_0, m_0' \in M$ Maxima von $M$. Dann ist einerseits $m_0' \leq m_0$, da $m_0$ ein Maximum von $M$, und umgekehrt ebenso $m_0 \leq m_0'$, da auch $m_0'$ ein Maximum von $M$ ist. Also muss $m_0 = m_0'$ gelten.

**Beispiele.** Wir betrachten zwei Teilmengen von $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

1. $M_1 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$.

   $M_1$ ist beschränkt, denn jede Zahl $s \in \mathbb{Q}$ mit $s \geq 1$ ist obere Schranke von $M_1$, und jede Zahl $t \in \mathbb{Q}$ mit $t \leq 0$ ist untere Schranke von $M_1$. Wegen $1 \in M_1$ und $0 \in M_1$ besitzt $M_1$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum, nämlich $\max M_1 = 1$, $\min M_1 = 0$.

2. $M_2 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$.

   Auch $M_2$ ist beschränkt. (Allgemein ist jede Teilmenge einer beschränkten Menge ebenfalls beschränkt). Analog zu obigem Beispiel hat auch $M_2$ ein Minimum, $\min M_2 = 0$. $M_2$ besitzt aber *kein* Maximum! Um das einzusehen, argumentieren wir folgendermaßen: Sei $x \in M_2$. Wir betrachten die Zahl in der Mitte zwischen $x$ und $1$: $x' := \frac{1}{2}(x+1) \in \mathbb{Q}$. Dann ist auch $x' \in M_2$ (da $x' < 1$), und es gilt $x' > x$. Daher ist $x$ keine obere Schranke von $M_2$. Analog sieht man, dass die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$ zwar ein Maximum, aber kein Minimum besitzt.

Nun kommen wir zur entscheidenden Begriffsbildung dieses Abschnitts:

**Definition.** Sei $M \subseteq \mathbb{K}$.

(1) Ein Element $s \in \mathbb{K}$ heißt *Supremum* von $M$, falls $s$ kleinste obere Schranke von $M$ ist. Das besagt:

 (i) $s$ ist obere Schranke von $M$, und
 (ii) für jede weitere obere Schranke $s'$ von $M$ gilt $s \leq s'$.

(2) $t \in \mathbb{K}$ heißt *Infimum* von $M$, falls $t$ *größte untere Schranke* von $M$ ist. Das besagt: $t$ ist untere Schranke von $M$, und für jede weitere untere Schranke $t'$ von $M$ gilt $t' \leq t$.

Aus Teil (ii) der Definition des Supremums von $M$ sieht man: $M$ besitzt höchstens ein Supremum, dieses wird mit $\sup M$ bezeichnet. Analog besitzt $M$ höchstens ein Infimum; es wird mit $\inf M$ bezeichnet.

**Beispiel:** Sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$. Wir behaupten: $M$ besitzt ein Supremum (in $\mathbb{Q}$), und zwar ist $\sup M = 1$.

Begründung: 1 ist obere Schranke von $M$, und kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x < 1$ ist obere Schranke von $M$, denn es ist $x \in M$ und auch $x' = \frac{1}{2}(x+1) \in M$, aber $x' > x$.

**Beachte:** Hat $M \subseteq \mathbb{K}$ ein Maximum $m_0 = \max M$, so gilt zugleich $m_0 = \sup M$, d.h. ein Maximum ist zugleich Supremum.

Denn: Ist $x \in \mathbb{K}$ mit $x < m_0$, so kann $x$ wegen $m_0 \in M$ keine obere Schranke von $M$ sein.

Analog gilt: Hat $M$ ein Minimum $m_0$, so gilt zugleich $m_0 = \inf M$.

**Definition.** Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *(ordnungs-) vollständig* oder *vollständig angeordnet*, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ ein Supremum in $\mathbb{K}$ besitzt. Man sagt auch: $\mathbb{K}$ erfüllt das *Vollständigkeitsaxiom*, oder: $\mathbb{K}$ erfüllt die *Supremumseigenschaft.*

Wir werden in Kürze beweisen, dass $\mathbb{Q}$ *nicht* vollständig angeordnet ist. Es gilt aber der folgende wichtige Satz:

> **3.7 Satz.** *Es gibt einen vollständig angeordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ als angeordneten Körper umfaßt. Dieser ist bis auf Isomorphie (s. unten) eindeutig und heißt der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.*

**Zum Isomorphiebegriff:** Zwei angeordnete Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ und $(\mathbb{K}', +', \cdot', <')$ heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ gibt mit

$$f(x+y) = f(x) +' f(y); \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y); \quad x < y \Longleftrightarrow f(x) <' f(y);$$

d.h. $f$ ist verträglich mit den Körperoperationen und den Anordnungen.

Der Beweis von Satz 3.7 würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Eine Beweismöglichkeit besteht wie bereits erwähnt darin, den Körper $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren, und dann noch die Eindeutigkeit nachzuweisen. Dies kann man (neben vielen anderen interessanten Sachverhalten über Zahlen) in dem Klassiker „Zahlen“ von Ebbinghaus et al. (Springer-Verlag) nachlesen.

Die reellen Zahlen sind also (im Sinne von Satz 3.7) eindeutig charakterisiert durch

- die Körperaxiome,
- die Anordnungsaxiome,
- das Vollständigkeitsaxiom.

Auf diesen Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir nun das Gebäude der Analysis aufbauen. Man kann sich auf den Standpunkt stellen: die reellen Zahlen sind Objekte mit gewissen Verknüpfungen, die diesen drei Gruppen von Axiomen genügen sollen, ohne über ihre Natur weiter nachzudenken. Für die Sinnhaftigkeit des mathematischen Gebäudes ist es allerdings sehr wohl relevant, dass diese Axiome widerspruchsfrei sind (auch das können wir nicht beweisen), und dass es tatsächlich bis auf Isomorphie genau einen Körper mit diesen Eigenschaften gibt, den man aus den rationalen Zahlen konstruieren kann.

## 3.5 Konsequenzen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Wir beginnen mit einigen Notationen.

**Definition (Intervalle).** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)},\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)},\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{(nach rechts halboffenes Intervall)},\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{(nach links halboffenes Intervall)}.
\end{aligned}$$

In jedem dieser Fälle heißen $a$ und $b$ die Randpunkte des Intervalls und $b - a \geq 0$ seine *Länge*. Neben diesen beschränkten Intervallen definieren wir auch abgeschlossene und offene unbeschränkte Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, & (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, & (-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\},\\
(-\infty,\infty) &:= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dabei ist $\infty = +\infty$ das mathematische Symbol für *(plus) unendlich*, und $-\infty$ das Symbol für *minus unendlich*.

**Bemerkungen:** 1. Die leere Menge $\emptyset$ ist ein offenes Intervall: $\emptyset = (a,a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$!

2. Es gibt eine präzise Definition des Begriffs *Intervall*: Ein Intervall ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$, die mit je zwei Zahlen $x, y \in I$ auch jede Zahl dazwischen enthält, d.h. jede Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$. Man kann sich dann leicht überlegen, dass es genau die oben aufgelisteten Arten von Intervallen gibt.

**Definition.** *Die erweiterte reelle Zahlengerade* ist definiert als die Menge

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

mit der folgenden Festlegung für die Anordnung:

$$-\infty < x < \infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

**Vorsicht:** Die Körperoperationen in $\mathbb{R}$ lassen sich nur bedingt auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ausdehnen! Wir werden das in dieser Vorlesung bis auf weiteres überhaupt nicht tun.

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

**Beispiel:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $\sup\,[a, b] = \sup\,[a, b) = b$. (Dabei ist jeweils das Supremum in $\mathbb{R}$ gemeint.)
**Beweis:** $b$ ist obere Schranke für beide Intervalle. Wegen $b \in [a, b]$ ist ferner $b = \max\,[a, b] = \sup\,[a, b]$. $b$ ist auch die kleinste obere Schranke von $[a, b)$ in $\mathbb{R}$. Um das zu begründen, betrachte eine beliebige Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c < b$. Falls $c < a$, so ist $c$ natürlich keine obere Schranke von $[a, b)$. Falls $c \geq a$, so setze $c' := \frac{1}{2}(c + b)$. Dann ist $c' \in [a, b)$ mit $c' > c$, und daher ist $c$ keine obere Schranke von $[a, b)$.

**3.8 Korollar.** *Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}$.*

*Beweis.* Die Menge $-M := \{-x : x \in M\}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $s \in \mathbb{R}$. Dann ist $-s$ größte untere Schranke von $M$, d.h. $-s = \inf M$. □

**Beispiel:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $\inf\,(a, b] = a$.

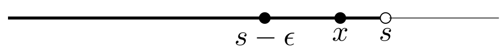
**Konvention:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \sup M &:= \infty, && \text{falls } M \text{ nach oben unbeschränkt;} \\ \inf M &:= -\infty, && \text{falls } M \text{ nach unten unbeschränkt.} \end{aligned}$$

Die folgende Beobachtung im Zusammenhang mit dem Supremum wird immer wieder nützlich sein:

**3.9 Lemma.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, und sei $s := \sup M$. Dann gibt es zu jedem (noch so kleinen) $\epsilon > 0$ ein Element $x \in M$ mit $s - \epsilon < x \leq s$. Knapp formuliert:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists x \in M : \; s - \epsilon < x \leq s.$$




**Beachte:** Das Element $x$ hängt im Allgemeinen von $\epsilon$ ab! Je kleiner $\epsilon$, desto dichter muss $x$ an $s$ liegen.

*Beweis.* Weil $s$ die kleinste obere Schranke von $M$ ist, ist $s - \epsilon$ keine obere Schranke von $M$. Es muss daher ein $x \in M$ geben mit $x > s - \epsilon$. Dabei ist $x \leq s$, da ja $s$ obere Schranke von $M$ ist. □

**3.10 Satz (Die Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$).** *Es gilt*

$$\text{(AR)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; n > x.$$

*Ausführlich: zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. (Das heißt: $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt.)*

*Beweis.* Angenommen, Eigenschaft (AR) ist nicht erfüllt. Dann gibt es eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Aufgrund des Vollständigkeitsaxioms existiert daher $s := \sup \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Lemma 3.9 mit $\epsilon := 1$ sichert nun die Existenz eienr Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$. Hieraus aber folgt $n + 1 > s$, und wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ steht dies im Widerspruch zu $s = \sup \mathbb{N}$. □

**3.11 Satz (Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft).**

(1) *Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$.*

(2) ***Wachstum von Potenzen:*** *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Dann gibt es zu jeder Schranke $M \in \mathbb{R}$ einen Exponenten $n \in \mathbb{N}$, so dass $a^n > M$.*

(3) *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Exponenten $n \in \mathbb{N}$, so dass $a^n < \epsilon$.*

**Beachte:** Teil (1) zeigt: $\inf \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

*Beweis des Satzes.* (1) Für vorgegebenes $\epsilon > 0$ folgt aus der Archimedischen Eigenschaft (AR) die Existenz einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\epsilon}$. Dies ist äquivalent zu $\frac{1}{n} < \epsilon$.
(2) Sei $M \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $a = 1 + x$ mit $x := a - 1 > 0$. Mit der Bernoulli-Ungleichung erhalten wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

Aufgrund der Archimedischen Eigenschaft können wir eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{M}{x}$ finden. Für dieses $n$ folgt mit der obigen Ungleichung, dass $a^n > M$.
(3) Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\frac{1}{a} > 1$ sichert Teil (2) die Existenz eines Exponenten $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\epsilon}$. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $a^n < \epsilon$. □

Wir kehren nun zurück zu unserer Ausgangsfrage nach der Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Als wichtige Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigt uns der nächste Satz, dass diese Gleichung tatsächlich genau eine positive reelle Lösung besitzt.

**3.12 Satz (Existenz von Wurzeln).** *Gegeben seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und ein Exponent $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, so dass*

$$x^k = a.$$

*Diese Lösung $x$ heißt die $k$-te* (positive) Wurzel *aus $a$ und wird mit*

$$x = a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$$

*bezeichnet. Ferner schreibt man $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.*

**Beachte:** Im Fall $a > 0$ ist auch $\sqrt[k]{a} > 0$.

Zum Beweis von Satz 3.12 benötigen wir die folgende technische Hilfsaussage:

**3.13 Lemma.** *Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq y$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$0 \leq y^k - x^k \leq k(y - x)\, y^{k-1}.$$

*Beweis.* Beachte zunächst, dass $x^k \le y^k$ gemäß Lemma 3.3. Wir können nun (in Verallgemeinerung der binomischen Formel) wie folgt faktorisieren:

$$(*) \qquad y^k - x^k = (y-x)\cdot\big(y^{k-1} + xy^{k-2} + \ldots + x^{k-2}y + x^{k-1}\big),$$

denn in der Tat lässt sich die rechte Seite dieser Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}(y-x)\cdot\sum_{l=0}^{k-1} x^l y^{k-1-l} &= \sum_{l=0}^{k-1} x^l y^{k-l} - \sum_{l=0}^{k-1} x^{l+1} y^{k-1-l} \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} x^l y^{k-l} - \sum_{l=1}^{k} x^l y^{k-l} = y^k - x^k.\end{aligned}$$

Betrachte nun die rechte Seite von $(*)$. Der zweite Faktor enhält $k$ Summanden. Wegen $0 \le x \le y$ lässt sich jeder dieser Summanden nach oben abschätzen durch $y^{k-1}$. Wir erhalten also

$$y^k - x^k \le (y-x)\cdot k\cdot y^{k-1}.$$

□

*Beweis von Satz 3.12.* **Schritt (I).** Bevor wir die Existenz der gesuchten Wurzel beweisen, begründen wir zunächst ihre Eindeutigkeit. Dazu nehmen wir an, es gebe $x_1, x_2 \ge 0$ mit $x_1 \ne x_2$ und $x_1^k = x_2^k = a$. Dabei können wir o.E. (ohne Einschränkung) annehmen, dass $x_1 < x_2$. Hieraus aber folgt $x_1^k < x_2^k$, ein Widerspruch.

**Schritt (II).** Nun kommen wir zum Beweis der Existenz der gesuchten Wurzel $x$. Wir können dabei o.E. $k \ge 2$ und $a > 1$ annehmen: Für $a = 0$ bzw. $a = 1$ leistet $x = 0$ bzw. $x = 1$ das Gewünschte, und für $0 < a < 1$ betrachten wir zunächst den Kehrwert $\frac{1}{a} > 1$. Haben wir $y > 0$ mit $y^k = \frac{1}{a}$ gefunden, so erfüllt $x := \frac{1}{y}$ die Identität $x^k = a$.
Sei also nun $k \ge 2$, $a > 1$. Die entscheidende Idee ist die folgende: Wir betrachten die Menge

$$M := \{y > 0 : \, y^k \le a\}.$$

Diese ist nicht leer (es ist z.B. $1 \in M$). Ausserdem ist $M$ nach oben beschränkt durch $a$, denn angenommen es gäbe ein Element $y \in M$ mit $y > a$, so würde hieraus folgen: $y^k > a^k > a$ (die zweite Ungleichung gilt wegen $a > 1$), im Widerspruch zu $y \in M$.

$M$ besitzt daher ein Supremum in $\mathbb{R}$, und wir setzen

$$x := \sup M \in \mathbb{R}.$$

Wegen $1 \in M$ gilt $x \ge 1$.

**Behauptung:** $x^k = a$.
Zum Beweis dieser Behauptung werden wir nun die beiden Alternativen $x^k > a$ und $x^k < a$ ausschließen.

**Annahme 1:** $x^k > a$. In diesem Fall ist

$$\epsilon := \frac{x^k - a}{kx^{k-1}} > 0.$$

Nach Lemma 3.9 existiert ein $y \in M$ mit $x - \epsilon < y \le x$, und nach Definition von $M$ ist $y^k \le a$. Es folgt daher

$$x^k - a \le x^k - y^k \le k(x-y)x^{k-1} < k\,\epsilon\, x^{k-1} = x^k - a\,,$$

wobei wir für die zweite Ungleichung Lemma 3.13 verwendet haben. Diese Ungleichungskette liefert aber einen Widerspruch, Annahme 1 ist damit widerlegt.

**Annahme 2:** $x^k < a$. In diesem Fall ist $\dfrac{a}{x^k} - 1 > 0$. Wir betrachten

$$r := \min\Big(\frac{1}{2^k}\Big(\frac{a}{x^k} - 1\Big), 1\Big) \in (0,1].$$

Mit dem Binomischen Satz und wegen $0 < r \le 1$ ergibt sich

$$(1+r)^k = 1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} r^j \le 1 + r \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}.$$

Nun verwenden wir die in Übungsblatt 2 bewiesene Identität

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = 2^k$$

und erhalten

$$(1+r)^k \le 1 + r\big(2^k - 1\big) < 1 + r \cdot 2^k \le \frac{a}{x^k}.$$

Wegen $x^k > 0$ folgt hieraus

$$\big[x(1+r)\big]^k \le a,$$

und daher $x(1+r) \in M$. Dies aber steht wegen $x(1+r) > x$ im Widerspruch zu $x = \sup M$. Damit ist auch Annahme 2 widerlegt, und der Beweis des Satzes ist abgeschlossen. ☐

**Rechenregel:** Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \ge 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{xy}.$$

*Begründung:* Gemäß Potenzgesetzen gilt

$$\big(\sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y}\big)^k = \big(\sqrt[k]{x}\big)^k \cdot \big(\sqrt[k]{y}\big)^k = xy.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der (positiven) $k$-ten Wurzel folgt hieraus die behauptete Identität.

Wir wissen, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Daher ist, wie bereits in Kapitel 1 angekündigt, $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

**Definition.** Die Zahlen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen *irrational.*

**Bemerkung.** Alle bisherigen Resultate dieses Abschnitts 3.5 gelten ebenso (mit identischen Beweisen) für einen beliebigen vollständig angeordneten Körper $\mathbb{K}$ anstelle von $\mathbb{R}$. Hieraus ergibt sich eine wichtige Erkenntnis:

**3.14 Korollar.** $\mathbb{Q}$ *ist (als angeordneter Körper)* nicht *vollständig.*

*Beweis.* Angenommen $\mathbb{Q}$ wäre vollständig. Dann würde Satz 3.12 über die Existenz von Wurzeln auch in $\mathbb{Q}$ gelten. Insbesondere gäbe es dann ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$, ein Widerspruch. ☐

Da $\mathbb{Q}$ nicht vollständig angeordnet ist, muss es nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{Q}$ geben, die kein Supremum in $\mathbb{Q}$ (!) besitzen. Solche Mengen lassen sich tatsächlich leicht angeben. Betrachte z.B.

$$M = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0,\, y^2 \leq 2\}.$$

Diese Menge ist nichtleer und nach oben beschränkt in $\mathbb{Q}$ (z.B. durch $2$), vergleiche den Beweis von Satz 3.12. $M$ besitzt aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$! Denn angenommen $x = \sup M \in \mathbb{Q}$ würde existieren. Dann würde mit denselben Rechnungen und Argumenten wie im Beweis von Satz 3.12 folgen, dass $x^2 = 2$, ein Widerspruch.

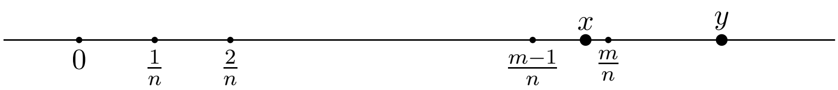
Die Menge der irrationalen Zahlen ist groß: man kann sich leicht überlegen, dass zwischen je zwei rationalen Zahlen (mindestens) eine irrationale Zahl liegt (Übung!). Es gilt auch die umgekehrte Aussage, die allerdings schwieriger zu beweisen ist:

**3.15 Satz.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gibt es eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.*
*Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem *Wohlordnungsprinzip*, das seinerseits eine Konsequenz des Induktionsaxioms der natürlichen Zahlen ist und in der Zentralübung bewiesen wurde.

**Wohlordnungsprinzip.** Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Menge natürlicher Zahlen. Dann besitzt $M$ ein Minimum.

*Beweis von Satz 3.15.* Wir können o.E. annehmen, dass $x > 0$ ist. Denn ist $x \leq 0$, so wählen wir gemäß der Archimedischen Eigenschaft (AR) von $\mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -x$. Dann aber ist $0 < n + x < n + y$. Ist $q' \in \mathbb{Q}$ mit $n + x < q' < n + y$ gefunden, so ist $q := q' - n \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.
Sei also nun $0 < x < y$ vorausgesetzt. Dann ist insbesondere $y - x > 0$, und die Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (genauer: Satz 3.11) sichert die Existenz einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $y - x > \frac{1}{n}$. Betrachte nun die im Abstand $\frac{1}{n}$ aufeinanderfolgenden Zahlen $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$ sowie die Menge $\{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{n} > x\}$. Aufgrund von (AR) ist diese nicht leer, und besitzt daher nach dem Wohlordnungsprinzip ein Minimum $m \in \mathbb{N}$.




Damit gilt

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n} \quad \text{und} \quad y > x + \frac{1}{n} \geq \frac{m}{n}\,.$$

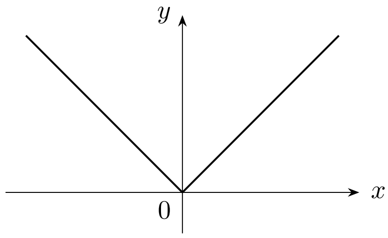
Die rationale Zahl $q := \dfrac{m}{n}$ liegt also im offenen Intervall $(x, y)$. □

## 3.6 Reelle Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem Definitionsbereich $D = D_f \subseteq \mathbb{R}$.

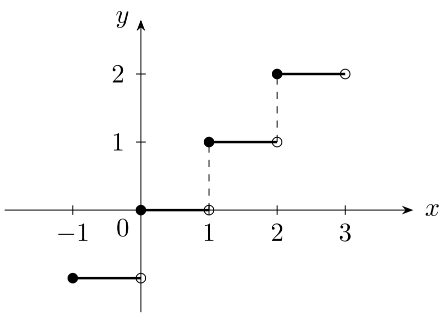
**Beispiele:**

(1) Die **Betragsfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.




(2) Die **Floorfunktion** (Gauß-Klammer) $\lfloor\,.\,\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ;

dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x$.

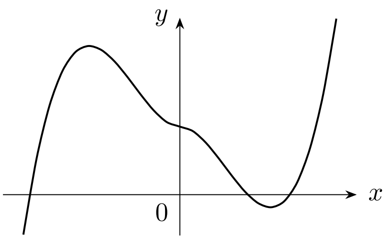



Die Funktion $\lfloor\,.\,\rfloor$ nimmt nur ganzzahlige Werte an, und es gilt $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

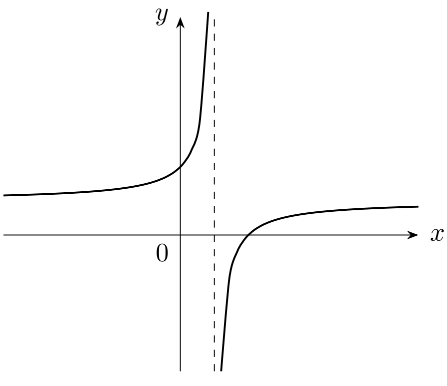
(3) **Rationale Funktionen.** Ein (reelle) rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Definitionsbereich $D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.




$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$




$f(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}.$

Wie kann man einer reellen Funktion ansehen, dass sie umkehrbar ist? Hierfür gibt es ein wichtiges Kriterium, das auf Monotonie basiert.

**Definition.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

*monoton wachsend*, falls gilt: Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ ist $f(x) \leq f(y)$;
*monoton fallend*, falls gilt: Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ ist $f(x) \geq f(y)$.

Gilt dabei sogar stets $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$, so heißt $f$ *streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.*

**3.16 Beispiele.** (1) Die Floor-Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber nicht streng monoton.

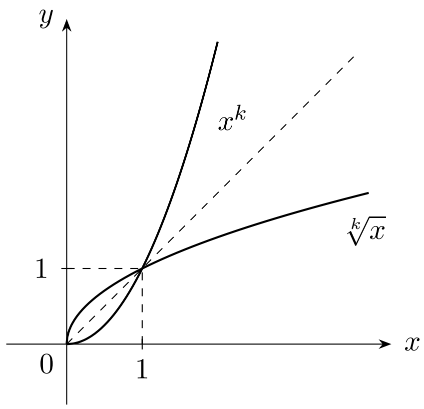
(2) **Potenzfunktionen.** Sei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Exponent. Dann ist die Potenzfunktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto x^k$$

streng monoton wachsend nach Lemma 3.3. Aus der Existenz von Wurzeln (Satz 3.12) folgt, dass $f$ das Intervall $[0, \infty)$ bijektiv auf sich selbst abbildet: denn zu jedem $y \in [0, \infty)$ existiert genau ein $x \in [0, \infty)$ mit $y = x^k$, nämlich $x = \sqrt[k]{y}$.

Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $f$ auf $[0, \infty)$ ist die $k$-te **Wurzelfunktion**

$$x \mapsto \sqrt[k]{x}, \quad [0, \infty) \to [0, \infty).$$




**Beachte:** Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die $D$ bijektiv auf ihr Bild $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ abbildet, so entsteht der Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}$ durch Spiegelung des Graphen von $f$ an der Diagonalen $y = x$.

Wir kommen nun zum angekündigten Umkehrbarkeitskriterium.

**3.17 Satz.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Dann ist $f : D \longrightarrow f(D)$ bijektiv, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(D) \to D$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

*Beweis.* Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Da $f$ streng monoton wächst, folgt hieraus $f(x) < f(y)$. Dies zeigt die Injektivität von $f$, und es folgt, dass $f : D \to f(D)$ bijektiv ist. Um die strenge Monotonie der Umkehrfunktion zu beweisen, betrachten wir zwei Punkte $f(x), f(y) \in f(D)$ mit $f(x) < f(y)$. Dann muss $x < y$ sein. Denn angenommen es wäre $x \geq y$, so würde daraus (wiederum aufgrund der Monotonie von $f$) folgen, dass $f(x) \geq f(y)$ ist, ein Widerspruch. $\square$

**3.18 Korollar.** *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die $k$-te Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ streng monoton wachsend auf* $[0, \infty)$.

# Kapitel 4

# Folgen

## 4.1 Der Konvergenzbegriff und Beispiele

Der Begriff einer Folge war bereits in Zusammenhang mit rekursiven Definitionen in Kapitel 2 aufgetaucht. Wir wiederholen die Definition:

**Definition.** Sei $X$ eine Menge. Eine *Folge* in $X$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto a_n = a(n).$$

Man bezeichnet je nach Situation die Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kurz $(a_n)$, oder auch aufzählend mit $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Die $a_n \in X$ heißen die *Glieder der Folge*, $\mathbb{N}$ ihre Indexmenge.

**Varianten bei der Indexmenge:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ oder $(a_n)_{n\geq k} = (a_k, a_{k+1}, \ldots)$ mit festem $k \in \mathbb{Z}$.

**Beispiele:**

1. $a_n = n^2$ für $n \in \mathbb{N} \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, \ldots)$.
2. $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0 \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.
3. Konstante Folgen: $a_n = a \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n) = (a, a, a, \ldots)$.

Es ist wichtig, zwischen der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu unterscheiden! In Beispiel 3 etwa ist $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$, in Beispiel 2 ist $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{\pm 1\}$.

Folgen in $\mathbb{R}$ heißen auch *reelle Folgen*; mit solchen Folgen werden wir uns in diesem Kapitel beschäftigen. Dabei wird uns besonders das Verhalten der Folgenglieder für immer größer werdende Indizes interessieren.

**Beispiel: Die Fibonacci-Folge.** Diese wird rekursiv definiert durch

$$a_0 := 1;\ a_1 := 1; \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die ersten Folgenglieder lassen sich leicht berechnen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Leonardo Fibonacci (ca. 1170-1240) modellierte mit dieser Folge das Wachstum einer Kaninchenpopulation, $a_n$ bezeichnet dabei die Anzahl der Tiere im Jahr $n$. Die Fibonacci-Folge beschreibt tatsächlich viele Wachstumsvorgänge in der Natur in guter Näherung und hat viele interessante weitere Eigenschaften, von denen wir noch einige kennenlernen werden.

**Definition.** Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvergent*, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$(*) \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Die Zahl $a$ heißt der *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder auch} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

Die Folge $(a_n)$ konvergiert also genau dann gegen $a$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder im Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ liegen.

**Beachte:** Bei kleiner werdendem $\epsilon$ muss man $n_0 = n_0(\epsilon)$ möglicherweise immer größer wählen, um die Bedingung $(*)$ erfüllen zu können.

Zur Übung notieren wir den Begriff der Konvergenz noch etwas knapper in Formelsprache:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\, \epsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Falls eine reelle Folge überhaupt konvergiert, so ist ihr Grenzwert zum Glück eindeutig:

**4.1 Lemma.** *Der Grenzwert einer konvergenten Folge* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ *ist eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Wir nehmen an, es gelte $a_n \to a$ und $a_n \to a'$ mit $a \neq a'$. Um einen Widerspruch zu erhalten, setzen wir

$$\epsilon := \frac{1}{2}|a - a'| > 0.$$

Aufgrund unserer Annahme existieren Indizes $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_1$ und $|a_n - a'| < \epsilon$ für alle $n \geq n_2$. Wir setzen $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für alle $n \geq n_0$:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\epsilon = |a - a'|,$$

ein Widerspruch. □

**Definition.** 1. Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge.*

2. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent.*

**Beachte:** Ändert man endlich viele Folgenglieder ab, oder lässt man endlich viele Glieder weg, so ändert das nichts am Konvergenzverhalten einer Folge und dem allfälligen Grenzwert.

**4.2 Beispiele.** (1) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.}$

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir suchen einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dazu wählen wir (mit der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Dann folgt sofort für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

□

(2) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Folge, die abwechselnd zwischen $-1$ und $1$ hin- und herspringt, divergiert.

*Beweis.* Als Erstes beobachten wir, dass $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $(a_n)$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Hieraus aber folgt für $n \geq n_0$ mit der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2,$$

im Widerspruch zu obiger Beobachtung. □

(3) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt: $\boxed{\lim_{n\to\infty} x^n = 0.}$

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Satz 3.11 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x|^{n_0} < \epsilon$. Für $n \geq n_0$ folgt hieraus, unter Beachtung von $|x| < 1$,

$$\left|x^n\right| = |x|^n \leq |x|^{n_0} < \epsilon.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

(4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ gilt: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0.}$

Dies folgt unmittelbar aus Beispiel (3), da $\dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ und $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$.

(5) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.}$

*Beweis.* Für $n > 1$ ist aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion auch $\sqrt[n]{n} > 1$ und daher $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Mit dem Binomischen Satz erhalten wir zunächst

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k = 1 + x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \ldots > 1 + \binom{n}{2} x_n^2.$$

Daher ist

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}\, x_n^2\,,$$

woraus mit Kürzen und Umstellen

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

folgt. Für $n \geq n_0$ ist aber $\sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{n_0}}$, und die rechte Seite wird $< \epsilon$, wenn man $n_0 \geq \dfrac{2}{\epsilon^2}$ wählt. Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. □

**Definition.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h. falls es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass

$$|a_n| \le M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(a_n)$ heißt *nach oben* bzw. *nach unten* beschränkt, falls die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben bzw. unten beschränkt ist.

**4.3 Lemma.** *Jede konvergente Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.*

*Beweis.* Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann können wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $|a_n - a| \le 1$ für alle $n \ge n_0$. Für $n \ge n_0$ können wir die Folgenglieder daher mit der Dreiecksungleichung abschätzen:

$$|a_n| \le |a_n - a| + |a| \le 1 + |a|.$$

Wir müssen noch die fehlenden Anfangsglieder der Folge mit hinzunehmen, und erhalten dann die Abschätzung

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\} =: M.$$

□

**Beispiel.** Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ ist die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Satz 3.11 unbeschränkt und daher divergent.

**Vorsicht:** In Lemma 4.3 gilt nicht die umgekehrte Aussage, d.h. die Beschränktheit einer Folge impliziert nicht ihre Konvergenz! Zum Beispiel ist die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel (2) oben zwar beschränkt, aber nicht konvergent.

**Bemerkung:** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit $b_n \to 0$ und $|a_n| \le |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $a_n \to 0$. (Das folgt sofort aus der Definition von Konvergenz.)

**4.4 Satz (Regeln für Grenzwerte).** *Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann gilt*

(1) $a_n + b_n \to a + b$;

(2) $a_n b_n \to ab$;

(3) *Ist $b \ne 0$, so ist $b_n \ne 0$ für hinreichend große $n$, und* $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

(4) $|a_n| \to |a|$.

**Bemerkungen:** 1. Die Formulierung „$b_n \ne 0$ für hinreichend große $n$" besagt: es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \ne 0$ für alle $n \ge N$.
2. Für die konstante Folge mit $b_n = b$ für alle $n$ ergibt sich als Konsequenz aus (1) und (2):

$$a_n \to a \implies a_n + b \to a + b, \; a_n b \to ab.$$

*Beweis von Satz 4.4.* (1) Wir beginnen mit der Dreiecksungleichung abzuschätzen:

$$|a_n + b_n - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| =: s_n.$$

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wählen wir nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \ge n_0$ erfüllt ist. Dann aber ist $s_n < \epsilon$ für alle $n \ge n_0$, und es folgt die Behauptung.

(2) Übungsaufgabe.

(3) Wegen (2) genügt es zu zeigen, dass $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$.

Wegen $|b| > 0$ und $b_n \to b$ gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq N$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt daraus

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2} \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Insbesondere ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und wir erhalten für $n \geq N$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n|.$$

Wegen $|b - b_n| \to 0$ und Teil (2) konvergiert auch die rechtsstehende Folge gegen $0$, und mit der Bemerkung vor Satz 4.4 erhalten wir schließlich $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \to 0$.

(4) Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung sehen wir, dass $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| \to 0$. □

**Beispiele.**

(1) Für jeden festen Exponenten $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0.}$

Also: $\dfrac{1}{n^2} \to 0,\ \dfrac{1}{n^3} \to 0,$ etc.

*Beweis.* Dies folgt mit (2) und vollständiger Induktion nach $k$ aus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(2) $a_n := \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. Mit Grenzwertregel (1) erhalten wir: $a_n \to 1$ für $n \to \infty$.

(3) $a_n := \dfrac{n^2 - 5}{2n^2 + n}$.

Um diese Folge (und solche ähnlicher Bauart) auf Konvergenz zu untersuchen, klammern wir in Zähler und Nenner die jeweils höchste auftretende Potenz von $n$ aus. Mit den Grenzwertregeln und Beispiel (1) erhalten wir dann

$$a_n = \frac{n^2\left(1 - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Es folgen nun noch zwei Regeln, die für den Nachweis der Konvergenz und die Berechnung von Grenzwerten oft sehr hilfreich sind:

**4.5 Satz.** (1) ***Vergleichskriterium:*** *Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, und sei $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $a \leq b$.*

(2) ***Speziell:*** *Falls $a_n \to a$, wobei $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $A \leq a \leq B$.*

(3) ***Sandwich-Regel:*** *Seien $(a_n)$, $(c_n)$ zwei reelle Folgen mit*

$$a_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

*Sei $(b_n)$ eine weitere reelle Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(b_n)$ konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

**Bemerkung:** Die Bedingung „für alle $n \in \mathbb{N}$“ kann überall im obigen Satz ersetzt werden durch „für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$“ ($N$ geeeignet).

Vor dem Beweis dieses Satzes wollen wir seine Nützlichkeit an einem interessanten Beispiel demonstrieren.

**Beispiel.** Für festes $a > 0$ gilt: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.}$

*Beweis.* Wir können o.E. $a > 1$ annehmen. (Im Fall $a < 1$ betrachte $\frac{1}{a}$, und für $a = 1$ ist die Aussage klar). Aus $a > 1$ folgt für $n > a$ mit der Monotonie der Wurzelfunktion die Ungleichungskette

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt mit der Sandwich-Regel, dass auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. □

*Beweis von Satz 4.5.* (1) Wir nehmen an, dass $a > b$ und setzen $\epsilon := a - b > 0$. Für hinreichend großes $n_0 = n_0(\epsilon)$ und alle $n \geq n_0$ gilt dann $|a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{3}$, $|b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{3}$, und hieraus folgt für alle $n \geq n_0$ :

$$0 \leq b_n - a_n = (b_n - b) + (b - a) + (a - a_n) \leq \frac{\epsilon}{3} + (-\epsilon) + \frac{\epsilon}{3} < 0,$$

ein Widerspruch.

(3) Wir schätzen mit der Dreiecksungleichung und unter Verwendung unserer Voraussetzung $b_n \leq c_n$ folgendermaßen ab:

$$|b_n - a| \leq (b_n - a_n) + |a_n - a| \leq (c_n - a_n) + |a_n - a| =: s_n\,.$$

Beide Summanden der Folge $(s_n)$ konvergieren gegen $0$. Mit der Grenzwertregel (1) aus Satz 4.4 folgt, dass auch $s_n \to 0$, und damit erst recht $|b_n - a| \to 0$. □

**4.6 Beispiel.** Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ fest und $k \in \mathbb{N}$ ein beliebiger Exponent. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0.}$$

Das heißt, die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst für $n \to \infty$ schneller als jede Potenz von $n$.

*Beweis.* Wir setzen $r := |x| - 1 > 0$. Mit der binomischen Formel gilt dann

$$|x|^n = (1 + r)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} r^j.$$

Für $n \geq 2k$ können wir wegen $2k \geq k + 1$ die Summe rechts durch den einzigen Summanden mit Index $j = k + 1$ nach unten abschätzen und erhalten

$$|x|^n \geq \binom{n}{k+1} r^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\, r^{k+1} \underset{n-k\geq n/2}{\geq} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!}\, r^{k+1}.$$

Durch Umstellen folgt hieraus

$$\frac{n^k}{|x|^n} \leq \frac{2^{k+1}(k+1)!}{r^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

## 4.2 Monotone Folgen

**Definition.** Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

$$\begin{aligned} &\textit{monoton wachsend}, \text{ falls } a_{n+1} \geq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N};\\ &\textit{monoton fallend}, \text{ falls } a_{n+1} \leq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ sogar $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$, so heißt die Folge *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend.*

**Beispiel.** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2$ ist streng monoton wachsend. Die Folge mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend. Die Folge mit $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton. Die konstante Folge mit $a_n = 1$ für alle $n$ ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend.

**4.7 Satz (Monotoniekriterium).** *Jede monotone* ***und*** *beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent. Dabei gilt*

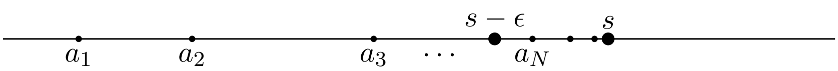
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, & \textit{falls } (a_n) \textit{ monoton wachsend,}\\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, & \textit{falls } (a_n) \textit{ monoton fallend.}\end{cases}$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz für den Fall dass $(a_n)$ monoton wächst, der zweite Fall geht analog. Wir setzen

$$s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Dann ist $s - \epsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, und daher gibt es einen (von $\epsilon$ abhängigen) Index $N \in \mathbb{N}$ so, dass $s - \epsilon < a_N$. Aufgrund der Monotonie der Folge $(a_n)$ und der Definition von $s$ gilt weiter

$$\forall n \geq N: \quad s - \epsilon < a_N \leq a_n \leq s.$$




Dies impliziert, dass $|a_n - s| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, und daher $a_n \to s$ für $n \to \infty$. □

**Bemerkungen:** 1. Im obigen Satz genügt es, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ monoton ist.
2. Beachte: In der Konvergenzaussage des Monotoniekriteriums geht ganz wesentlich die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen ein!

**Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen.**
Dieses Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln war bereits in Mesopotamien zur Zeit des Köngis Hammurabi I. (mehr als 1700 v. Chr.) bekannt.
Gegeben sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Gesucht ist $\sqrt{a}$. Hierzu definieren wir rekursiv Näherungen $x_n, n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt: Wir wählen einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ (z.B. $x_0 = a$) und setzen

$$(*) \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Eine einfache Induktion zeigt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tatsächlich wohldefiniert ist mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Idee des Verfahrens ist folgende: Ist $x > 0$ eine Näherung für $\sqrt{a}$, so auch

$\frac{a}{x}$, und man verwendet das arithmetische Mittel $x' := \frac{1}{2}\big(x + \frac{a}{x}\big)$ als neue Näherung für $\sqrt{a}$. Der Nutzen dieses Vorgehens bleibt aber noch unklar. Das Verfahren ist nur deshalb tatsächlich gut, weil die Folge der Nährungen $(x_n)$ tatsächlich gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, und zwar unabhängig von der Wahl des Startwerts $x_0$:

**Behauptung:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

*Beweis.* Für $n \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir aus der Rekursionsvorschrift:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a \;&=\; \frac{1}{4}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)^2 - a \;=\; \frac{1}{4}\Big(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a\Big) \\ &=\; \frac{1}{4}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt hieraus, dass

$$(**) \quad x_n \geq \sqrt{a} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir behaupten nun, dass die Folge der $x_n$ ab $n = 1$ monoton fallend ist (Vorsicht: dies gilt nicht notwendig ab $n = 0$!) Dazu betrachten wir für $n \geq 1$ die Differenzen:

$$x_{n+1} - x_n \;=\; \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n} - 2x_n\Big) \;=\; \frac{1}{2x_n}\big(a - x_n^2\,\big) \underset{(**)}{\leq} 0.$$

Wegen $(**)$ ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ auch beschränkt, und Anwendung des Monotoniekriteriums liefert ihre Konvergenz. Sei also

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Mit dem Vergleichskriterium folgt dann aus $(**)$, dass $x \geq \sqrt{a}$, insbesondere $x > 0$. Um den Wert von $x$ zu bestimmen, wenden wir nun eine wichtige Idee an: wir bilden, unter Beachtung der Regeln für Grenzwerte, auf beiden Seiten der Rekursionsformel $(*)$ den Limes $n \to \infty$. Dies liefert die Identität

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big).$$

Multipliziert man diese Identität mit $x$ durch, so erhält man $x^2 = a$, und wegen $x > 0$ schließlich folgt $x = \sqrt{a}$ wie behauptet. □

Wir bemerken noch: Da die Folge der Näherungen $x_n$ ab $n = 1$ monoton gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, ist tatsächlich jede neue Näherung mindestens genauso gut wie die vorangehende. Tatsächlich ist die Konvergenz sehr rasch. Das kann man sich durch eine weitere Analyse der Folge $(x_n - \sqrt{a}\,)$ überlegen, siehe z.B. Königsberger, Analysis I, Kap. 5.4.

## 4.3 Teilfolgen und Cauchyfolgen

**Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge $X$. Unter einer Teilfolge der Folge $(a_n)$ versteht man eine Folge der Form $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ mit einer streng monoton wachsenden Folge von Indizes $n_k \in \mathbb{N}$, d.h. $n_1 < n_2 < \ldots$.
Setzt man $J = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, so schreibt man auch $(a_j)_{j\in J}$.

Man erhält also eine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem man aus ihr Folgenglieder mit aufsteigenden Indizes $n_1, n_2, \ldots$ auswählt und zu einer neuen Folge zusammensetzt.

**Beispiele.** 1. Für $n_k = k^2$ erhalten wir die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_4, a_9, \ldots)$.
2. Für $J = \{j \in \mathbb{N} : j \text{ Primzahl}\}$ ist $(a_j)_{j\in J} = (a_2, a_3, a_5, a_7, \ldots)$.

**Beobachung:** Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so ist jede Teilfolge von $(a_n)$ ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert $a$.
Denn: ist $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, so folgt wegen $n_k \geq k$, dass erst recht $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ für alle $k \geq n_0$.

**4.8 Lemma.** *Jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine monotone Teilfolge.*

*Beweis.* Wir nennen $a_n$ „hoch", falls $a_m \leq a_n$ für alle $m > n$. Ferner setzen wir

$$J := \{n \in \mathbb{N} : a_n \text{ hoch}\}.$$

Es ergeben sich zwei mögliche Fälle:
Fall 1: Die Menge $J$ ist unendlich. Dann ist $(a_j)_{j\in J}$ eine Teilfolge von $(a_n)$, und sie ist monoton fallend.
Fall 2: $J$ ist endlich. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass kein $a_n$ mit $n > n_0$ hoch ist. Sei nun $n > n_0$. Dann ist $a_n$ nicht hoch, und daher gibt es einen Index $n_1 > n$ mit $a_{n_1} > a_n$. Auch $a_{n_1}$ ist nicht hoch, und wir können daher einen weiteren Index $n_2 > n_1$ finden, so dass $a_{n_2} > a_{n_1}$. Induktiv erhalten wir so eine monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unserer Ausgangsfolge. □

Der nächste Satz beinhaltet eine der wichtigsten Konsequenzen aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

**4.9 Satz (Bolzano-Weierstraß).** *Jede beschränkte Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Nach Lemma 4.8 besitzt $(a_n)$ eine monotone Teilfolge. Diese ist ebenfalls beschränkt und daher nach dem Monotonie-Krierium konvergent. □

**Beispiel.** Wir betrachten die Folge

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

Diese ist beschränkt (mit $|a_n| \leq 2$), aber nicht konvergent: die Teilfolge $(a_{2n}) = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $1$, die Teilfolge $(a_{2n+1}) = \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dagegen konvergiert gegen $-1$. Wir haben damit zwei konvergente Teilfolgen gefunden, und da deren Grenzwerte nicht übereinstimmen, kann die Ausgangsfolge selbst nicht konvergieren.

**Definition.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Cauchyfolge*, falls gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle } \ n, m \geq n_0.$$

**Beispiel.** Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist keine Cauchyfolge, da $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**4.10 Satz.** *Jede konvergente Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist auch Cauchyfolge.*

*Beweis.* Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Um die Konvergenz ausnutzen zu können, schätzen wir zunächst die Beträge der Differenzen $a_n - a_m$ folgendermaßen mit der Dreiecksungleichung ab:

$$(*) \quad |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a|.$$

Nun wählen wir zu gegebenem $\epsilon > 0$ den Schwellenindex $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt mit $(*)$:

$$\forall\, n, m \geq n_0 \, : \, |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

□

**4.11 Satz (Cauchy-Kriterium).** *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn sie konvergiert.*

Der Vorteil des Begriffs der Cauchyfolge liegt darin, dass man damit über die Konvergenz einer Folge entscheiden kann, ohne dass man den (allfälligen) Grenzwert kennen muß oder erraten kann!

*Beweis.* Es ist nur noch zu zeigen, dass jede Cauchyfolge $(a_n)$ konvergiert. Zunächst überlegen wir uns, dass $(a_n)$ beschränkt ist, mit dem Ziel, dann den Satz von Bolzano-Weierstraß anzuwenden. Aufgrund der Cauchybedingung können wir einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \text{ für alle } n \geq n_0\,.$$

(Hier ist $\epsilon = 1$ und $m = n_0$.) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n_0}| + 1\}\,.$$

Dies zeigt die Beschränktheit der Folge $(a_n)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(a_n)$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert wir mit $a$ bezeichnen. Wir wollen nun zeigen, dass die gesamte Folge $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann finden wir Indizes $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } k \geq N_1 \quad \text{und}$$
$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N_2\,.$$

Für $k \geq \max(N_1, N_2)$ erhalten wir insgesamt die Abschätzung

$$|a_k - a| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $|a_k - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $k \geq N_2$ (weil $n_k \geq k$).

□

## 4.4 Uneigentliche Konvergenz

Bisher haben wir nur reelle Zahlen als Grenzwerte reeller Folgen zugelassen. Es ist aber oft nützlich, im Falle unbeschränkter Folgen die Begriffsbildung auszudehnen.

**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ heißt *uneigentlich konvergent gegen* $\infty$, falls es zu jeder Schranke $M > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$a_n > M \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Man schreibt dann:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Analog heißt die Folge $(a_n)$ *uneigentlich konvergent gegen* $-\infty$, falls es zu jedem $M > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n < -M$ für alle $n \geq n_0$. Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Beispiele.** 1. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.
2. Allgemeiner: Ist $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ monoton wachsend und nach oben unbeschränkt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Denn zu jedem $M > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > M$, und wegen der Monotonie der Folge ist auch $a_n > M$ für alle $n \geq n_0$.
3. Die Folge $(a_n)$ mit $a_n = (-1)^n \cdot n$ ist weder konvergent noch uneigentlich konvergent.

**4.12 Lemma.** *Eine Folge* $(a_n)$ *in* $\mathbb{R}$ *ist genau dann uneigentlich konvegent gegen* $\infty$, *wenn folgendes gilt:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > 0 \text{ *für alle* } n \geq n_0 \;\; \textbf{\textit{und}} \;\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

*Beweis.* Für beliebiges $M > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ besteht die Äquivalenz

$$a_n > M \text{ für alle } n \geq n_0 \iff a_n > 0 \text{ und } \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

□

**Beispiel.** Für jede reelle Zahl $x > 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.
Denn $x^n > 0$ für alle $n$, und nach Beispiel 4.2 (4) ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

## 4.5 Abzählbarkeitsfragen

In diesem Abschnitt lernen wir einen wesentlichen Unterschied zwischen den reellen und den rationalen Zahlen kennen: die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ dagegen ist überabzählbar. Wir beginnen mit der Einführung einiger Begriffe.

**Definition.** (1) Eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt, d.h. wenn es eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt, so dass $X$ sich mit $x_i = f(i)$ aufzählend schreiben lässt als $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. (Dabei sind Mehrfachnennungen möglich). Auch $\emptyset$ wird als abzählbar definiert.
(2) Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzähbar*.

**Beispiel:** Jede endliche Menge $X = \{x_1, \dots x_n\}$ ist abzählbar. Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ ist z.B. gegeben durch

$$f(i) := \begin{cases} x_i & \text{falls } 1 \leq i \leq n, \\ x_1 & \text{falls } i > n. \end{cases}$$

**Definition.** Eine unendliche abzählbare Menge heißt *abzählbar unendlich*.

**Bemerkung:** Man kann sich leicht überlegen, dass es zu jeder abzählbar unendlichen Menge $X$ sogar eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt. Dazu muss man aus der gegebenen Abzählung $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ eine neue Abzählung konstruieren, bei der bereits gezählte Elemente übersprungen werden. (Siehe die Zentralübung!)

**Beispiele für abzählbar unendliche Mengen:**

1. $\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N}_0$; eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch $f(n) = n - 1$.
3. $\mathbb{Z}$; eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**4.13 Satz.** (1) *Ist $X$ abzählbar, so ist auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ abzählbar.*

(2) *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen $X_n$, $n \in \mathbb{N}$ ist ebenfalls abzählbar.*

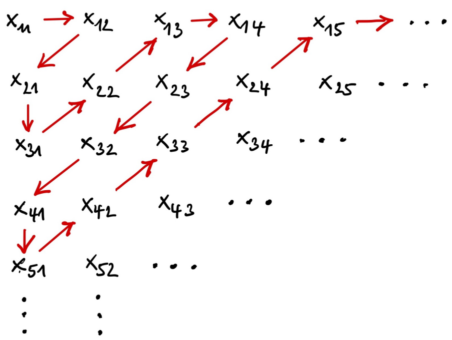
*Beweis.* (1) Übung.
(2) Setze

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n .$$

Wir können annehmen, dass $X \neq \emptyset$ und dass $X_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$; denn ist $X_n = \emptyset$, so können wir $X_n$ durch ein nichtleeres $X_m$ mit $m \in \mathbb{N}$ ersetzen. Sei

$$X_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots\}$$

eine Abzählung der Menge $X_n$. Wir betrachten nun das folgende Schema mit den Abzählungen der Mengen $X_1, X_2, \dots$ untereinander angeordnet. Dann liefert das den Pfeilen folgende Durchlaufen des Schemas eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$.




□

**4.14 Korollar.** $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

*Beweis.*

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Jede der Mengen $X_n = \{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\}$ ist abzählbar (da $X_n$ in Bijektion steht zu $\mathbb{Z}$ via $\frac{k}{n} \mapsto k$). Also ist nach Satz 4.13 auch die Vereinigung der $X_n$ abzählbar. □

**4.15 Satz.** $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

*Beweis.* (Durch Widerspruch). Wir nehmen an es gäbe eine Abzählung $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Wir konstruieren nun eine weitere reelle Zahl $\xi$, die nicht in dieser Abzählung vorkommt. Dazu definieren wir rekursiv eine Folge ineinander geschachtelter Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ $x_n \notin I_n$ wie folgt:
Wir beginnen mit $I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2]$. Ist $I_n$ für $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, so teilen wir es in drei gleichlange abgeschlossenen Teilintervalle, und wählen $I_{n+1}$ als das linke oder rechte abgeschlossene Drittel von $I_n$ so, dass es $x_{n+1}$ nicht enthält. (Das ist möglich, da diese beiden Drittel disjunkt sind, und daher $x_{n+1}$ in höchstens einem davon enthalten enthalten ist.)
Für die Randpunkte der so konstruierten Intervalle $I_n$ gilt

$$(*) \quad a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1.$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent nach aufgrund des Monotoniekriteriums (Satz 4.7). Sei $\xi := \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ihr Grenzwert. Für $m \le n$ gilt

$$a_m \le a_n < b_n \le b_m.$$

Dies zeigt, dass $a_m < b_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Mit dem Vergleichskriterium für Grenzwerte folgt mit $m \to \infty$, dass $\xi \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\xi \in [a_n, b_n] = I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil aber $x_n \notin I_n$, muss $\xi \ne x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sein, im Widerspruch zu unserer Annahme. $\square$

# Kapitel 5

# Komplexe Zahlen

## 5.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Um die Zahlbereichserweiterung diese Abschnitts zu motivieren, betrachten wir die Gleichung

$$(*) \quad x^2 + 1 = 0.$$

Diese einfache quadratische Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq 0$ (aufgrund der Anordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$), und daher $x^2+1 > 0$. Unser Ziel im Folgenden ist die Konstruktion eines Körpers $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, in dem die Gleichung $(*)$ lösbar ist. Danach werden wir sehen, dass im Körper $\mathbb{C}$ tatsächlich automatisch eine große Vielfalt ähnlicher Gleichungen lösbar wird.

**Vorüberlegung:** Angenommen, es gibt einen Körper $\mathbb{C}$ der $\mathbb{R}$ umfasst und in dem die Gleichung $(*)$ eine Lösung besitzt; nennen wir diese Lösung $i \in \mathbb{C}$ ($i$ wie imaginär). Es ist also

$$i^2 = -1.$$

Beachtet man dies, so erhält man nach den Rechenregeln in einem Körper für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x+iy) + (u+iv) &= (x+u) + i(y+v), \\ (x+iy) \cdot (u+iv) &== (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Diese Beobachtung münzen wir nun in eine entsprechende Definition um:

**Definition.** Wir setzen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der folgenden Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} (x,y) + (u,v) &:= (x+u, y+v), \\ (x,y) \cdot (u,v) &:= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned}$$

Und tatsächlich gilt nun:

**5.1 Satz.** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper, genannt der* ***Körper der komplexen Zahlen.***

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass die Operationen $+, \cdot$ kommutativ und assoziativ sind, und dass das Distributivgesetz erfüllt ist. Neutrales Element bzgl. der Addition ist offenbar $0 = (0,0)$. Neutral bzgl. der Multiplikation ist $1 = (1,0)$, denn

$$(1,0) \cdot (x,y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = (x,y).$$

Die additiven und multiplikativen Inversen sind:

$$\begin{aligned} -(x,y) &= (-x,-y), \\ (x,y)^{-1} &= \Big(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-y}{x^2+y^2}\Big), \quad \text{sofern } (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Das ist im Fall der Addition offensichtlich, und ergibt sich im Fall der Multipliktion durch eine kurze Rechnung (führen Sie diese zur Übung explizit durch!) □

Wir können den Köper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in natürlicher Weise als Teilkörper des Körpers $\mathbb{C}$ auffassen: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$(x,0)+(y,0) = (x+y,0), \quad (x,0)\cdot(y,0) = (xy,0).$$

Daher ist die Abbildung $\Phi : x \mapsto (x,0), \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein injektiver Kopererhomomorphismus, d.h. $\Phi$ ist injektiv und es gilt $\Phi(x+y) = \Phi(x)+\Phi(y)$, $\Phi(x\cdot y) = \Phi(x)\cdot\Phi(y)$.
Man identifziert daher $x \in \mathbb{R}$ mit dem Element $(x,0) \in \mathbb{C}$ und fasst $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf.

**Bezeichung:** Das Element $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ heißt die *imaginäre Einheit.*

Das Element $i$ erfüllt tatsächlich unsere Ausgangsgleichung $x^2+1=0$ in $\mathbb{C}$, denn

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Neben der Lösung $i$ der Gleichung $x^2 = -1$ können wir gleich noch eine zweite Lösung in $\mathbb{C}$ angeben, nämlich $-i = (-1)\cdot i$. Wir werden bald sehen, dass $i$ und $-i$ auch die einzigen Lösungen sind.

Unter Verwendung der imaginären Einheit können wir nun jedes $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$z = (x,y) = (x,0)+(0,y) \;=\; (x,0)+(0,1)\cdot(y,0) \;=\; x+iy.$$

Diese Darstellung ist eindeutig, da die Komponenten $x, y$ im Tupel $(x,y)$ eindeutig sind. Also: Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = x+iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

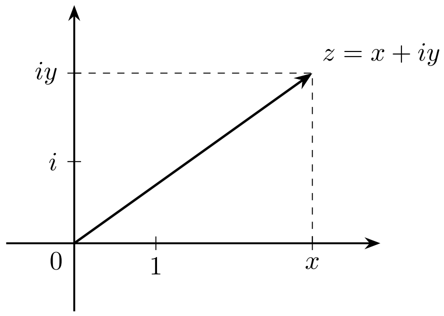
**Definition.** Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &:= x \quad \text{der } \textit{Realteil} \text{ von } z, \\ \operatorname{Im} z &:= y \quad \text{der } \textit{Imaginärteil} \text{ von } z. \end{aligned}$$

$z$ heißt *reell*, falls $\operatorname{Im} z = 0$ bzw. *imaginär*, falls $\operatorname{Re} z = 0$.

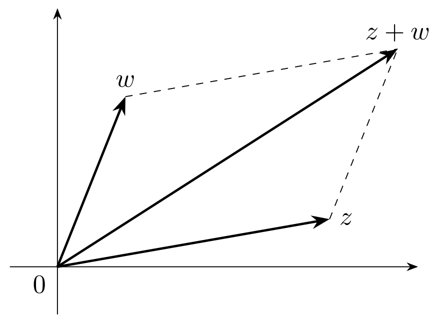
**Beachte:** Zwei komplexe Zahlen stimmen genau dann überein, wenn sowohl ihre Realteile als auch ihre Imaginärteile übereinstimmen.

Geometrisch veranschaulicht man sich die Menge der komplexen Zahlen als die Ebene $\mathbb{R}^2$. Diese wird die *komplexe Zahlenebene* oder (nach Gauß, der bereits um 1800 komplexe Zahlen verwendete) die *Gaußsche Zahlenebene* genannt. Die obige algebraische Einführung des Körpers der komplexen Zahlen geht auf William Hamilton (1805-65) zurück.




Die Koordinatenachsen durch $0, 1$ bzw. durch $0, i$ heißen die reelle bzw. imaginäre Achse.

**Geometrische Bedeutung der Addition:**
$z = x + iy$, $w = u + iv \Longrightarrow$
$z + w = (x + u) + i(y + v)$.
Bei Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ entspricht dies der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.



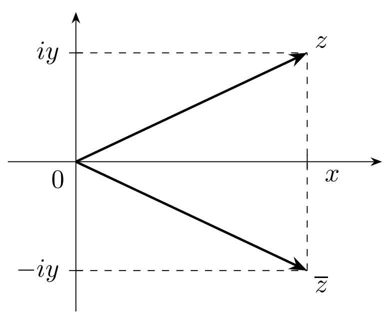

## 5.2 Komplexe Konjugation und Betrag

**Definition.** Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\overline{z} := x - iy$$

die zu $z$ *konjugiert komplexe Zahl.*

Geometrisch ist die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ eine Spiegelung an der reellen Achse.




**5.2 Lemma.** 1. $\overline{\overline{z}} = z$.

2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
4. $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$; $\quad z - \overline{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$.
5. $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
6. $z = x + iy$ *mit* $x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow z\overline{z} = x^2 + y^2$.

   *Insbesondere gilt:* $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ *mit* $z\overline{z} \geq 0$.

*Beweis.* Eigenschaften 1, 2, 4 und 5 sind offensichtlich.

Zu 3.: Sei $z = x + iy$, $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv + yu) = (x - iy)(u - iv) = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Zu 6.: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$. □

**Zum Invertieren in $\mathbb{C}$:** Gegeben sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in Standardform, d.h. $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wie können wir auch $z^{-1} = \frac{1}{z}$ in Standardform schreiben? Der Trick besteht darin, Teil 6 des Lemmas zu nutzen und mit $\overline{z}$ zu erweitern:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

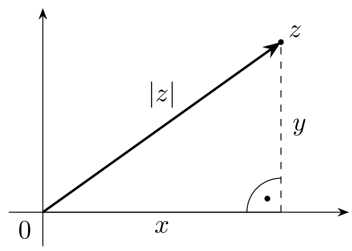
Die rechte Seite ist nun in Standardform.

**Bemerkung:** Der Körper der komplexen Zahlen kann nicht angeordnet werden, d.h. es gibt keine Ordnung auf $\mathbb{C}$, mit der $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper wäre. Denn sonst wäre $-1 = i^2 > 0$, da in einem angeordneten Körper das Quadrat jeder von 0 verschiedenen Zahl positiv ist. Also wäre $1 < 0$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass in jedem angeordneten Körper $1 > 0$ gilt. Dennoch kann man den Betrag einer komplexen Zahl definieren; das kommt als Nächstes.

**Definition.** Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ist definiert als

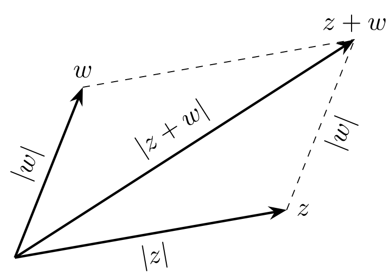
$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist $|z|$ die Länge des Ortsvektors von $z$ in der Gaußschen Zahlenebene.




**5.3 Lemma (Eigenschaften des Betrags).**

1. $|z| \geq 0$, *und* $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.
4. $|zw| = |z| \cdot |w|$ ***(Multiplikativität)****.*
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$ ***(Dreiecksungleichung)****.*
6. $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$ ***(umgekehrte Dreiecksungleichung)****.*



*Beweis.* Die Eigenschaften 1–3 sind klar, und Eigenschaft 4 folgt durch Wurzelziehen aus

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2.$$

Zum Beweis von 5. schreiben wir

$$\begin{aligned}(*) \quad |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + (z\overline{w} + \overline{z}w) + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \leq \big(|z| + |w|\big)^2,\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung aus der Ungleichung $\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z| \cdot |w|$ folgt, welche sich aus 2., 3. und 4. ergibt. Aus der Abschätzung $(*)$ erhalten wir wieder durch Wurzelziehen die Behauptung. Eigenschaft 6 schließlich folgt wie für reelle Zahlen aus 5. □

**Vorsicht:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x|^2 = x^2$. Für $z \in \mathbb{C}$ dagegen gilt $|z|^2 = z^2$ nur falls $z \in \mathbb{R}$. Denn schreibt man $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = x^2 + y^2$ und $z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$. Gleichheit besteht nur dann, wenn $y = 0$ ist. Aufgrund der Multiplikativität des Betrags gilt aber stets $|z^2| = |z|^2$.

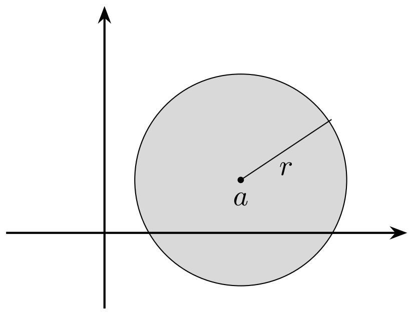
**Bezeichnung.** Für $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ ist

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$$

die Gleichung eines Kreises um $a$ vom Radius $r$. Mit

$$B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

bezeichnen wir die offene Kreisscheibe um $a$ vom Radius $r$. Dabei besagt *offen*, dass der Rand der Kreisscheibe (also der Kreis vom Radius $r$) *nicht* zu $B_r(a)$ gehört.




## 5.3 Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

**I. Quadratische Gleichungen in** $\mathbb{C}$.

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$(*) \quad z^2 + pz + q = 0$$

mit Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$. Gesucht sind die Lösungen dieser Gleichung in $\mathbb{C}$. Dazu führen wir zunächst in $(*)$ eine „quadratische Ergänzung“ durch: Addition von $\frac{p^2}{4}$ auf beiden Seiten zeigt, dass $(*)$ äquivalent ist zur Gleichung

$$\big(z + \frac{p}{2}\big)^2 = c \quad \text{mit} \quad c := -q + \frac{p^2}{4}.$$

Damit ist unser Problem reduziert auf die Lösung von Gleichungen der Form

$$(**) \quad z^2 = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass mit jeder Lösung $z$ auch $-z$ eine Lösung von $(**)$ ist. Wir schreiben nun die rechte Seite als $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und setzen $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} z^2 = c &\iff (x+iy)^2 = a + ib \\ &\iff x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\ &\iff \big(x^2 - y^2 = a \ \wedge\ 2xy = b\big). \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen müssen wir nun nach $x$ und $y$ auflösen. Dazu nutzen wir aus, dass $x^2 + y^2 = |z|^2 = |c|$. Durch Addition und Subtraktion der Gleichung $x^2 - y^2 = a$ erhalten wir

$$2x^2 = |c| + a \ \wedge\ 2y^2 = |c| - a \geq 0.$$

Hieraus folgt

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)}\,, \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)}\,.$$

Wegen $2xy = b$ sind hierbei folgende Vorzeichenkombinationen möglich (an erster Stelle das Vorzeichen von $x$, an zweiter Stelle das von $y$):

$$\begin{aligned} &(+,+) \text{ und } (-,-) \quad \text{falls } b \geq 0; \\ &(+,-) \text{ und } (-,+) \quad \text{falls } b < 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher als Kandidaten für die Lösung von $(**)$:

- Falls $b \geq 0$: $z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)}\,, \ z_2 = -z_1.$
- Falls $b < 0$: $z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)}\,, \ z_2 = -z_1.$

Durch Quadrieren rechnet man nun nach, dass die Kandidaten $z_1$ und $z_2 = -z_1$ in beiden Fällen tatsächlich die Gleichung $z^2 = c$ lösen.

**Fazit:** Die Gleichung $(**)$ hat die Lösungen $z_1$ und $z_2 = -z_1$, wobei $z_1 = z_2 = 0$ genau dann, wenn $c = 0$.

**5.4 Korollar.** *Die quadratische Gleichung*

$$(*) \quad z^2 + pz + q = 0 \quad \textit{mit } p, q \in \mathbb{C}$$

*besitzt in* $\mathbb{C}$

- *zwei verschiedene Lösungen, falls* $\frac{p^2}{4} - q \neq 0$.
- *eine Lösung, falls* $\frac{p^2}{4} - q = 0$.

Dies ist Spezialfall eines allgemeineren Sachverhalts, den wir als Nächstes erläutern wollen.

## II. Algebraische Gleichungen.

Unter einer algebraischen Gleichung in $\mathbb{C}$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ versteht man eine Gleichung der Form

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und einer Unbekannten $z \in \mathbb{C}$.

Der folgende Satz ist überaus wichtig in der Analysis und Linearen Algebra. Er kann – mit einigem Aufwand – mit Methoden der Analysis 1 bewiesen werden, das wollen wir hier aber nicht tun, denn (zumindest die Mathematiker unter Ihnen) werden später elegante Beweise mit Methoden der komplexen Analysis in der „Funktionentheorie" kennenlernen.

**Fundamentalsatz der Algebra.**
Jede algebraische Gleichung in $\mathbb{C}$ hat (mindestens) eine Lösung in $\mathbb{C}$.

## 5.4 Polynome

In diesem Abschnitt ist der Grundkörper stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

**Vorbemerkung: Algebraische Operationen mit Funktionen.**
Seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen auf einer Menge $X$ mit Werten in $\mathbb{K}$. Wir definieren dann die Summe bzw. Differenz $f \pm g : X \to \mathbb{K}$ und das Produkt $f \cdot g : X \to \mathbb{K}$ punktweise, d.h.

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir die Funktion $\lambda f : X \to \mathbb{K}$ durch $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x),\ x \in \mathbb{K}$.
Schliesslich definieren wir noch den Quotienten von $f$ und $g$ (beachte den Definitionsbereich!):

$$\frac{f}{g} : \{x \in X : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}, \quad \Big(\frac{f}{g}\Big)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Definition.** Eine Funktion $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ heißt *Polynomfunktion* (kurz: *Polynom*) mit Koeffizienten $a_j$ über $\mathbb{K}$. Das *Nullpolynom* $p = 0$ ist das Polynom, dessen Koeffizienten alle Null sind.
Wir setzen ferner

$$\mathcal{P}_{\mathbb{K}} := \{p : p \text{ Polynomfunktion über } \mathbb{K}\}.$$

**Hilfssatz.** Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit $p(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$. Dann ist $p$ das Nullpolynom, d.h. $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

*Beweis.* (Mit Induktion nach $n$).
1. $n = 0$: In diesem Fall gilt für alle $x \in \mathbb{K}$: $0 = p(x) = a_0$.
2. Schluss $n \longrightarrow n+1$: Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ mit $p(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$. Dann ist $a_0 = p(0) = 0$, und es folgt

$$(*) \quad a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Betrachte das Polynom $q(x) := a_1 + a_2 x + \ldots + a_{n+1} x^n$. Wegen $(*)$ gilt $q(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Setze nun $x = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$0 = q\Big(\frac{1}{m}\Big) = a_1 + \frac{a_2}{m} + \ldots \frac{a_{n+1}}{m^n} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} a_1.$$

Daher ist auch $q(0) = a_1 = 0$. Wir können nun die Induktionsvoraussetzung auf $q$ anwenden und erhalten $a_1 = \ldots = a_{n+1} = 0$. □

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich sofort die nützliche

**Methode des Koeffizientenvergleichs.** Zwei Polynome über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind als Funktionen genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen.

**Definition.** Der *Grad* eines vom Nullpolynom verschiedenen Polynoms $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist definiert als der maximale Index $k$ mit $a_k \neq 0$. Für das Nullpolynom $p = 0$ setzt man $\operatorname{grad} p := -\infty$.

**5.5 Lemma.** *Seien $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$. Dann sind auch $p + q$ und $p \cdot q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$.*

Bemerkung: $(\mathcal{P}_{\mathbb{K}}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins 1.

*Beweis.* Wir können o.E. $p, q \neq 0$ annehmen. Sei $\operatorname{grad} p = n$, $\operatorname{grad} q = m \in \mathbb{N}_0$, dh.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \ldots + a_0\,; \quad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = b_m x^m + \ldots + b_0;\; a_n, b_m \neq 0.$$

Da die Grade von $p, q$ nicht übereinstimmen müssen, setzten wir $a_i := 0$ für $i > n$ und $b_j := 0$ für $j > m$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(p+q)(x) &= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i\,, \\
(pq)(x) &= (a_0 + \ldots + a_n x^n) \cdot (b_0 + \ldots + b_m x^m) = a_0 b_0 + \ldots a_n b_m x^{n+m} \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{i,j:\, i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{n-i}\,.
\end{aligned}$$

□

Aus obigen Formeln ersehen wir auch, dass

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(p+q) &\leq \max(\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q). \\
\operatorname{grad}(pq) &= \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q\,,
\end{aligned}$$

mit den Konventionen

$$-\infty < n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } -\infty + n := -\infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}.$$

**5.6 Satz (Polynomdivision).** *Seien $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ und $q$ nicht das Nullpolynom. Dann gibt es eindeutige Polynome $r, s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit*

$$(*) \quad p = sq + r \quad \textit{und} \quad \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q.$$

**Bemerkung:** Beachte die Analogie zur Division mit Rest in $\mathbb{Z}$!

*Beweis von Satz 5.6.* **Schritt I:** Zunächst zeigen wir die Existenz einer Darstellung $(*)$. Dabei können wir o.E. annehmen, dass $p \neq 0$, da wir in diesem Fall mit $r = s := 0$ gleich fertig sind. Also ist $n := \operatorname{grad} p \in \mathbb{N}_0$, und wir führen eine Induktion nach $n$. Setze zunächst $m = \operatorname{grad}\ q$.
Induktionsanfang $n = 0$: Im Fall $m > 0$ ist $p = 0 \cdot q + r$ mit $r = p$. Im Fall $m = 0$ sind $p, q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, und mit $s := \frac{p}{q}$ haben wir $p = sq + 0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Falls $m > n$, so haben wir die Darstellung $p = 0 \cdot q + r$ mit $r = p$ und sind fertig. Sei also $m \leq n$ angenommen. Wir haben

$$p(x) = a_n x^n + \ldots; \quad q(x) = b_m x^m + \ldots \qquad \text{mit } a_n, b_m \neq 0.$$

Wir betrachten nun das Polynom

$$(**) \quad p_1(x) := p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x).$$

$p_1$ ist so konstruiert, dass sein Grad kleiner als $n$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung lässt $p_1$ sich daher schreiben als

$$p_1 = s_1 q + r_1 \quad \text{mit } r_1, s_1 \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}\,,\ \operatorname{grad} r_1 < \operatorname{grad} q.$$

Einsetzen in $(**)$ liefert nun

$$p = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q + (s_1 q + r_1) \;=\; \Big(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + s_1\Big) q + r_1.$$

Diese Darstellung ist von der Form $(*)$, und der Induktionsschritt ist daher abgeschlossen.

**Schritt II:** Eindeutigkeit der Darstellung $(*)$. Angenommen $p$ hat zwei solche Darstellungen $p = s_1 q + r_1 = s_2 q + r_2$. Subtraktion liefert dann $(s_1 - s_2) q = r_2 - r_1$. Dabei ist der Grad von $r_2 - r_1$ kleiner als der Grad von $q$. Wäre $s_1 \neq s_2$ (als Funktionen), so wäre $s_1 - s_2$ nicht das Nullpolynom, und der Grad der linken Seite wäre größer als der Grad von $q$. Also ist $s_1 = s_2$, und daraus folgt schließlich auch $r_1 = r_2$. □

**Definition.** Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$.
Ein Polynom $q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ heißt *Teiler* von $p$, falls es ein Polynom $s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ gibt mit $p = sq$.
Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{K}$ heißt *Nullstelle* von $p$, falls $p(\alpha) = 0$.

Betrachte nun ein Polynom $p \neq 0$ mit Nullstelle $\alpha$, d.h. $p(\alpha) = 0$. Polynomdivision mit $q(x) = x - \alpha$ liefert die Darstellung

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot s(x) + r(x)$$

mit einem Polynom $r$ vom Grad $\leq 0$, d.h. $r \in \mathbb{K}$. Wegen $p(\alpha) = 0$ muss sogar $r = 0$ sein. Das zeigt:

**5.7 Korollar.** *Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, $p \neq 0$ mit $p(\alpha) = 0$. Dann existiert ein eindeutiges Polynom $s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit*

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot s(x), \qquad \textit{wobei } \operatorname{grad} s = \operatorname{grad} p - 1.$$

Ist hier $s(\alpha) = 0$, so kann man den Linearfaktor $x - \alpha$ nochmals abspalten, usw. Das führt auf den Begriff der Nullstellenordnung:

**Definition.** Ist $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ durch $(x - \alpha)^k$ teilbar, aber nicht durch $(x - \alpha)^{k+1}$, so heißt $\alpha$ eine $k$-fache Nullstelle von $p$, und $k$ heißt die *Ordnung* der Nullstelle $\alpha$.

**5.8 Korollar.** (1) *Sei $p$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann hat $p$ höchstens $n$ Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).*

(2) ***Identitätssatz für Polynome:*** *Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$. Angenommen, $p$ habe mindestens $n+1$ Nullstellen. Dann ist $p = 0$, d.h. $a_0 = \ldots = a_n = 0$.*

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom über $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt. Abspalten des entsprechenden Linearfaktors und Iteration liefert:

**5.9 Satz.** *Jedes Polynom $p$ über $\mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$, d.h.*

$$p(x) = c\,(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

*wobei $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $\alpha_1, \dots \alpha_n$ die Nullstellen von $p$ (mit Vielfachheiten).*

**Vorsicht:** Reelle Polynome $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ zerfallen im Allgemeinen *nicht* in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$! Z.B. hat $p(x) = x^2+1$ keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, aber $p(x) = (x+i)(x-i)$ über $\mathbb{C}$.
Der Fundamentalsatz der Algebra und die Zerlegbarkeit von Polynomen in Linearfaktoren sind eine beeindruckende Stärke der komplexen Zahlen gegenüber den reellen.

**Beispiel: Allgemeine Binomialkoeffizienten.**

**Definition.** Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$\binom{z}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{z-j+1}{j} = \begin{cases} \dfrac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!} & \text{falls } k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Beispiel: Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{2k-1}{2}\Big) = (-1)^k \cdot \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\cdot k!}.$$

Als Funktion von $z$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{z}{k}$ ein Polynom vom Grad $k$. Diese Beobachtung ist die Grundlage für den Beweis der folgenden Verallgemeinerung von Satz 2.5.

**5.10 Satz (Rekursionsformel).** *Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} = \binom{z+1}{k+1}.$$

*Beweis.* Fixiere $k$ und setze

$$p(z) := \binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} - \binom{z+1}{k+1}.$$

Dann ist $p$ ein Polynom, und nach Satz 2.5 gilt $p(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$. Wir können den Identitätssatz anwenden und erhalten $p(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. □

## 5.5 Folgen in $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt dehnen wir die Grundkonzepte und zentrale Aussagen über reelle Folgen auf Folgen in $\mathbb{C}$ aus.

**Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen.

(1) Die Folge $(a_n)$ heißt *konvergent* mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Das heißt: für jedes $\epsilon > 0$ liegen fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder $a_n$ in der Kreisscheibe $B_\epsilon(a)$.

Man schreibt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

(2) Die Folge $(a_n)$ heißt *Cauchyfolge*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

(3) Die Folge $(a_n)$ heißt *beschränkt*, falls eine Konstante $M > 0$ exitiert, so dass

$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beachte:** $\boxed{a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0.}$

**5.11 Lemma.** *Der Grenzwert eine konvergenten Folge in $\mathbb{C}$ ist eindeutig. Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist beschränkt. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert gegen denselben Grenzwert wie die Ausgangsfolge.*

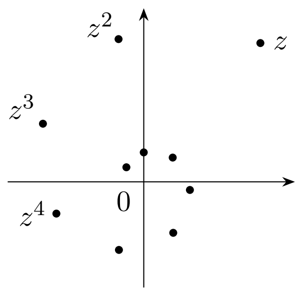
*Beweis.* Wörtlich wie für reelle Folgen (Abschnitt 4.1). □

**Beispiele.**

(1) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Denn: $|z^n| = |z|^n \to 0$ für $n \to \infty$.

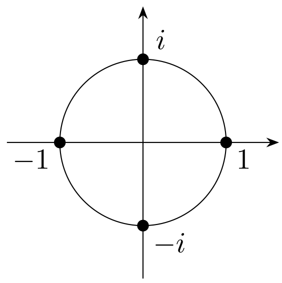



(2) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ fest. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0.$$

Denn: $\dfrac{n^k}{|z|^n} \to 0$ für $n \to \infty$, siehe Beispiel 4.6 in Kapitel 4.

(3) Die Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots)$ divergiert.
Denn sie hat Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten.




**5.12 Lemma.** *Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gelten:*

(1) $a_n \to a \in \mathbb{C}$ *genau dann, wenn* $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$ *und* $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$.

(2) $(a_n)$ *ist Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn* $(\operatorname{Re} a_n)$ *und* $(\operatorname{Im} a_n)$ *Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.*

*Beweis.* Wir schreiben $a_n = x_n + iy_n$ und $a = x + iy$ mit $x_n\,,\, y_n\,, x, y \in \mathbb{R}$.
(1) Es ist

$$|a_n - a|^2 \;=\; |(x_n + iy_n) - (x + iy)|^2 \;=\; |x_n - x|^2 \;+\; |y_n - y|^2.$$

Also gilt $|a_n - a| \to 0$ genau dann, wenn $|x_n - x| \to 0 \wedge |y_n - y| \to 0$.
Der Beweis von (2) verläuft analog. □

**5.13 Satz (Regeln für Grenzwerte).** *Seien* $(a_n)$, $(b_n)$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{C}$ *mit* $a_n \to a$, $b_n \to b$. *Dann gilt*

(1) $a_n + b_n \;\to\; a + b, \quad a_n b_n \;\to\; ab.$

(2) *Falls* $b \neq 0$, *so ist* $b_n \neq 0$ *für alle hinreichend großen* $n \in \mathbb{N}$ *und es gilt* $\dfrac{a_n}{b_n} \;\to\; \dfrac{a}{b}$.

(3) $|a_n| \;\to\; |a|$.

(4) $\overline{a_n} \;\to\; \overline{a}$.

*Beweis.* Die Regeln (1) – (3) beweist man wörtlich wie für reelle Folgen, siehe Satz 4.4 in Kapitel 4.
Zu (4): Schreibe wieder $a_n = x_n + iy_n$ und $a = x + iy$. Gemäß Lemma 5.12 folgt aus $a_n \to a$, dass $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dies impliziert mit Regel (1), dass $\overline{a_n} \;=\; x_n - iy_n \;\to\; x - iy \;=\; \overline{a}$. □

**5.14 Satz (Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$).** *Eine Folge* $(a_n)$ *in* $\mathbb{C}$ *ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn sie konvergiert.*

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 5.12 zusammen mit dem Cauchykriterium in $\mathbb{R}$. □

**5.15 Satz (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$).** *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{C}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt mit $|a_n| \leq M$. Schreibe wieder $a_n = x_n + iy_n$ mit $x_n$, $y_n \in \mathbb{R}$. Wegen $|x_n| \leq |a_n|$ und $|y_n| \leq |a_n|$ sind dann $(x_n)$ und $(y_n)$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ (Satz 4.9 ) besitzt die Folge $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $x$ deren Grenzwert. Nochmalige Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ zeigt, dass die zugehörige Folge $(y_{n_k})$, die selbst ja nicht konvergieren muss, wiederum eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt. Bezeichnen wir deren Grenzwert mit $y$, so erhalten wir insgesamt, dass die Folge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ gegen $x + iy$ konvergiert. □

**Definition.** Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungswert* einer Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)$ gibt, die gegen $a$ konvergiert.

**5.16 Satz.** (1) *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{C}$ *besitzt einen Häufungswert. (Das ist gerade die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß).*

(2) *Sei* $(a_n)$ *eine konvergente Folge in* $\mathbb{C}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *Dann ist* $a$ *ihr einziger Häufungswert.*

(3) $a \in \mathbb{C}$ *ist genau dann Häufungswert der Folge* $(a_n)$, *wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *unendlich viele Indizes* $n \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $|a_n - a| < \epsilon$.

Beachte in Teil (3), dass diese Aussage schwächer ist als die Charakterisierung der Konvergenz $a_n \to a$.

Vor dem Beweis dieses Satzes wollen wir uns einige Beispiele dazu ansehen.

**Beispiele:**

1. Die Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitzt die vier Häufungswerte $1, i, -1, -i$.
2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ besitzt keinen Häufungswert, da jede Teilfolge unbeschränkt ist.
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \begin{cases} n\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$
ist zwar unbeschränkt, hat aber $0$ als Häufungswert.

*Beweis von Satz 5.16.* (2) Aus der Konvergenz $a_n \to a$ folgt, dass auch jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert. $a$ ist daher der einzige Häufungswert der Folge $(a_n)$.
(3) 1. Sei $a$ ein Häufungswert von $(a_n)$ und $(a_{n_k})$ eine Teilfolge dazu mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Schwellenindex $k_0 = k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon \ \text{ für alle } k \geq k_0.$$

Die $a_{n_k}$ mit $k \geq n_0$ sind unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)$ wie verlangt.
2. Umgekehrt gelte für jedes $\epsilon > 0$, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen eine Teilfolge von $(a_n)$ finden, die gegen $a$ konvergiert. Das machen wir rekursiv:
Zunächst wählen wir zu $\epsilon = 1$ einen Index $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_{n_1} - a| < 1$. Dann können wir zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ einen Index $n_2 > n_1$ finden, so dass $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$, etc. Rekursiv können wir eine aufsteigende Folge von Indizes $n_1 < n_2 < \ldots$ finden, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

## 5.6 Limes superior und Limes inferior

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich reelle Folgen. Wir werden Häufungswerte reeller Folgen unter einem weiteren Blickwinkel betrachten. Dabei müssen wir wieder mit der erweiterten reellen Zahlengeraden $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ arbeiten. Zur Erinnerung: $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren dazu eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$s_n := \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Es ist also $s_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $s_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$, usw. Dabei lassen wir (ausnahmsweise) auch $\infty$ als Wert eines Folgengliedes zu. Falls $(a_n)$ nach oben beschränkt ist, so sind alle $s_n \in \mathbb{R}$ und $(s_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist monoton fallend. Falls $(a_n)$ nach oben unbeschränkt ist, so ist $(s_n)$ identisch $\infty$ (auch das ist monoton fallend). Daher existiert der (eigentliche oder uneigentliche) Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, wobei wir $\lim_{n\to\infty} \infty := \infty$ setzen.

**Definition.** Der Grenzwert der obigen Folge $(s_n)$ wird der *Limes superior* der Folge $(a_n)$ genannt und mit $\limsup_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet. Also:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Analog ist die durch

$$t_n := \inf\{a_k : k \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge monoton wachsend oder identisch $-\infty$, und man definiert den *Limes inferior* der Folge $(a_n)$ als

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

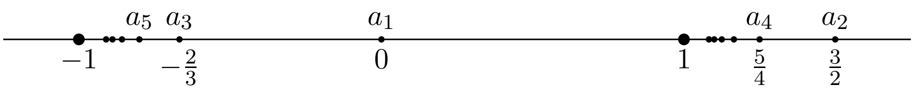
**Beobachtung:** Es ist $\limsup a_n < \infty$ genau dann, wenn $(a_n)$ nach oben beschränkt ist. Analog ist $\liminf a_n > -\infty$ genau dann, wenn $(a_n)$ nach unten beschränkt ist.
Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$t_1 \leq t_n \leq s_n \leq s_1.$$

Mit dem Vergleichskriterium für reelle Grenzwerte folgt daher

$$\underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n}_{=t_1} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n}_{=s_1}.$$

**Beispiele.** 1. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.




Für diese Folge gelten

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1\,.$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big) = 1.$$

Begründung zur zweiten Zeile: es ist

$$\sup_{k\geq n} a_k = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2. $(a_n) = (1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots)$. In diesem Fall ist $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

**5.17 Satz.** *Für eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ sind folgende beide Aussagen äquivalent:*

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$;

(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gilt:*

   (i) $a_n \geq a + \epsilon$ *für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$, und*

   (ii) $a_n > a - \epsilon$ *für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*

*Eine analoge Charakterisierung gilt für den Limes inferior.*

*Beweis.* Wir setzen wieder $s_n := \sup_{k \geq n} a_k$.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $\epsilon > 0$. Weil die Folge $s_n$ monoton fallend gegen $a$ konvergiert, muss $s_n \geq a$ für alle $n$ sein. Also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, unter Beachtung der Definition von $s_n$:

$$\exists\, k \geq n \, : \, a_k > \, s_n - \epsilon \, \geq a - \epsilon,$$

und hieraus folgt Bedingung (ii). Ferner folgt aus $a = \lim_{n\to\infty} s_n$ die Existenz eines Schwellenindex $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $s_n < a + \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Weil zudem $a_n \leq s_n$, folgt $a_n < a + \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und daher Bedingung (i).
(2) $\Longrightarrow$ (1): Aus Bedingung (ii) folgt, dass $s_n > a - \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon > 0$. Daher muss $\lim_{n\to\infty} s_n \geq a$ sein. Weiter besagt Bedingung (i), dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \leq a + \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daher muss auch $s_n \leq a + \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gelten, und hieraus folgt $\lim_{n\to\infty} s_n \leq a$. □

**Bemerkung:** In den Übungen werden wir sehen, dass für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_n \to a \iff \limsup a_n \, = \liminf a_n \, = a.$$

**5.18 Satz.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Folge.*

(a) *Falls $\limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, so ist $a$ der größte Häufungswert der Folge $(a_n)$.*

(b) *Falls $\liminf_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, so ist $a$ der kleinste Häufungswert der Folge $(a_n)$.*

*Beweis.* Wir beweisen Teil (a). Nach Satz 5.17 gilt für alle $\epsilon > 0$:

(i) $a_n > a - \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $a_n < a + \epsilon$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Aus diesen beiden Aussagen zusammen folgt, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für unendlich viele $n$ ist. Wegen Satz 5.16 ist daher $a$ ein Häufungswert der Folge $(a_n)$. Ist ferner $b$ eine reelle Zahl mit $b > a$, so kann $b$ kein Häufungswert von $(a_n)$ sein. Um das einzusehen, argumentieren wir folgendermaßen: Wir schreiben $b = a + 2\epsilon$ mit $\epsilon = \frac{1}{2}(b - a) > 0$. Dann ist $b - \epsilon = a + \epsilon$, und daher liegen im Intervall $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ höchstens endlich viele Glieder der Folge $(a_n)$. Es kann daher keine Teilfolge geben, die gegen $b$ konvergiert. □

Der Limes superior wird auch im nächsten Kapitel über Reihen eine Rolle spielen.

# Kapitel 6

# Reihen

## 6.1 Definition und erste Beispiele

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen (Die $a_k$ dürfen natürlich auch alle reell sein!) Können wir alle Glieder dieser Folge aufsummieren? Bisher kennen wir nur endliche Summen. Daher summieren wir schrittweise immer mehr Glieder der Folge auf. Genauer: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die $n$-te Partialsumme der Folge $(a_k)$ als

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Also: $s_1 = a_1\,,\ s_2 = a_1 + a_2\,,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ usw. Wir betrachten nun die Folge dieser Partialsummen.

**Definition.** Die *(unendliche) Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

mit Gliedern $a_k \in \mathbb{C}$ ist definiert als die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißte *konvergent*, falls ihre Partialsummenfolge $(s_n)$ konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

und nennt diesen Grenzwert den *Wert* der Reihe. Falls die Folge $(s_n)$ divergiert, heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

**Beachte:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Partialsummenfolge, als auch deren Grenzwert im Fall der Konvergenz.

Analog kann man aus einer gegebenen Folge der Form $(a_k)_{k\geq n_0}$ die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ bilden.

**6.1 Beispiele.** (1) Sei $a_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1). \qquad \text{(Arithmetische Summe!)}$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, und daher ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k$ divergent.

(2) Wir betrachten die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$
Wie lassen sich ihre Partialsummen $s_n$ berechnen? Der Trick zur Vereinfachung der Summen ist der folgende Ansatz für $k \in \mathbb{N}$:
$$(*) \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}\,,$$
mit noch zu bestimmenden Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$, die *von* $k$ *unabhängig* sein sollen. Durchmultiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner $k(k+1)$ zeigt:
$$(*) \iff 1 = A(k+1) + Bk \ \forall k \in \mathbb{N} \iff A = 1, B = -1.$$
Wir haben also
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$
Dies ist ein Spezialfall einer sogenannten *Partialbruchzerlegung*. Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big). \end{aligned}$$
Dies ist eine sogenannte *Teleskop-Summe*: Lässt man die Klammern weg, so sieht man, dass sich alle Summanden außer dem ersten und dem letzten sukzessive gegeneinander wegheben. Wir haben also
$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
Offenbar ist $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, und es folgt
$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1\,.}$$

Eine erste wichtige Beobachtung zu konvergenten Reihen beinhaltet der folgende

**6.2 Satz.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent. Dann gilt* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

*Beweis.* Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann ist $a_n = s_n - s_{n-1}$ für $n \geq 2$. Nach Voraussetzung existiert $s = \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{C}$. Mit den Regeln für Grenzwerte folgt hieraus aber $a_n \to s - s = 0$. $\square$

**Beachte:** Eine *notwendige Bedingung* für die Konvergenz einer Reihe ist also, dass ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Dies ist aber *keine hinreichende Bedingung*, d.h. ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so muss die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ keineswegs konvergieren!

Beispiel: In Kürze werden wir sehen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl ihre Glieder eine Nullfolge bilden.

**6.3 Beispiel (Geometrische Reihe).** Hierunter versteht man die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C} \text{ fest}).$$

**1. Fall:** $|z| \geq 1$. In diesem Fall bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, denn es gilt

$$|z^k| = |z|^k \geq 1 \qquad \text{für alle } k.$$

Nach Satz 6.2 ist die geometrische Reihe in diesem Fall divergent.

**2. Fall:** $|z| < 1$. Wir berechnen die Partialsummen mit der geometrischen Summenformel 2.3:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dies Summenformel wurde in Kapitel 2 nur für reelle Zahlen $\neq 1$ gezeigt, sie gilt aber tatsächlich alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, der Beweis bleibt derselbe. Wegen $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z}.$$

In diesem Fall also ist die geometrische Reihe konvergent mit Wert $\dfrac{1}{1-z}$.

Wir fassen zusammen:

> Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$
>
> - divergiert, falls $|z| \geq 1$;
> - konvergiert, falls $|z| < 1$, und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

## 6.2 Konvergenzkriterien

Um Reihen auf Konvergenz zu untersuchen, können wir die bekannten Konvergenzkriterien für Folgen auf die Partialsummen einer Reihe anwenden.

Wir beginnen mit dem Cauchykriterium 5.14 für Folgen. Es liefert sofort:

**6.4 Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen).** *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchyfolge bilden. Also:*

*Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| = |s_n - s_{m-1}| < \epsilon \;\; \textit{für alle } n \geq m \geq n_0.$$

**Beachte:** Ändert man endlich viele Glieder einer gegebenen Reihe ab oder lässt sie weg, so ändert sich das Konvergenzverhalten nicht. Im Fall der Konvergenz ändert sich durch eine solche Modifikation allerdings der Wert der Reihe.

**6.5 Satz.** *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen, und seien* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$, *und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) \;=\; \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \;+ \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,.$$

*Beweis.* Setze $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ , $t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ . Mit den bekannten Regeln für die Grenzwerte von Folgen erhalten wir dann

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) \;= \lambda s_n + \mu t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \;+\; \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,.$$

□

Zu Produkten von Reihen werden wir etwas später kommen.

**Vorsicht:** Klammern in unendlichen Reihen dürfen im Allgemeinen nicht weggelassen werden (anders als bei endlichen Summen)!

Beispiel: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(1-1) \;=\; 0,$

aber: $1-1+1-1+1-1\pm\ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ , und diese Reihe divergiert nach Satz 6.2.

**6.6 Satz (Reihen mit nichtnegativen Gliedern).** *Gegeben sei eine reelle Folge* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt: Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *beschränkt ist.*

*Beweis.* Die Folge $(s_n)$ ist nach unserer Voraussetzung eine monoton wachsende, reelle Folge. Nach dem Monotoniekriterium 4.7 ist sie genau dann konvergent mit Grenzwert in $\mathbb{R}$, wenn sie beschränkt ist. □

**Schreibweise:** Für eine Reihe mit Gliedern $a_k \geq 0$ schreiben wir

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;< \infty$ , falls die Reihe konvergiert;
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;= \infty$ , falls die Reihe divergiert (denn das ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$).

**6.7 Beispiele.** (1) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty\,.}$

**Begründung:** Wir erinnern uns an Beispiel 6.1(2). Die Partialsummen der gegebenen Reihe lassen sich daher folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leq 1 + 1 = 2.$$

Die Partialsummenfolge der gegebenen Reihe ist also beschränkt.

Den Wert dieser recht harmlos wirkenden Reihe können wir allerdings mit unseren Mitteln noch nicht berechnen.

(2) Die sogenannte **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.}$$

**Begründung:** Die Partialsummenfolge $(s_n)$ ist keine Cauchyfolge, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

Als nächstes betrachten wir *alternierende Reihen*, das sind Reihen mit reellen Gliedern, die abwechselnd positiv bzw. negativ sind. Für solche Reihen gibt es ein praktisches Konvergenzkriterium, das auf Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zurückgeht. Es liefert auch gleich eine Abschätzung für den Fehler, den man macht, wenn man den Wert der gesamten Reihe durch den einer Partialsumme annähert (approximiert). Wichtig dabei: man muß den Wert der Reihe nicht kennen, um den Apprxomationsfehler abschätzen zu können!

**6.8 Satz (Leibnizkriterium für alternierende Reihen).** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq [0,\infty)$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots.$$

*Ferner gilt für den Reihenwert* $s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ *die Fehlerabschätzung*

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}\,.$$

*D.h. jede Partialsumme approximiert den Wert der Reihe bis auf einen Fehler, der höchstens so groß ist wie der Betrag des ersten weggelassenen Summanden.*

*Beweis.* Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-2} &= (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \\ &= (-1)^n \cdot \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{\leq 0}. \end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir:

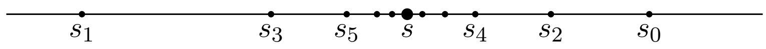
- falls $n$ gerade ist, so ist $s_n \leq s_{n-2}$. Also: $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \ldots$
- falls $n$ ungerade ist, so ist $s_n \geq s_{n-2}$. Also: $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots$.

Ferner gilt

$$s_0 \geq s_{2n} = s_{2n-1} + (-1)^{2n} a_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1.$$

Also ist die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, und die Folge $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium existieren daher die Grenzwerte

$$A := \lim_{n\to\infty} s_{2n} \in \mathbb{R} \quad \text{ und } \quad B := \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} \in \mathbb{R}.$$




Hieraus folgt weiter:

$$a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A - B.$$

Andererseits gilt $a_{2n} \to 0$ nach Voraussetzung. Daher muss $A = B$ sein, und es folgt, dass die gesamte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $s := A = B$ konvergiert: denn zu $\epsilon > 0$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sowohl $|s_{2n} - s| < \epsilon$ als auch $|s_{2n-1} - s| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Der Grenzwert $s$ erfüllt dabei

$$s_{2n-1} \leq s \leq s_{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das zeigt, dass $s$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen $s_k$ und $s_{k+1}$ liegt. Außerdem gilt $|s_{k+1} - s_k| = a_{k+1}$. Hieraus erhalten wir die Fehlerabschätzung $|s - s_k| \leq |s_{k+1} - s_k| = a_{k+1}$. □

**Bemerkung:** Neben der Fehlerabschätzung haben wir auch gezeigt, das der Reihenwert $s$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen liegt.

**6.9 Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Wir werden später den Reihenwert berechnen: er ist $\ln 2$. (Dabei bezeichnet „ln" den natürlichen Logarithmus, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion).

Nun kehren wir wieder zu allgemeinen Reihen in $\mathbb{C}$ zurück. Oft ist es unmöglich oder zumindest sehr aufwendig, den Wert einer Reihe explizit zu bestimmen. Wir suchen daher nach Kriterien, die zumindest die Konvergenz sichern.

**Definition.** Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt *absolut konvergent*, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\,.$$

**Beispiele:** 1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut konvergent.

2. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent.

**6.10 Satz.** *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent (im gewöhnlichen Sinne).*

*Beweis.* Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 6.4) für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0.$$

Mit der Dreicksungleichung folgt

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| \le \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon \quad \text{für alle } n \ge m \ge n_0.$$

Wiederum aufgrund des Cauchykriteriums ist daher die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. □

**Beispiel:** Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2}$ ist absolut konvergent, da

$$\Big|\frac{i^k}{k^2}\Big| = \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \ \text{(Beispiel 6.7)}.$$

Zum Nachweis der absoluten Konvergenz einer Reihe gibt es verschiedene Kriterien. Wir beginnen mit dem

**6.11 Satz (Majorantenkriterium).** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \in \mathbb{C}$, *und sei* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine nichtnegative reelle Folge mit* $|a_k| \le b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Ferner gelte* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$(*) \qquad \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,.$$

In der Situation dieses Satzes nennt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine *konvergente Majorante* für die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ .

*Beweis.* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \sum_{k=1}^{n} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Nach Satz 6.6 ist daher die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ absolut konvergent, und damit auch konvergent (im gewöhnlichen Sinne). Ferner erhalten wir nach den Regeln für Grenzwerte von Folgen:

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| = \Big|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \underset{(**)}{\le} \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,.$$

Hieraus folgt die behauptete Ungleichungskette. □

**Beispiel.** Für jeden Exponenten $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

nach dem Majorantenkriterium: es ist nämlich

$$\frac{1}{k^n} \le \frac{1}{k^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ \text{ und } \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

**Bemerkung:** Im Majorantenkriterium genügt eine abgeschwächte Bedingung der Form $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0$, um die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu sichern. Die Ungleichungskette $(*)$ muss dann aber entsprechend mit Summation ab $n_0$ modifiziert werden.

**Beispiel: Dezimalbrüche.**
Bereits in der Schule haben Sie reelle Zahlen als Dezimalbrüche kennengelernt. Z.B. ist

$$417,29 = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}.$$

Allgemein versteht man unter einem *Dezimalbruch* eine Reihe der Form

$$\pm \sum_{k=-N}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$ und Ziffern $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Abkürzend schreibt man diese Reihe als

$$\pm\, a_{-N} \ldots a_0\,,\, a_1 a_2 \ldots .$$

**Beispiel:**

$$0,\overline{3} := 0,33333\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} = \frac{3}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{10}\Big)^k = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\,.$$

Dabei haben wir die Summenformel für die geometrische Reihe verwendet.

**6.12 Satz.** *Jeder Dezimalbruch ist eine konvergente Reihe und stellt daher eine reelle Zahl dar.*

*Beweis.* Die Reihe $\sum_{k=-N}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$ ist eine konvergente Majorante. (Bis auf einen konstanten Faktor ist das eine geometrische Reihe). □

**Bemerkung:** Umgekehrt läßt sich jedes $x \in \mathbb{R}$ als Dezimalbruch darstellen. (Dies wird in der Zentralübung gezeigt). Die Dezimaldarstellung ist aber nicht notwenig eindeutig! Z.B. ist

$$0,\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 1.$$

Wir kehren zu den Konvegenzkriterien für Reihen zurück. Ein weiteres nützliches Kriterium:

**6.13 Satz (Quotientenkrierium).** *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \in \mathbb{C}$.

(1) *Es gebe ein Zahl* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < q < 1$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *so, dass*

$$\forall n \geq n_0 : a_n \neq 0 \;\; \textit{und} \;\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q.$$

*Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(2) *Es gebe ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\forall n \geq n_0 \;:\; a_n \neq 0 \;\; \textit{und} \;\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1.$$

*Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

**Achtung:** In Teil (1) darf die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ **nicht** ersetzt werden durch die schwächere Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

Als Beispiel dazu betrachten wir die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sie divergiert, obwohl

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Tatsächlich gilt hier $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, und daher gibt es kein $q < 1$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle bis auf endlich viele Indizes $n$ gelten würde.

*Beweis des Quotientenkriteriums.* (1) Für $n > n_0$ haben wir

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot |a_{n_0}| \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| = C \cdot q^n$$

mit einer von $n$ unabhängigen Konstanten $C > 0$. Wegren $q < 1$ ist daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Cq^n$ eine konvergente Majorante für die Ausgangsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, und die Behauptung folgt aus dem Majorantenkriterium.

(2) Für $n > n_0$ gilt $|a_n| \geq |a_{n_0}| > 0$. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. □

**6.14 Korollar (Quotientenkriterium, Variante II).** *Angenommen, es ist $a_n \neq 0$ für fast alle $n$, und es existiere der (eigentliche oder uneigentliche) Grenzwert*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, \infty].$$

*Dann gilt:*

(i) *Falls $R < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Falls $R > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

*Beweis.* (i) Für $q > 0$ mit $R < q < 1$ ist die Bedingung von Teil (1) des Quotientenkriteriums erfüllt.

(ii) Hier ist die Bedingung von Teil (2) des Quotientenkriteriums erfüllt. □

**Achtung:** Das Korollar enthält keine Aussage im Fall $R = 1$. Siehe dazu auch die folgenden Beispiele.

**6.15 Beispiele.** (1) Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Mit Variante II des Quotientenkriteriums folgt, dass die Reihe konvergiert.

(2) Für die divergente harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt $R = 1$, und auch das Quotientenkriterium selbst ist nicht anwendbar (wie oben erläutert).

(3) Für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1.$$

Also ist auch hier $R = 1$, und das Quotientenkriterium ist ebenfalls nicht anwendbar. Wir haben aber bereits auf anderem Wege gezeigt, dass die Reihe konvergiert.

Zum Abschluss noch eine weitere Folgerung aus dem Quotientenkriterium:

**6.16 Satz (Wurzelkriterium).** *Gegeben sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$. *Setze*

$$L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ \in [0,\infty].$$

(i) *Falls* $L < 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Falls* $L > 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

*Beweis.* (i) Wähle $q > 0$ mit $L < q < 1$. Nach Satz 5.17 existiert dann ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für alle $n \ge n_0$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ist daher eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$.
(ii) Ist $L > 1$, so existieren unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Für diese Indizes folgt $|a_n| > 1$, und daher kann $(a_n)$ keine Nullfolge sein. □

**Bemerkung:** Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$ existiert, so stimmt er mit dem Limes superior dieser Folge überein, siehe Aufgabe H1, Blatt 7 !

**6.17 Beispiel.** Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^s z^n$ mit $s \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. In diesem Fall ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ = \ \sqrt[n]{n^s} \cdot \sqrt[n]{|z^n|} \ = (\sqrt[n]{n})^s \cdot |z|.$$

Die rechte Seite konvergiert für $n \to \infty$ gegen $|z|$, und daher ist $L = |z|$. Das Wurzelkriterium liefert daher, dass die gegebene Reihe für $|z| < 1$ absolut konvergiert, und für $|z| > 1$ divergiert.

Das Wurzelkriterium ist manchmal noch anwendbar, wenn das Quotientenkriterium versagt.

## 6.3 Der Umordnungssatz

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, was passiert, wenn man die Glieder einer (unendlichen) Reihe umordnet, d.h. sie in geänderter Reihenfolge aufsummiert. Wir betrachten als erstes ein Beispiel, das zeigt, dass man im Allgemeinen nicht sorglos umordnen darf:

**Beispiel:** Wir betrachten die (bekanntlich konvergente) alternierende harmonische Reihe

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

Weil jede Teilfolge der Partialsummenfolge $(s_n)$ ebenfalls gegen den Wert $s$ konvergiert, gilt

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \ = \ \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\Big)\Big] \ > \ \frac{1}{2}.$$

Nun ordnen wir die Reihe so um, dass auf ein positives Glied zwei negative folgen:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

mit $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$, $c_4 = \frac{1}{3}$, $c_5 = -\frac{1}{6}$, ...

Für die Partialsummen $t_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ der umgeordneten Reihe gilt

$$t_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} s_{2n}.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} t_{3n} = \frac{s}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} c_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} c_{3n+2} = 0$$

konvergiert auch die gesamte Partialsummenfolge $(t_n)$ gegen $\frac{s}{2}$. Die umgeordnete Reihe konvergiert daher ebenfalls, aber ihr Wert ist verschieden von dem der Ausgangsreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{s}{2} \neq s.$$

Umordnungen können also verschiedene Reihenwerte liefern! Beachte dabei, dass die alternierende harmonische Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Wie der nächste Satz zeigt, kann bei absolut konvergenten Reihen das Phänomen, dass Umordnungen unterschiedliche Reihenwerte liefern, nicht auftreten.

**6.18 Satz** (**Umordnungssatz**). *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, d.h. eine Permutation der Indizes. Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ebenfalls absolut konvergent, und hat denselben Wert:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

*Beweis.* Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \,, \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n \,, \quad \widetilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \,.$$

Sei $\epsilon > 0$. Aufgrund der absoluten Konvergenz der Ausgangsreihe gibt es dazu einen Index $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$(*) \quad |s_N - s| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2} \,.$$

Wir wählen nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq N$ so groß, dass $\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(N)\} \subseteq \{1, \ldots, n_0\}$. Dann ist $\{1, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n_0)\}$, und für $n \geq n_0$ erhalten wir

$$\widetilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k\in I_{n,N}} a_k = s_N + \sum_{k\in I_{n,N}} a_k$$

mit der „Restindex-Menge“ $I_{n,N} = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, N\}$. Es folgt

$$|\widetilde{s}_n - s| \leq |s_N - s| + \sum_{k\in I_{n,N}} |a_k| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \,,$$

wobei wir für die letzte Ungleichung die Abschätzungen aus $(*)$ verwendet haben. Dies zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{s}_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Die gleiche Argumentation mit $|a_{\sigma(n)}|$ anstelle von $a_{\sigma(n)}$ liefert ausserdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dies besagt, dass die umgeordnete Reihe ebenfalls absolut konvergiert. □

**Bemerkung.** Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gibt es zu *jedem* $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der Indizes, so dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen $x$ konvergiert. Dies wurde von Bernhard Riemann (1826-66) bewiesen.

## 6.4 Das Cauchy-Produkt von Reihen

In diesem Abschnitt lernen wir eine Methode kennen, wie man das Produkt zweier (absolut konvergenter) Reihen effizient berechnen kann. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{und} \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei konvergente Reihen. Dann ist

$$AB = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j B = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \Big( \sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big( \sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k \Big),$$

und analog

$$AB = \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_k \Big).$$

Beide Formeln sind aber für konkrete Berechnungen meist nicht hilfreich. Eine andere Idee besteht darin, ähnlich wie bei der Multiplikation von Polynomen vorzugehen:

$$\begin{aligned} AB &= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) \\ &\overset{?}{=} a_0 b_0 + \big(a_0 b_1 + a_1 b_0\big) + \big(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\big) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \,. \end{aligned}$$

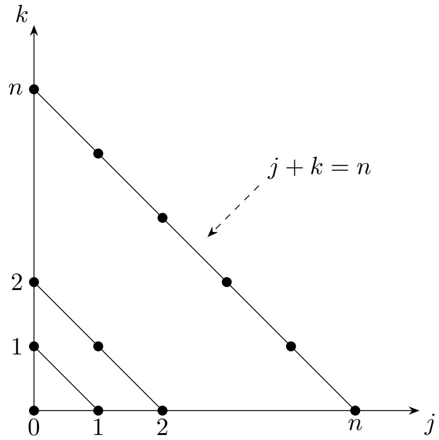
Für das Produkt zweier endlicher Summen ist diese Formel (d.h. die Identität mit dem Fragezeichen) stets richtig. Für unendliche Reihen ist sie allerdings nicht uneingeschränkt gültig. Sind aber die beiden Reihen $A, B$ absolut konvergent, so ist die obige, nach Cauchy benannte Formel tatsächlich korrekt:

**6.19 Satz (Cauchy-Produkt von Reihen).** *Seien* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen. Setze*

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{(j,k):\, j+k=n} a_j b_k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

*Dann ist auch die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\boxed{\Big( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big) \cdot \Big( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big).}$$




Dass in diesem Satz auf die Forderung der absoluten Konvergenz nicht verzichtet werden kann, werden wir in den Übungen anhand eines Beispiels sehen.

*Beweis von Satz 6.19.* Wir setzen

$$A := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,, \quad B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,, \quad S_1 := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|\,, \quad S_2 := \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\,.$$

Zunächst wollen wir beweisen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert. Dazu schätzen wir die Partialsummen ab: für $N \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung:

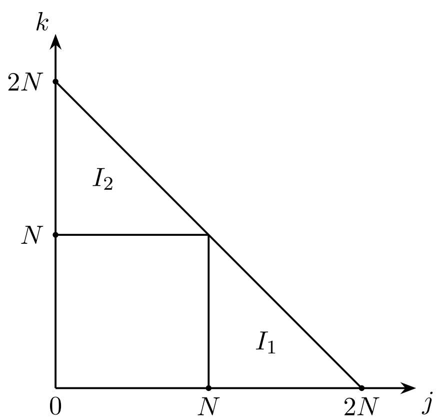
$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \;\leq\; \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} |a_j b_{n-j}| \;\leq\; \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |a_j b_k| \;=\; \Big(\sum_{j=0}^{N} |a_j|\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N} |b_k|\Big) \;\leq\; S_1\cdot S_2 \;<\; \infty.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ ist also konvergent, denn ihre Partialsummenfolge ist beschränkt. Damit konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Wir wollen nun ihren Wert berechnen.
Sei dazu $\epsilon > 0$. Gemäß Definition von $A$ und $B$ und der absoluten Konvergenz der beiden Ausgangsreihen gibt es dann einen Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \geq n_0$ die folgenden beiden Abschätzungen erfüllt sind:

(i) $\displaystyle \Big|\Big(\sum_{j=0}^{N} a_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N} b_k\Big) \;-\; AB\Big| \;<\; \frac{\epsilon}{2}\,;$

(ii) $\displaystyle \sum_{j>N} |a_j| \;<\; \frac{\epsilon}{2M}$ und $\displaystyle \sum_{k>N} |b_k| \;<\; \frac{\epsilon}{2M}\,,$ mit $M := S_1 + S_2\,.$

Für $N \geq n_0$ betrachten wir nun die folgende Skizze für die Indizes $j,k \in \mathbb{N}_0$:




$$I_1 = \{(j,k) \in \mathbb{N}_0^2 : j+k \leq 2N, j > N\}$$
$$I_2 = \{(j,k) \in \mathbb{N}_0^2 : j+k \leq 2N, k > N\}$$

Damit erhalten wir für $N \geq n_0$ die folgende Abschätzung:

$$\Big|\sum_{n=0}^{2N} c_n \;-\; AB\Big| \;\leq\; \underbrace{\Big|\Big(\sum_{j=0}^{N} a_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N} b_k\Big) \;-\; AB\Big|}_{<\,\frac{\epsilon}{2}\ \text{ wegen (i)}} \;+\; \underbrace{\sum_{(j,k)\in I_1\cup I_2} |a_j|\cdot|b_k|}_{=:\,R}\;.$$

Die Restsumme $R$ können wir weiter abschätzen:

$$R \;\leq\; \Big(\sum_{j>N} |a_j|\Big)\cdot S_2 \;+\; S_1\cdot\Big(\sum_{k>N} |b_k|\Big).$$

Unter Beachtung von (ii) folgt hieraus

$$R \;\leq\; \frac{\epsilon}{2M}\cdot\big(S_2+S_1\big) = \frac{\epsilon}{2M}\cdot M \;=\; \frac{\epsilon}{2}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\Big|\sum_{n=0}^{2N} c_n \;-\; AB\Big| \;<\; \epsilon \qquad \text{für alle } N \geq n_0,$$

und hieraus schließlich folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \;=\; AB.$$

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

**Beispiel.** Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ betrachten wir die absolut konvergente geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z}\,.$$

Durch Cauchyprodukt-Bildung dieser Reihe mit sich selbst erhalten wir:

$$\frac{1}{(1-z)^2} \;=\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)^2 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit

$$c_n = \sum_{j=0}^{n}\big(z^j\cdot z^{n-j}\big) \;=\; (n+1)z^n.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ folgt hieraus mit Indexverschiebung

$$\frac{z}{(1-z)^2} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n z^n\,,$$

und diese Reihe konvergiert absolut. Die absolute Konvergenz ist hier eine Konsequenz der absoluten Konvergenz des Cauchyprodukts; sie ist aber auch schon aus Beispiel 6.17 bekannt.

# Kapitel 7

# Exponentialfunktion und Potenzreihen

Die Exponentialfunktion, die wir in diesem Kapitel einführen, ist eine der wichtigsten Funktionen der Analysis (und der gesamten Mathematik). Sie ist ein typisches Besipiel einer Potenzreihe und beschreibt natürliche Wachstumsprozesse.

## 7.1 Die Exponentialreihe

**Definition.** Für $z \in \mathbb{C}$ ist die *Exponentialreihe* $\exp(z)$ definiert durch

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.}$$

**7.1 Satz.** (1) *Die Exponentialreihe ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.*

(2) *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die* Funktionalgleichung

$$\boxed{\exp(z) \cdot \exp(w) \;=\; \exp(z+w).}$$

Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$ heißt *Exponentialfunktion.*

*Beweis von Satz 7.1.* (1) Die Exponentialreihe konvergiert offenbar für $z = 0$ mit Wert

$$\exp(0) = 0^0 = 1.$$

Sei nun $z \neq 0$. Wir wenden das Quotientenkriterium an mit $a_n = \dfrac{z^n}{n!} \neq 0$. Wegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot |z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

folgt mit dem Quotientenkriterium (Variante II, 6.14) die absolute Konvergenz der Reihe.
(2) Da die Exponentialreihe absolut konvergiert, können wir das Cauchyprodukt bilden:

$$\begin{aligned}
\exp(z)\cdot\exp(w) \;&=\; \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\Big) \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j}\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n \;=\; \exp(z+w),
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt den Binomischen Satz 2.8 verwendet haben, der für komplexe Zahlen ebenso gilt wie für reelle (der Beweis ist derselbe). ☐

**Spezielle Werte der Exponentialfunktion:**

- $\exp(0) = 1$
- $\boxed{\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e}$ **(Eulersche Zahl).**

Der Buchstabe $e$ für $\exp(1)$ wurde von Leonhard Euler in seinem Werk *Mechanica* (1736) eingeführt, daher der Name Eulersche Zahl. Es ist

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots > 1.$$

In Kürze werden wir die Eulersche Zahl $e$ näherungsweise berechnen und sehen, dass $e \approx 2,7182818$. Die Exponentialreihe selbst geht auf Isaac Newton zurück (ca. 1669).

Wir notieren noch einige Konsequenzen von Satz 7.1.

**7.2 Korollar.** (1) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$.

(2) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

(3) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist auch* $\exp(x) \in \mathbb{R}$ *mit* $\exp(x) > 0$. *Für* $x > 0$ *ist* $\exp(x) > 1$.

(4) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(nz) = (\exp z)^n$. *Insbesondere ist* $\exp(n) = e^n$.

*Beweis.* (1) Aus der Funktionalgleichung folgt $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$. Dies liefert die behaupteten Aussagen. (2) ergibt sich mit den Regeln für Folgengrenzwerte aus

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}.$$

(3) Dass $\exp(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist klar aus der Definition. Wir wissen bereits, dass $\exp(0) = 1$. Ist $x > 0$, so erhalten wir

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x > 1.$$

Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$. Hieraus und mit Teil (1) folgt daher $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} \in (0,1)$.
(4) Für $n \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir die Aussage mit Induktion nach $n$ aus der Funktionalgleichung. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ folgt sie dann mit Teil (1): $\exp(nz) = \exp(-nz)^{-1} = ((\exp(z)^{-n})^{-1} = (\exp(z))^n$. □

Motiviert durch die letzte Aussage in Teil (4) des Korollars führen wir nun eine bequemere Notation ein.

**Schreibweise:** $\boxed{e^z := \exp(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.}$

Damit gilt also

$$e^0 = 1, \quad e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

**Bemerkung zur Bedeutung der Exponentialfunktion.**
Die Exponentialfunktion beschreibt natürliche Wachstumsprozesse. Um das zu erläutern, betrachten wir den Bestand $f(t) \geq 0$ einer Substanz (oder Population) zur Zeit $t \geq 0$. Der

Bestand zur Zeit $t = 0$ sei $f(0) = 1$. Wir nehmen an, alle Teile des Bestands entwickeln sich stets unabhängig voneinander nach demselben Gesetz. (Das ist z.B. bei radioaktiven Substanzen so). Hat sich also aus dem Anfangsbestand $f(0) = 1$ in der Zeit $t$ der Bestand $f(t) = f(t) \cdot 1$ entwickelt, so erhalten wir zur Zeit $t+s$ (mit $s \geq 0$) den Bestand $f(t) \cdot f(s)$. Der Bestand $f(t)$ genügt also der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion!
Nachdem wir den Begriff der *Stetigkeit* kennengelernt haben, werden wir die Funktionalgleichung

$$f(t+s) = f(t) \cdot f(s) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}$$

nochmals betrachten und sehen, dass alle *stetigen* Lösungen dieser Funktionalgleichung mit der Zusatzbedingung $f(0) = 1$ tatsächlich gegeben sind durch $f(t) = e^{at}$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$.

Im nächsten Satz stellen wir $e^z$ als Grenzwert einer speziellen Folge dar.

**7.3 Satz.** *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\boxed{e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .}$$

*Insbesondere gilt:* $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Die Konvergenz dieser Folge ist übrigens langsam, sie eignet sich daher nicht gut für numerische Berechnungen. Dennoch ist sie von großer Bedeutung in der Analysis.

*Beweis von Satz 7.3.* Wir betrachten die (absolut konvergente) Exponentialreihe. Sei $\epsilon > 0$. Dazu wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$(*) \qquad \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3} .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ betrachten wir nun die Differenz

$$A_n := \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| .$$

Mit der Dreiecksungleichung und durch Aufspalten beider Summen erhalten wir die Abschätzung

$$A_n \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} \left| \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!} \right|}_{=:B_n} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z|^k}{n^k}}_{=:C_n} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}}_{< \frac{\epsilon}{3} \text{ nach } (*)} .$$

Um die Summen $B_n$ und $C_n$ weiter abschätzen zu können, verwenden wir dass

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{k!}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

(bei festem $k$). Damit erhalten wir zunächst

$$C_n \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k \underset{(*)}{<} \frac{\epsilon}{3}.$$

Ferner gilt

$$B_n \leq \sum_{k=0}^{n_0} \left| \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!} \right| \cdot |z|^k .$$

Dies ist eine Summe fester Länge, bei der jeder Summand für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Daher konvergiert auch $B_n$ gegen 0 für $n \to \infty$. Wir können daher ein $n_1 = n_1(\epsilon) > n_0$ finden, so dass

$$B_n < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } n > n_1.$$

Für $n > n_1$ erhalten wir damit insgesamt die Abschätzung $A_n < \epsilon$. Dies liefert die behauptete Aussage. □

**Anwendung: Kontinuierliche Verzinsung.**
Wir legen ein Startkapital $K > 0$ für 1 Jahr an, mit einem Zinssatz von $p\%$ (pro Jahr). Dabei werde in sehr kurzen Abständen verzinst, genauer: wir nehmen an, dass in jedem $\frac{1}{n}$-ten Jahr $\frac{p}{n}\%$ Zinsen auf das jeweils aktuelle Kapital aufgeschlagen werden. Dann beträgt das Gesamtkapital nach einem Jahr

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{100}\right)^n .$$

Im Limes $n \to \infty$ (also einer kontinuierlichen Verzinsung) erhält man als Kapital nach einem Jahr den Betrag

$$\lim_{n\to\infty} K_n = K \cdot e^{p/100}.$$

Diese Methode der Verzinsung geht zurück auf Jakob Bernoulli (1655-1705). Aber erst sein Neffe Daniel Bernoulli konnte 1728 den Grenzwert der Folge $(1 + \frac{x}{n})^n$ berechnen.

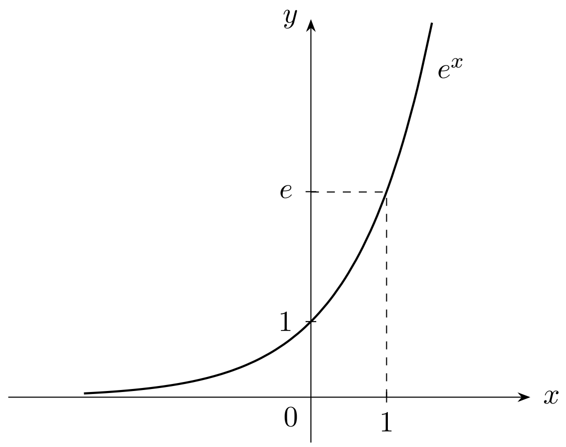
Als nächstes betrachten wir die Exponentialfunktion für reelle Argumente etwas genauer.

**7.4 Satz.** *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist streng monoton wachsend.*

*Beweis.* Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wir schreiben $y = x + s$ mit $s > 0$. Mit der Funktionalgleichung folgt

$$e^y = e^x \cdot e^s > e^x,$$

weil $e^s > 1$ gemäß Korollar 7.2 (3). □




$$x > 0 \implies e^x > 1$$
$$x < 0 \implies 0 < e^x < 1$$

Der abgebildete Graph der Exponentialfunktion lässt vermuten, dass sie $\mathbb{R}$ surjektiv auf das Intervall $(0, \infty)$ abbildet. Das ist richtig, wir können es aber erst beweisen, wenn wir den Begriff der Stetigkeit kennengelernt haben.

**Zur Berechnung von $e^x$.**

Unser Ziel hier ist eine näherungsweise Berechnung von $e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$. Mit der Funktionalgleichung kann man dann hieraus auch Näherungen für $e^x$ mit beliebigem $x \in \mathbb{R}$ erhalten. Wir starten mit der Exponentialreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Für $|x| \leq 1$ können wir diesen Rest folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Dabei ist das Ungleichheitszeichen in der zweiten Zeile scharf (d.h. $<$ statt $\leq$), sofern $x \neq 0$. Dieselbe Abschätzung funktioniert offenbar für komplexe Argumente $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$. Wir halten fest:

**7.5 Satz (Restgliedformel für die Exponentialfunktion).** *Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt*

$$\Big| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \Big| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*Falls $z \neq 0$, so gilt dabei sogar „$<$“.*

Der Fehler, den man macht, wenn man die Exponentialfunktion durch eine ihrer Partialsummen approximiert, ist also höchstens so groß wie das Doppelte des Betrags des ersten weggelassenen Reihenglieds.

**Spezialfälle:** Für $|z| \leq 1$ gelten

- $\big| e^z - 1 \big| \leq 2|z|$.
- $\big| e^z - 1 - z \big| \leq |z|^2$.

**Beispiel:** $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_{n+1}(1), \quad$ wobei $|R_{n+1}(1)| < \frac{2}{(n+1)!}$.

Z.B. ist $R_{11}(1) < 6 \cdot 10^{-8}$, und daher $e \approx 2{,}7182818$ (7 gültige Nachkommastellen).

Die Restgliedformel für die Exponentialfunktion hat eine interessante weitere Konsequenz:

**7.6 Korollar.** *Die Eulersche Zahl $e$ ist irrational.*

*Beweis.* Wir nehmen an, es sei $e = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Aus dem obigen Beispiel erhalten wir zunächst

$$0 < \Big| \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big| < \frac{2}{(n+1)!}\,.$$

Durchmultiplizieren mit $n!$ ergibt

$$0 < \underbrace{\Big| n! \Big( \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big) \Big|}_{=:\, s} < \frac{2}{n+1}\,.$$

Durch dieses Multiplizieren mit $n!$ haben wir erreicht, dass der Ausdruck $s$ eine natürliche Zahl ist! Wegen $0 < s < \frac{2}{n+1}$ müsste aber auch $0 < s < 1$ gelten, ein Widerspruch. $\square$

**Bemerkung:** Tatsächlich ist die Zahl $e$ sogar *transzendent*, d.h. es gibt kein Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches $e$ als Nullstelle hat. Das wurde erstmals 1873 von Charles Hermite bewiesen. Zum Begriff der Transzendenz siehe auch die Zusatzaufgabe auf Blatt 6.

## 7.2 Potenzreihen

Die Bauart der Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

lässt sich natürlich verallgemeinern.

**Definition.** Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \quad (z \in \mathbb{C}),$$

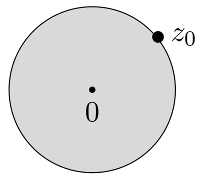
mit Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

Wir wollen nun untersuchen, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $(*)$ konvergiert. Das hängt natürlich vom Entwicklungspunkt und den Koeffizienten ab. Wir werden aber wichtige allgemeine Aussagen über den Konvergenzbereich einer Potenzreihe (d.h. die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die sie konvergiert) gewinnen.
Zunächst sehen wir, dass sich durch die Substitution $z_{neu} := z - a$ die Konvergenzfrage für die allgemeine Potenzreihe $(*)$ reduzieren lässt auf den Fall, dass der Entwicklungspunkt $a = 0$ ist. Wir können uns daher bei der Konvergenzuntersuchung beschränken auf Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $0$. Eine solche Potenzreihe ist von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,.$$

Für $z = 0$ ist sie offenbar konvergent.

**7.7 Lemma.** *Angenommen, die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *konvergiert für* $z = z_0 \in \mathbb{C}$, *wobei* $z_0 \neq 0$. *Dann konvergiert Reihe absolut für alle Punkte* $z$ *aus der offenen Kreisscheibe* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$.



*Beweis.* Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ konvergiert, muss die Folge ihrer Glieder beschränkt bleiben. Es gibt daher eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\left|c_n z_0^n\right| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ folgt daher

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \cdot q^n \quad \text{mit } q := \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

Die Reihe $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist daher eine konvergente Majorante (geometrische Reihe). Mit dem Majorantenkriterium 6.11 folgt die Behauptung. $\square$

**Definition.** Der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ist definiert als

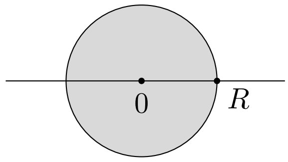
$$\boxed{R := \sup\left\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \text{ konvergiert}\right\} \in [0, \infty]\,.}$$

Der Begriff „Konvergenzradius“ klärt sich durch den folgenden Satz:

**7.8 Satz.** *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *ist*

(a) *absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < R$,

(b) *divergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > R$.




Die offene Kreisscheibe $B_R(0)$ heißt die *Konvergenzkreisscheibe* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

**Achtung:** Der Satz macht keine Aussage für Punkte $z$ mit $|z| = R$, d.h. Punkte auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe! Tatsächlich kann für diese Randpunkte keine allgemeine Konvergenzaussage getroffen werden; sie müssen daher immer gesondert betrachtet werden. Wir werden in Kürze einige Beispiele dazu ansehen.

*Beweis des Satzes.* (1) Sei $|z| < R$. Wir wählen $r > 0$ mit $|z| < r < R$. Nach Definition von $R$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ konvergent. Wegen $|z| < r$ folgt mit Lemma 7.7, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ absolut konvergiert.
(2) Sei $|z| > R$. Angenommen, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergiert. Gemäß Lemma 7.7 ist dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ konvergent für jedes $r$ mit $R < r < |z|$. Dies aber steht im Widerspruch zur Definition des Konvergenzradius $R$. $\square$

Wir betrachten noch die Grenzfälle für den Konvergenzradius, $R = 0$ und $R = \infty$. Offenbar gilt:

$$R = \infty \iff \text{die Potenzreihe konvergiert absolut für alle } z \in \mathbb{C};$$
$$R = 0 \iff \text{die Potenzreihe konvergiert nur für } z = 0.$$

**Beispiele:**

- Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $R = 1$.
- Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $R = \infty$.

Aus dem Quotienten-und Wurzelkriterium für gewöhnliche Reihen ergeben sich zwei wichtige Methoden zur Berechnung des Konvergenzradius von Potenzreihen, die nun folgen.

**7.9 Satz (Berechnung des Konvergenzradius).** *Gegeben sei die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ .

(1) ***Quotientenkriterium für Potenzreihen:*** *Angenommen, es existiert der (eigentliche oder uneigentliche) Grenzwert*

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \in [0,\infty].$$

*Dann ist* $R = \dfrac{1}{q}$.

(2) ***Formel von Cauchy-Hadamard:*** *Es ist* $R = \dfrac{1}{q}$ *mit* $q := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0,\infty]$.

*In beiden Fällen setzt man dabei* $\frac{1}{\infty} := 0,\ \frac{1}{0} := \infty$.

*Beweis.* (1) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = q|z| \begin{cases} < 1 & \text{für } |z| < \frac{1}{q}\,, \\ > 1 & \text{für } |z| > \frac{1}{q}\,. \end{cases}$$

Mit dem Quotientenkriterium (Korollar 6.14) und Satz 7.8 folgt die Behauptung.

(2) ergibt sich analog aus dem Wurzelkriterium 6.16, da

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = q|z|.$$

□

**Beispiele.** (1) Wir berechnen den Konvergenzradius der Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit Kriterium (1): Hier ist $c_n = \frac{1}{n!}$ . Wir erhalten daher

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies zeigt nochmals, dass $R = \infty$.

(2) Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

Hier sind die meisten Koeffizienten Null: es ist $c_{n^2} = 1$ und $c_k = 0$ sonst. Das Quotientenkriterium für Potenzreihen ist daher nicht anwendbar. Anwendung der Formel von Cauchy-Hadamard liefert

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1} = 1.$$

(3) Wir betrachten die drei Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

Mit dem Quotientenkriterium (1) sieht man rasch, dass alle drei Reihen den Konvergenzradius $R = 1$ haben. Wir vergleichen nun das Konvergenzverhalten der Reihen auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe:
Die erste Reihe (die geometrische Reihe) divergiert für alle $z$ mit $|z| = 1$.
Die zweite Reihe divergiert für $z = 1$ (harmonische Reihe), aber sie konvergiert für $z = -1$.
Die dritte Reihe konvergiert für alle $z$ mit $|z| = 1$, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante.

Wir sehen an diesem Beispiel:

| |
|---|
| Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe kann sehr unterschiedlich ausfallen und erfordert stets eine Einzelfallanalyse. Eine allgemeine Konvergenzaussage ist auf dem Rand nicht möglich. |

**Bemerkung:** Für eine Potenzreihe der Form

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit allgemeinem Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ sieht man durch Translation des Arguments $z$, dass die Reihe in der Kreisscheibe $B_R(a)$ absolut konvergiert und für $|z - a| > R$ divergiert, wenn $R$ den Konvergenzradius der Reihe $\sum c_n z^n$ bezeichnet. Man nennt daher $R$ auch den Konvergenzradius der Reihe $(*)$.

**7.10 Satz (Cauchy-Produkt von Potenzreihen).** *Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien* $R_a, R_b > 0$. *Setze*

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

*Dann ist die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < \min(R_a, R_b)$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

*Beweis.* Für $|z| < \min(R_a, R_b)$ sind beide Ausgangsreihen absolut konvergent, und Satz 6.19 über das Cauchyprodukt liefert

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j z^j \cdot b_{n-j} z^{n-j}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

wobei die Reihe rechts absolut konvergiert. □

Neben der Exponentialfunktion besitzen viele weitere wichtige Funktionen der Analysis eine Darstellung als Potenzreihe, z.B. die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus, die wir in Kapitel 9 einführen werden.

# Kapitel 8

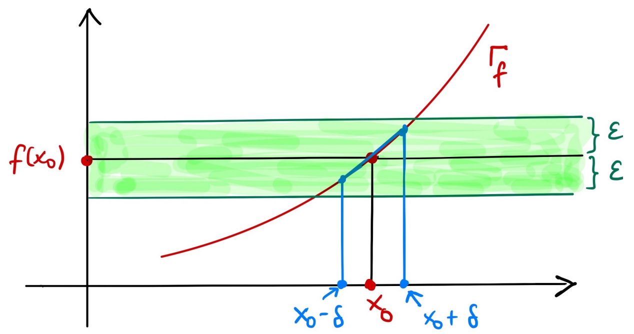
# Stetige Funktionen und Grenzwerte

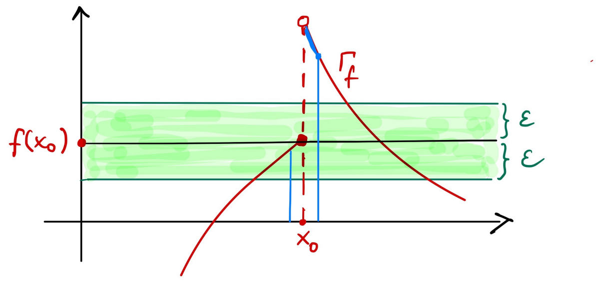
## 8.1 Der Begriff der Stetigkeit

Wir beginnen mit einer anschaulichen Betrachtung:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Aussage „$f$ ist stetig in $x_0$“ soll anschaulich besagen, dass der Graph von $f$ an der Stelle $x_0$ keine Sprungstelle hat. Hinreichend kleine Änderungen des Arguments $x$ nahe $x_0$ dürfen also auch nur kleine Änderungen der Funktionswerte bewirken. Dies lässt sich folgendermaßen präzise formulieren:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$



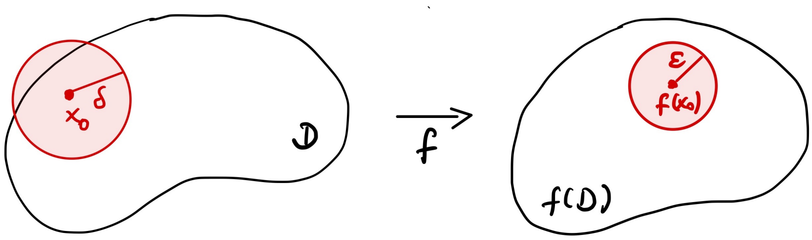

**Generalvoraussetzung:** In diesem Kapitel betrachten wir stets Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$. Dies schließt natürlich reellwertige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit ein.

**Definition.** (1) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in D$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Diese Bedingung wird auch $\epsilon - \delta$-*Kriterium* genannt.

(2) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig* (auf $D$), falls $f$ in allen Punkten $x_0 \in D$ stetig ist.

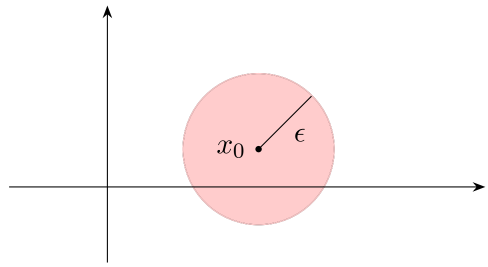



**Formulierung der Stetigkeit mit Umgebungen:**

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ und $\epsilon > 0$ ist die $\epsilon$-*Umgebung* von $x_0$ (in $\mathbb{K}$) definiert durch

$$U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $U_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ das offene Intervall um $x_0$ der Länge $2\epsilon$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $U_\epsilon(x_0) = B_\epsilon(x_0) \subseteq \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe um $x_0$ vom Radius $\epsilon$.


Sei nun $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &f \text{ stetig in } x_0 \in D \iff \\ &\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ :\ f(x) \in U_\epsilon\big(f(x_0)\big) \ \text{ für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0). \end{aligned}$$

**Wichtig:** Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt $x_0$ ihres Definitionsbereichs ist eine *lokale Eigenschaft*: Wichtig ist nur, wie $f$ sich (beliebig) nahe bei $x_0$ verhält.

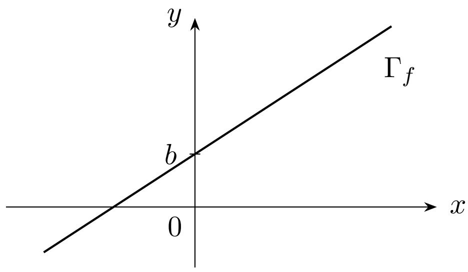
**Beispiele.**

(1) Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, denn:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(*) \quad |f(x) - f(x_0)| = |a| \cdot |x - x_0|.$$

Im Fall $a = 0$ ist $f = b$ konstant, und das $\epsilon - \delta$-Kriterium ist mit beliebigem $\delta > 0$ erfüllt.



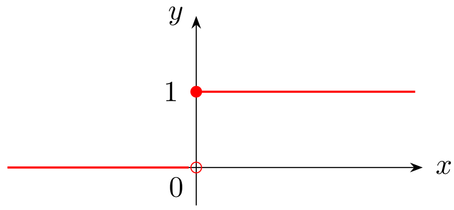

Im Fall $a \neq 0$ setzen wir $\delta := \dfrac{\epsilon}{|a|}$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt dann mit $(*)$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| < |a| \cdot \delta = \epsilon.$$

Ebenso ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$ (mit $a, b \in \mathbb{C}$) stetig auf ganz $\mathbb{C}$; der Beweis ist derselbe.

(2) Die *Heaviside-Funktion* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$




Die Funktion $H$ ist unstetig im Punkt $x_0 = 0$, denn zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ lässt sich kein $\delta > 0$ finden, so dass das $\epsilon - \delta$-Kriterium in $x_0$ erfüllt wäre.

$H$ ist aber stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, und sei $\widetilde{D} \subseteq D$. Dann ist die Restriktion von $f$ auf $\widetilde{D}$,

$$f\big|_{\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to \mathbb{C}, \ x \mapsto f(x)$$

stetig auf $\widetilde{D}$. Dies folgt sofort aus der Definition der Stetigkeit.

**Wichtiger Spezialfall:** $D \subseteq \mathbb{C}$ und $\widetilde{D} = D \cap \mathbb{R}$.

Ist also eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit einem komplexen Definitionsbereich $D$ stetig, so ist auch ihre Einschränkung auf reelle Argumente stetig, d.h. die Restriktion $f\big|_{D \cap \mathbb{R}}$ ist ebenfalls stetig.

Im folgenden ist wieder stets $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$.

**Definition.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *Lipschitz-stetig* auf $D$, falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

$L$ heißt dann eine *Lipschitz-Konstante* für $f$.

**Beobachtung:** Ist $f$ Lipschitz-stetig auf $D$, so ist $f$ auch stetig auf $D$.
Um das zu sehen, können wir o.E. $L > 0$ annehmen. Sei nun $\epsilon > 0$ und $x_0 \in D$. Setze $\delta := \dfrac{\epsilon}{L}$.
Für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

**Beispiele.**

(1) Die lineare Funktion $f(z) = az + b$ (mit $a, b \in \mathbb{C}$) ist Lipschitz-stetig auf ganz $\mathbb{C}$ mit Lipschitz-Konstante $L = |a|$.

(2) Die Betragsfunktion $f : \mathbb{C} \to [0, \infty)$, $z \mapsto |z|$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L = 1$. Dies folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|.$$

Also ist auch die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L = 1$, denn $|\overline{z} - \overline{w}| = |z - w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Kriterium, wie man Stetigkeit mittels Folgen überprüfen kann.

**8.1 Satz** (**Folgenkriterium für Stetigkeit**). *Sei* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und sei* $x_0 \in D$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f$ *ist stetig in* $x_0$.

(ii) *Für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ *mit* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ *gilt* $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Sie $(x_n) \subseteq D$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Sei ferner $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f$ in $x_0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Aufgrund der Konvergenz von $(x_n)$ gegen $x_0$ existiert ferner ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Zusammen folgt $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Durch Widerspruch. Wir nehmen an $f$ sei unstetig in $x_0$. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, zum dem sich kein $\delta > 0$ finden lässt, mit dem das $\epsilon - \delta$-Kriterium in $x_0$ erfüllt wäre. Mit $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ folgt daher, dass sich zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in D$ finden lässt, so dass zwar $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ist, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$. Dies zeigt: Die Folge $(x_n) \subseteq D$ konvergiert zwar gegen $x_0$, aber die Folge $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

**8.2 Satz.** *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ *ist stetig auf ganz* $\mathbb{C}$. *Damit ist auch die reelle Exponentialfunktion* $x \mapsto e^x$ *stetig auf ganz* $\mathbb{R}$.

*Beweis.* Wir verwenden das Folgenkriterium und die Restgliedabschätzung aus Satz 7.5, genauer, den ersten dazu notierten Spezialfall. Dieser besagt, dass

$$\left|e^z - 1\right| \leq 2|z| \quad \text{für } |z| \leq 1.$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ fest, und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Dabei können wir ohne Einschränkung annehmen, dass bereits $|z_n - z_0| \leq 1$ ist. Mit der Funktionalgleichung und der obigen Abschätzung folgt dann

$$\left|e^{z_n} - e^{z_0}\right| = \left|e^{z_0}\big(e^{z_n - z_0} - 1\big)\right| \leq \left|e^{z_0}\right| \cdot 2\,|z_n - z_0| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Das Folgenkriterium liefert nun die Stetigkeit von exp in $z_0$. $\square$

**8.3 Satz** (**Regeln für stetige Funktionen**). *Seien* $f, g : D \to \mathbb{C}$ *stetig in* $x_0 \in D$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Dann sind auch die Funktionen* $f + g, f \cdot g, \lambda f : D \to \mathbb{C}$ *stetig in* $x_0$. *Falls* $g(x_0) \neq 0$, *so ist auch* $\dfrac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ *stetig in* $x_0$.

*Beweis.* Wir verwenden das Folgenkriterium für Stetigkeit. Sei dazu $(x_n) \subseteq D$ eine Folge mit $x_n \to x_0$. Da $f$ und $g$ stetig in $x_0$ sind, folgt hieraus $f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte 5.13 impliziert dies für $n \to \infty$:

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0), \quad f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0), \ \lambda f(x_n) \to \lambda f(x_0).$$

Wiederum mit dem Folgenkriterium ergibt sich hieraus die Stetigkeit von $f+g$, $f \cdot g$ und $\lambda f$ in $x_0$. Falls $y_0 = g(x_0) \neq 0$, so gibt es wegen $g(x_n) \to y_0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|g(x_n)| \geq \frac{1}{2}|y_0| > 0$ für alle $n \geq n_0$, und mit den Grenzwertregeln erhalten wir

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

$\square$

**Konsequenz:** Die Menge

$$C(D) := \{f : D \to \mathbb{C},\ f \text{ stetig}\}$$

ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die Menge

$$C_{\mathbb{R}}(D) := \{f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

**Beispiel: Polynome und rationale Funktionen.**

(1) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ eine Polynomfunktion über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wiederholte Anwendung von Satz 8.3, ausgehend von der stetigen Funktion $f(x) = x$, zeigt dass $p$ auf ganz $\mathbb{K}$ stetig ist. Eine komplexe Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ ist auch stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) Eine *rationale* Funktion auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Funktion der Form

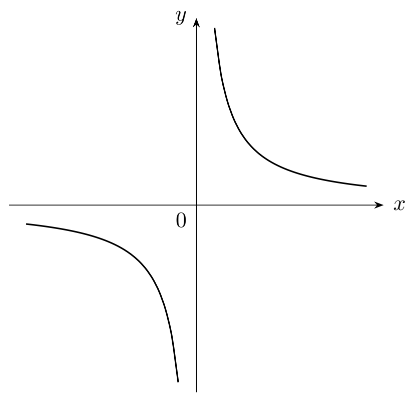
$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit Polynomen } p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}},\ q \neq 0.$$

Ihr Definitonsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{K} : q(x) \neq 0\}$.

Nach den Regeln für stetige Funktionen ist $R$ stetig auf $D$.

Beachte: die Menge $\mathbb{K} \setminus D$ der Definitionslücken von $R$ ist endlich, da das Polynom $q$ nur endlich viele Nullstellen in $\mathbb{K}$ hat.

**Beispiel:** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.




**8.4 Satz (Komposition stetiger Funktionen).**
*Seien $D, E$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{C}$ gegeben. Sei $f$ stetig in $x_0 \in D$ und $g$ stetig in $f(x_0) \in E$. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0$.*

*Beweis.* Sei $(x_n)$ eine Folge in $D$ mit $x_n \longrightarrow x_0$. Da $f$ stetig in $x_0$ ist, gilt nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Da $g$ stetig in $f(x_0)$ ist, liefert nochmalige Anwendung des Folgenkriteriums, dass $g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(x_0))$. $\square$

**Beispiele.**

(1) Die Funktion

$$z \mapsto e^{z^2} = e^{(z^2)}$$

ist stetig auf $\mathbb{C}$, da $e^{z^2} = (\exp \circ f)(z)$ mit $f(z) = z^2$, und da sowohl $f$ als auch $\exp$ auf ganz $\mathbb{C}$ stetig sind.

(2) Zu einer gegebenen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ definieren wir die Funktionen $\overline{f}, |f| : D \to \mathbb{C}$ durch

$$\overline{f}(x) := \overline{f(x)}\,, \quad |f|(x) := |f(x)| \quad (x \in D).$$

Es ist also $\overline{f} = g \circ f$ mit $g(z) = \overline{z}$ und $|f| = g \circ f$ mit $g(z) = |z|$. Beidemale ist $g$ stetig auf $\mathbb{C}$. Mit Satz 8.4 folgt:

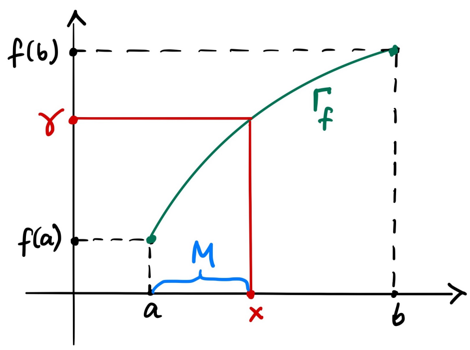
Ist $f$ stetig in $x_0 \in D$, so sind auch die Funktionen $\overline{f}$ und $|f|$ stetig in $x_0$.

## 8.2 Stetige reelle Funktionen auf Intervallen

In diesem Abschnitt betrachten wir stetige reellwertige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.
Wir beginnen mit dem Zwischenwertsatz, einem der wichtigsten Sätze für stetige reelle Funktionen. Er basiert auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

**8.5 Satz (Zwischenwertsatz).**
*Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion. Dann nimmt $f$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

*Das heißt: Ist $\gamma$ eine beliebige reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es (mindestens) eine Stelle $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \gamma$.*




*Beweis.* Wir beweisen den Satz für den Fall $f(a) \le f(b)$. (Der Fall $f(b) \le f(a)$ geht analog.) Wir können dann o.E. annehmen, dass

$$f(a) < \gamma < f(b).$$

Denn im Fall $\gamma = f(a)$ bzw. $\gamma = f(b)$ können wir $x = a$ bzw. $x = b$ wählen. Wir setzen

$$M := \{t \in [a, b] : f(t) \le \gamma\}.$$

Die Menge $M$ ist nicht leer (da $a \in M$), und sie ist beschränkt (durch $b$). Sie besitzt daher ein Supremum

$$x := \sup M \in \mathbb{R}.$$

Wegen $M \subseteq [a,b]$ gilt auch $x \in [a,b]$.

**Behauptung:** $f(x) = \gamma$.

Beweis: Aufgrund der Definition des Supremums (siehe Lemma 3.9) existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in M$ mit

$$x - \frac{1}{n} < t_n \leq x.$$

Insbesondere gilt $\lim_{n\to\infty} t_n = x$, und wegen $t_n \in M$ ist $f(t_n) \leq \gamma$. Aus der Stetigkeit von $f$ und mit dem Vergleichskriterium 4.5 folgt weiter

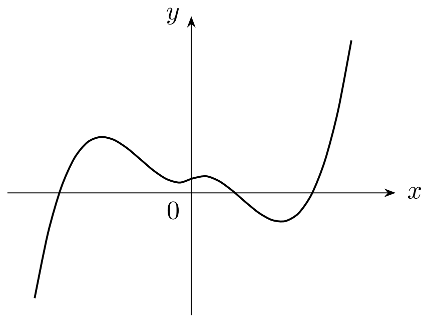
$$(*) \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) \leq \gamma < f(b).$$

Insbesondere muss daher $x < b$ sein. Wähle nun eine beliebige Folge $(s_n)$ im halboffenen Intervall $(x,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} s_n = x$. Dann ist $s_n \notin M$ und daher gilt $f(s_n) > \gamma$. Wieder mit dem Vergleichskriterium folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) \geq \gamma.$$

Zusammen mit $(*)$ erhalten wir $f(x) = \gamma$ wie behauptet. □

**8.6 Korollar.** *Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ ein reelles Polynom* ***ungeraden*** *Grades. Dann hat $p$ mindestens eine reelle Nullstelle.*




*Beweis.* Nach ggf. Durchmultiplizieren mit einer Konstanten können wir o.E. annehmen, dass der Koeffizient der höchsten Potenz von $x$ (der sogenannte Leitkoeffizient von $p$) gleich 1 ist, d.h.

$$p(x) = x^n + \underbrace{a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}_{:=q(x)}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Betrachte nun die Werte $q(r)$ und $q(-r)$ für $r > 1$. Wir können diese mit der Dreiecksungleichung und wegen $r > 1$ folgendermaßen abschätzen:

$$|q(\pm r)| \leq |a_{n-1}| \cdot r^{n-1} + \ldots + |a_0| \leq r^{n-1} \cdot \underbrace{\left(|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|\right)}_{=:M}.$$

Wählen wir nun $r$ groß genug, nämlich $r > \max(M,1)$, so erhalten wir hieraus

$$|q(\pm r)| \leq r^n.$$

Weil $n$ ungerade ist, hat dies für das Polynom $p$ die folgenden Konsequenzen:

$$p(r) = r^n + q(r) \geq 0 \quad \text{und} \quad p(-r) = -r^n + q(-r) \leq 0.$$

Da $p$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und reellwertig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Stelle $x \in [-r,r]$ mit $p(x) = 0$. □

**Bezeichnungen:**

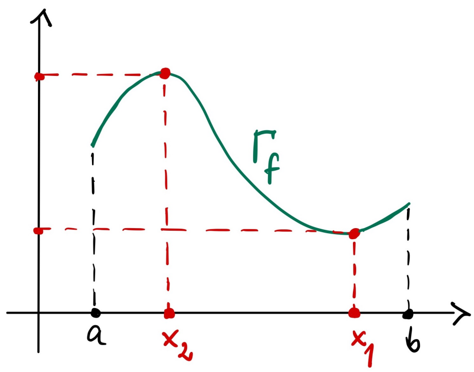
1. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ wird auch *kompaktes Intervall* genannt. (In der Analysis 2 werden wir den Begriff der Kompaktheit in einem allgemeineren Rahmen kennenlernen).
2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in D.$$

**8.7 Satz** (**Satz vom Maximum und Minimum**).
*Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ beschränkt und nimmt auf $I$ ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt Stellen $x_1, x_2 \in I$, so dass*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \textit{für alle } x \in I.$$

**Bemerkung:** Man schreibt oft: $\min_{x \in I} f(x) := \min\{f(x) : x \in I\}$ etc.
Damit haben wir in der Situation des Satzes: $f(x_1) = \min\limits_{x \in I} f(x), \quad f(x_2) = \max\limits_{x \in I} f(x)$.




Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, wollen wir uns überlegen, dass tatsächlich auf keine der beiden Voraussetzungen des Satzes, nämlich die Kompaktheit von $I$ und die Stetigkeit von $f$, verzichtet werden kann. Dazu betrachten wir zwei Beispiele:

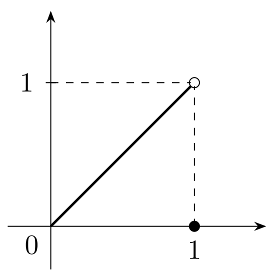
**Beispiele:**

(1) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem (nicht kompakten!) Intervall $I = (0, 1]$ ist stetig, aber unbeschränkt, da $f(I) = [1, \infty)$.

(2) Auf dem kompakten Intervall $I = [0, 1]$ sei

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

$f$ ist unstetig im Punkt $x = 1$, und $f$ nimmt auf $I$ kein Maximum an, da $f(I) = [0, 1)$.



*Beweis von Satz 8.7.* Wir beweisen, dass $f$ auf $I$ ein Maximum annimmt, für das Minimum ist die Argumentation analog. Sei dazu

$$s := \sup f(I) = \sup\{\, f(x) : x \in I\} \ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wir müssen zeigen, dass es ein $x_0 \in I$ gibt mit $s = f(x_0)$. Gemäß der Definition des Supremums existiert eine Folge $(x_n) \subseteq I$ mit $f(x_n) \to s$. Da $I = [a, b]$ beschränkt ist, ist auch $(x_n)$ beschränkt und besitzt daher nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$. Wegen $a \le x_{n_k} \le b$ muss auch $a \le x_0 \le b$ gelten, d.h es ist $x_0 \in I$. Weil $f$ stetig auf $I$ ist, erhalten wir mit dem Folgenkriterium

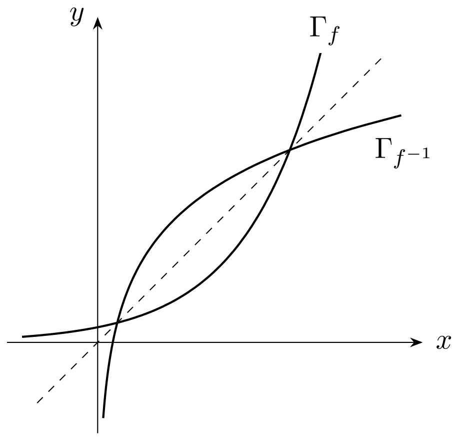
$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Andererseits aber wissen wir, dass $f(x_{n_k}) \to s$ für $k \to \infty$, und es folgt $s = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Also ist $s = f(x_0)$. $f$ nimmt daher an der Stelle $x_0$ ein Maximum an. □

**8.8 Satz.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gelten:*

(1) *Das Bild $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist ebenfalls ein Intervall.*

(2) ***(Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion.)*** *Ist $f$ zusätzlich streng monoton, so ist $f : I \to f(I)$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls stetig.*




*Beweis.* Wir setzen

$$A := \inf f(I) \ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad B := \sup f(I) \ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wir beweisen zunächst, dass das ganze offene Intervall $(A, B)$ in $f(I)$ enthalten ist. Sei dazu $A < y < B$. Nach Definition von $A$ und $B$ gibt es Punkte $a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$. Nun wenden wir auf das kompakte Intervall $J \subseteq I$ mit Randpunkten $a, b$ den Zwischenwertsatz an. Er liefert die Existenz einer Stelle $x \in J \subseteq I$ mit $y = f(x)$. Also ist $y \in f(I)$. Da $y \in (A, B)$ beliebig war, folgt $(A, B) \subseteq f(I)$. Aufgrund der Definition von $A$ und $B$ muss $f(I)$ daher eines der Intervalle $(A, B), (A, B], [A, B)$ oder $[A, B]$ sein (je nachdem, ob $A$ bzw. $B$ zu $f(I)$ gehört oder nicht).

(2) Da $f$ streng monoton ist, ist $f : I \to f(I) =: J$ bijektiv nach Satz 3.17 und $f^{-1} : J \to I$ ist im selben Sinne streng monoton. Es bleibt zu zeigen, dass $f^{-1}$ in jedem Punkt $y_0 \in J$ stetig

ist. Sei dazu $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in I$. Wir nehmen an, dass $f$ streng monoton wachsend ist (der Fall, dass $f$ streng monoton fallend ist, geht analog). Wir benötigen nun eine Fallunterscheidung:

**1. Fall:** $x_0$ ist kein Randpunkt von $I$.
Für genügend kleines $\epsilon > 0$ haben wir dann noch $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq I$. Wir setzen

$$\alpha := f(x_0 - \epsilon),\ \beta := f(x_0 + \epsilon).$$

Dann gilt insbesondere $\alpha < y_0 < \beta$.

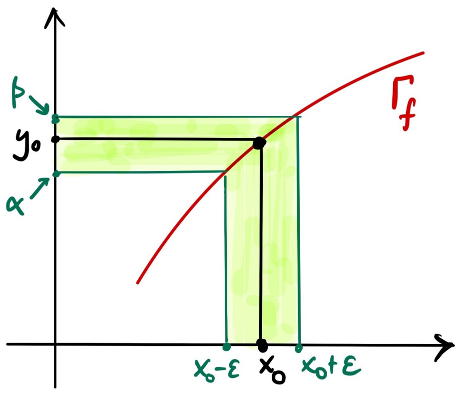
Weil $f^{-1}$ streng monoton wachsend ist, erhalten wir außerdem für beliebiges $y$ mit $\alpha < y < \beta$:

$$x_0 - \epsilon = f^{-1}(\alpha) \ < \ f^{-1}(y) \ < \ f^{-1}(\beta) = x_0 + \epsilon.$$

Hieraus folgt

$$\Big| f^{-1}(y) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0} \Big| < \epsilon \quad \text{für alle } y \in (\alpha, \beta).$$

Dies zeigt, dass $f^{-1}$ in $y_0$ stetig ist.

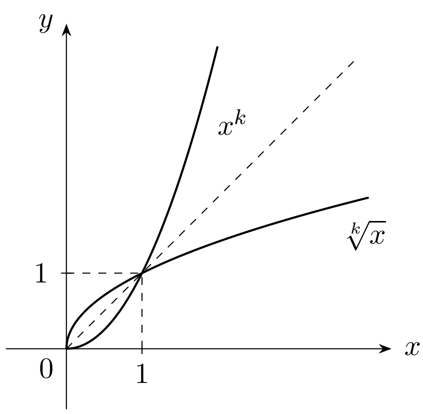



**2. Fall:** $x_0$ ist linker bzw. rechter Randpunkt von $I$.
In diesem Fall ist $y_0$ Randpunkt von $J$, und das Argument aus dem 1. Fall funktioniert in leicht modifizierter Form: man ersetzt das Intervall $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ durch $[x_0, x_0 + \epsilon]$ bzw. durch $[x_0 - \epsilon, x_0]$ und setzt entsprechend $\alpha = y_0$ bzw. $\beta = y_0$. □

**Beispiel: Die $k$-te Wurzelfunktion** ($k \in \mathbb{N}$).
Die Potenzfunktion $f(x) = x^k$, $[0, \infty) \to [0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv, siehe Beispiel 3.16. Also ist auch ihre Umkehrfunktion

$$x \mapsto \sqrt[k]{x},\ [0, \infty) \to [0, \infty)$$

streng monoton wachsend (dies wissen wir aus Satz 3.17), und ebenfalls stetig.



## 8.3 Häufungspunkte

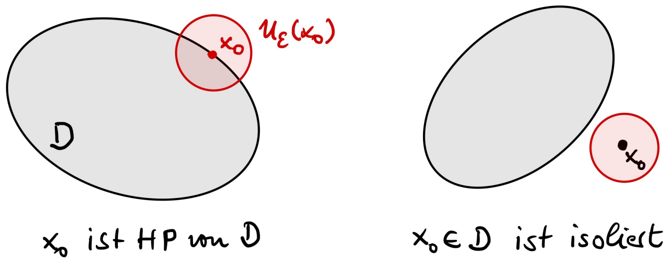
In diesem Abschnitt ist wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
**Erinnerung:** Für $x_0 \in \mathbb{K}$ ist die $\epsilon$-Umgebung von $x_0$ in $\mathbb{K}$ definiert als

$$U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

**Definition.** Sei $D \subseteq \mathbb{K}$.

(1) Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungspunkt* von $D$, falls jede $\epsilon$-Umgebung von $x_0$ (in $\mathbb{K}$) einen von $x_0$ verschiedenen Punkt aus $D$ enthält.

(2) Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt *isoliert*, falls $x_0$ kein Häufungspunkt von $D$ ist.




**Beachte:**

1. Ein Häufungspunkt von $D$ kann, muss aber nicht zu $D$ gehören!
2. Ein Punkt $x_0 \in D$ ist genau dann isoliert, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(x_0) \cap D = \{x_0\}$.

**8.9 Satz.** *Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ ist genau dann Häufungspunkt von $D$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{x_0\}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

*Beweis.* Sei zunächst $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in D\setminus\{x_0\}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Dies aber impliziert, dass die Folge $(x_n)$ gegen $x_0$ konvergiert. Sei umgekehrt $(x_n)$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \epsilon$, d.h. $x_n \in U_\epsilon(x_0)$. Dies zeigt, dass $x_0$ Häufungspunkt von $D$ ist. □

**Beispiele.**

(1) $D = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$.
Die Menge aller Häufungspunkte von $D$ ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$.

(2) Ist $D \subseteq \mathbb{K}$ eine endliche Menge, so besitzt $D$ keine Häufungspunkte, und alle $x \in D$ sind isoliert.

(3) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. In diesem Fall ist 0 der einzige Häufungspunkt von $D$. Alle Punkte aus $D$ selbst sind isoliert. (Übung)

(4) $D = B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Die Menge aller Häufungspunke der offenen Kreisscheibe $D$ ist die „abgeschlossene Kreisscheibe“ $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. (Übung)

(5) $x_0 \in \mathbb{K}$ ist Häufungspunkt der „punktierten Umgebung “ $U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ von $x_0$ in $\mathbb{K}$.

**Bemerkung.** Es ist wichtig, zwischen einem Häufungspunkt einer Menge und einem Häufungswert einer Folge zu unterscheiden!
Außerdem muss ein **Häufungswert** einer Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{K}$ **nicht unbedingt Häufungspunkt** der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ihrer Folgenglieder sein.
**Beispiel:** Die Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n = (-1)^n$ hat die Häufungswerte 1 und $-1$, aber die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\pm 1\}$ ist endlich und hat keine Häufungspunkte.

## 8.4 Grenzwerte von Funktionen

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, das Verhalten einer gegebenen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ in der Nähe eines Häufungspunktes $x_0$ ihres Definitionsbereichs $D$ zu studieren. Dabei ist $D$ eine Teilmenge von $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Typischerweise ist $x_0$ eine Definitionslücke von $f$.

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{auf } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nach den Regeln für stetige Funktionen ist $f$ stetig auf $D$. Wir möchten wissen, wie $f$ sich nahe $x_0 = 0$ verhält, d.h. in beliebig kleinen Umgebungen von $x_0$. Offenbar ist 0 ein Häufungspunkt von $D$.

**Definition.** Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und $x_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von $D$. Man sagt: $f$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$(*) \quad |f(x) - a| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

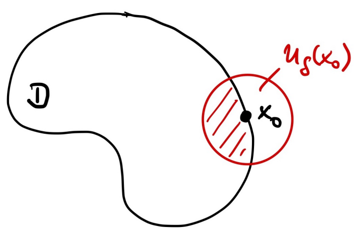
Der Wert $a$ heißt dann der *Grenzwert* oder *Limes* von $f$ im Punkt $x_0$. Man schreibt

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{oder:} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to x_0\,.}$$

**Beachte:** Die Bedingung $(*)$ ist äquivalent zu:

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in \big(D \setminus \{x_0\}\big) \cap U_\delta(x_0).$$

Weil $x_0$ Häufungspunkt von $D$ ist, ist die Schnittmenge rechts nicht leer.




Ähnlich wie die Stetigkeit lässt sich auch die Existenz eines Grenzwerts einer Funktion mittels Folgen charakterisieren:

**8.10 Satz (Folgenkriterium für Grenzwerte).** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann sind äquivalent:*

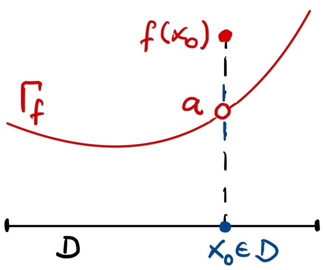
(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a.$

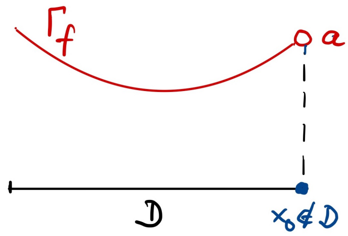
(ii) *Für jede Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.*

*Beweis.* Wörtlich wie beim Folgenkriterium für Stetigkeit (Satz 8.1). ☐

**Beachte:** Falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert, so ist er eindeutig. Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Grenzwerte von Folgen.

**Beispiel:** Wir betrachten zwei Beispiele von reellen Funktionen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ :




$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0) \qquad\qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

**8.11 Lemma.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$ mit $x_0 \in D$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Beweis.* Dies folgt aus der $\epsilon$-$\delta$-Definition des Grenzwerts. □

Falls $x_0 \notin D$ (wie im vorangehenden Bild rechts), so ist die Existenz eines Grenzwerts von $f$ im Punkt $x_0$ äquivalent zur stetigen Fortsetzbarkeit von $f$ in $x_0$. Dies wird im folgenden Satz präzisiert:

**8.12 Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von $D$ mit $x_0 \notin D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

(ii) *Die Fortsetzung $\widetilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$,*

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D\,, \\ a & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

*ist stetig im Punkt $x_0$.*

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 8.11 für $\widetilde{f}$, denn $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0} \widetilde{f}(x) = a$. □

**Beispiel:** Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{auf } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2,$$

Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\widetilde{f}(x) = x + 1$ ist die in $x_0 = 1$ stetige Fortsetzung von $f$.

Der folgende Satz beantwortet auch die Frage im ersten Beispiel dieses Abschnitts.

**8.13 Satz.**

$$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1\,.} \qquad (\textit{Dabei ist } D = \mathbb{C}\setminus\{0\}.)$$

*Beweis.* Wir verwenden die Restgliedabschätzung für die Exponentialfunktion aus Satz 7.5. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| \le 1$ gilt demnach

$$\Big|\frac{e^z-1}{z} - 1\Big| \;=\; \frac{1}{|z|}\cdot\big|e^z - 1 - z\big| \;\le |z|.$$

Für $\epsilon > 0$ mit $\epsilon \le 1$ folgt hieraus

$$\Big|\frac{e^z-1}{z} - 1\Big| < \epsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 < |z| < \epsilon.$$

Dies liefert die Behauptung. □

**8.14 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte).**

(1) *Gegeben seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ und ein Häufungspunkt $x_0$ von $D$. Es gelte $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Dann folgt*

$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a + b, \quad f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} ab$$

*sowie* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{a}{b}$, *sofern* $b \neq 0$.

(2) *Seien $D, E$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei $x_0$ Häufungspunkt von $D$, und sei $f : D \to E$ eine Funktion mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in E$. Ferner sei $g : E \to \mathbb{C}$ stetig in $a$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(a).$$

(3) *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ reellwertig mit $f \le g$ auf $D$, und sei $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann gilt auch*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;\le\; \lim_{x\to x_0} g(x),$$

*sofern die beiden Limiten existieren.*

*Beweis.* Die Aussagen ergeben sich aus dem Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte (Satz 8.10) im Zusammenspiel mit den bekannten Regeln für Grenzwerte von Folgen. Dazu genauer:
(1) Sei $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ eine Folge mit $x_n \to x_0$. Nach dem Folgenkriterium für Grenzwerte gilt dann $f(x_n) \to a$, $g(x_n) \to b$ für $n \to \infty$. Dies impliziert

$$f(x_n) + g(x_n) \;\to\; a + b, \quad f(x_n)g(x_n) \;\to\; ab, \quad \text{sowie } \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{a}{b}, \quad \text{sofern } b \neq 0.$$

Beachte beim letzten Grenzwert, dass $g(x_n) \neq 0$ für genug große $n$. Nochmalige Anwendung des Folgenkriteriums für Grenzwerte liefert Teil (1).
(2) Sei wieder $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ eine Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt $f(x_n) \to a$, und mit der Stetigkeit von $g$ in $a$ (und dem Folgenkriterium für Stetigkeit) erhalten wir $g(f(x_n)) \to g(a)$.
(3) Dies zeigt man analog mit dem Vergleichskriterum für Folgengrenzwerte. □

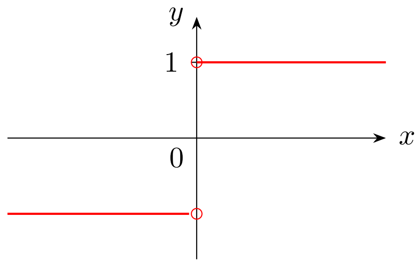
## 8.5 Einseitige und uneigentliche Grenzwerte

In diesem Abschnitt betrachten wir stets Funktionen mit **reellem Definitionsbereich** $D \subseteq \mathbb{R}$. In diesem Fall kann man auch einseitige (linksseitige oder rechtsseitige) Grenzwerte bilden.

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{auf } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht, wenn man diesen Definitionsbereich zugrundelegt.



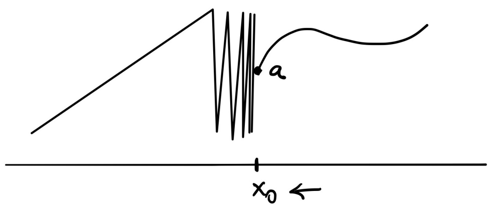

Wählt man dagegen $D = (0, \infty)$ als Definitionsbereich von $f$, so konvergiert $f$ für $x \to 0$ gegen $1$. Wählt man $D = (-\infty, 0)$, so konvergiert $f$ für $x \to 0$ gegen $-1$.

**Definition** (**Einseitige Grenzwerte**)**.** Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit reellem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei ferner $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Menge $\{x \in D : x > x_0\}$. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ *rechtsseitiger Grenzwert* von $f$ im Punkt $x_0$, falls

$$\lim_{\{x \in D:\, x > x_0\},\, x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Man schreibt: $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = a\,.$

Analog definiert man den *linksseitigen Grenzwert* von $f$ in $x_0$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$.




Falls $x_0 \in D$ mit

$$f(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x),$$

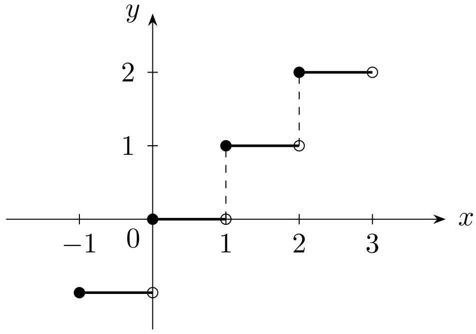
so heißt $f$ *rechtsseitig stetig* in $x_0$. Analog heißt $f$ *linksseitig stetig* in $x_0$, falls

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Beispiele:**

(1) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{x}{|x|} = 1\,, \quad \lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{x}{|x|} = -1.$

(2) Die **Floorfunktion** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist rechtsseitig stetig in allen $x \in \mathbb{R}$ (auch an den Sprungstellen, an diesen ist sie aber nicht linksseitig stetig).



**Bemerkung:** Das Folgenkriterium 8.10 und die Rechenregeln 8.14 gelten entsprechend für einseitige Grenzwerte.

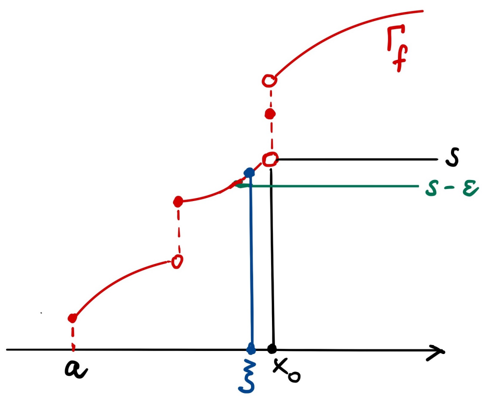
Das Monotoniekriterium für Folgen besagt, dass eine monotone und beschränkte reelle Folge einen Grenzerwt besitzt. Ein analoges Kriterium gibt es für (einseitige) Grenzwerte monotoner und beschränkter reeller Funktionen:

**8.15 Satz.** *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Dann besitzt $f$ in jedem $x_0 \in [a,b]$ einseitige Grenzwerte (wobei es sich in $a$ bzw. $b$ nur um einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert handelt).*

*Beweis.* Wir führen den Beweis für den Fall, dass $f$ monoton wachsend ist; monoton fallend verläuft analog. Wir zeigen zunächst die Existenz eines linksseitigen Grenzwerts in jedem Punkt $x_0 \in (a,b]$.

*Behauptung:*

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a, x_0)\} =: s$$




Zum Beweis sei $\epsilon > 0$. Nach Definition von $s$ als Supremum existiert dann ein Punkt $\xi \in (a, x_0)$ mit $f(\xi) > s - \epsilon$. Da $f$ monoton wächst, ergibt sich hieraus

$$\forall x \in [\xi, x_0) : \; s - \epsilon < f(x) \leq s\,.$$

Dies aber zeigt, dass $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = s$.

Analog beweist man für $x_0 \in [a,b)$ die Existenz eines rechtsseitigen Grenzwerts, genauer:

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (x_0\,, b)\}.$$

□

**Grenzwerte für $x \to \pm\infty$**

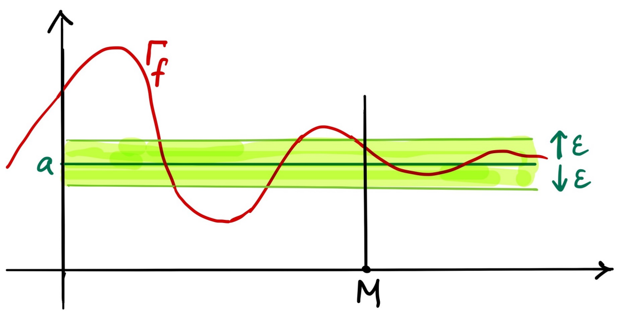
Auch hier betrachten wir Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit reellem Definitonsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

**Definition.** Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit nach oben unbeschränktem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ (d.h. zu jedem $M > 0$ existiert ein $x \in D$ mit $x > M$). Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ *Grenzwert von $f$ in $\infty$*, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Schranke $M > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } x > M.$$

Man schreibt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to \infty$.

Analog definiert man $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, falls $D$ nach unten unbeschränkt.




**Bemerkung:** Die Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 8.14 gelten entsprechend für Grenzwerte in $\pm\infty$. Dies sieht man daraus, dass offenbar

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\xi\downarrow 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right); \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\xi\uparrow 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Eine weitere Konsequenz dieser Beobachtung:

**8.16 Lemma.** *Sei* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend und nach oben unbeschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $M \geq a$, so dass $f(M) > \frac{1}{\epsilon}$. Weil $f$ monoton wächst, folgt

$$0 < \frac{1}{f(x)} < \epsilon \quad \text{für alle } x \geq M.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

**Beispiele:**

(1) Für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt mit obigem Lemma:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0\,; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0.$$

(2) Für feste Koeffizienten $a_0,\ldots,a_n,\ b_0,\ldots,b_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $b_n \neq 0$ gilt

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^n}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{a_n}{b_n}\,.$$

**Uneigentliche Grenzwerte.**

In diesem Abschnitt betrachten wir **reellwertige** Funktionen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

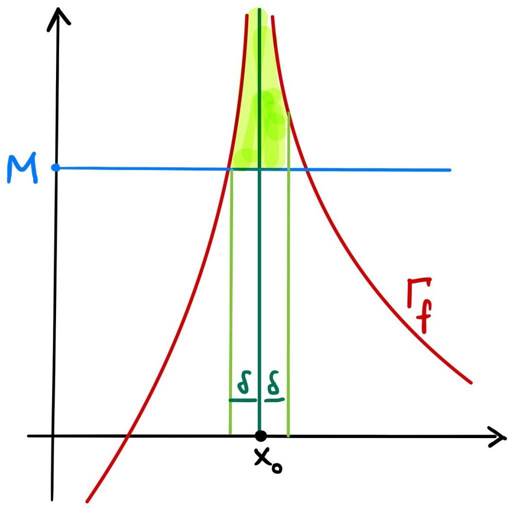
**Definition.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ reellwertig. Man sagt: $f$ hat in $x_0$ den *uneigentlichen Grenzwert* $\infty$, falls es zu jeder Schranke $M > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \geq M \qquad \text{für alle } x \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Man schreibt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

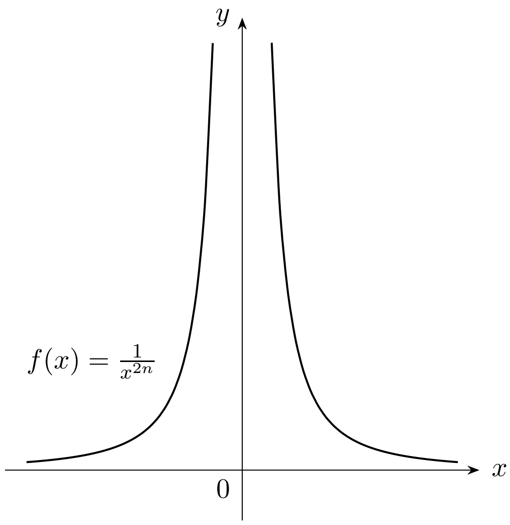
Analog definiert man den uneigentlichen Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, sowie uneigentliche Grenzwerte für $x \downarrow x_0$, $x \uparrow x_0$, $x \to \pm\infty$.

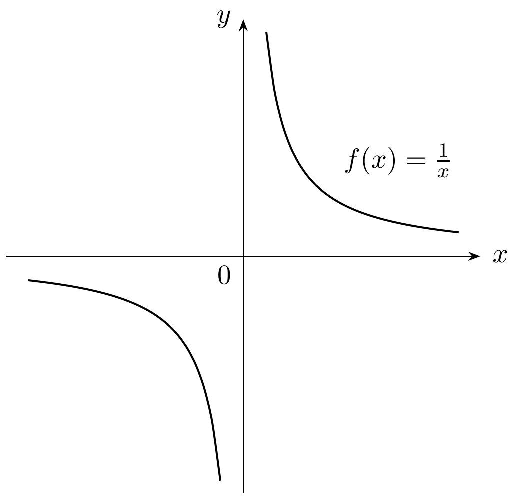



**Beispiele:**

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = \infty.$

(2) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty.$



**Regeln:**

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ oder $-\infty \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

Vorsicht: Dies ist keine Äquivalenz! Aber es gilt:

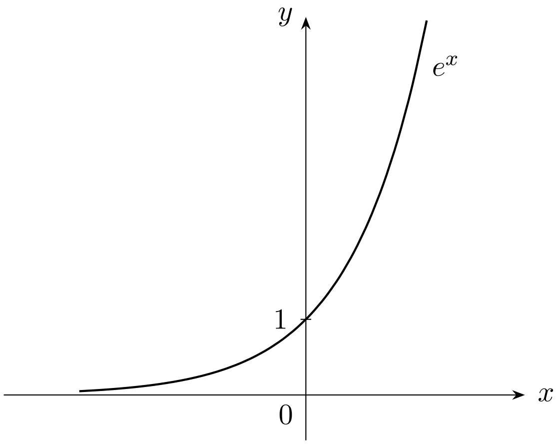
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \wedge g(x) > 0 \ \forall x \in D \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \infty.$

**8.17 Beispiel. Wachstum der Exponentialfunktion.**
Für einen festen Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ gelten

(1) $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty\,.}$

Das heisst $x \mapsto e^x$ wächst für $x \to \infty$ schneller als jede Potenz von $x$.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$




*Beweis.* (1) Für $x > 0$ gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und daher

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \longrightarrow \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

(2) Die Substitution $y = -x$ und Teil (1) liefern

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{y \to \infty} (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \underset{(1)}{=} 0.$$

$\square$

# Kapitel 9

# Verwandte der Exponentialfunktion

## 9.1 Logarithmus und allgemeine Potenzen

Wir wissen bereits, dass die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig ist (Satz 7.4 und Satz 8.2). Tatsächlich gilt sogar das folgende

**9.1 Lemma.** *Die reelle Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.*

*Beweis.* Zu zeigen ist noch die Bijektivität. Aus der strengen Monotonie von exp auf $\mathbb{R}$ folgt die Injektivität. Für die Surjektivität betrachten wir Grenzwerte. Nach Beispiel 8.17 gilt

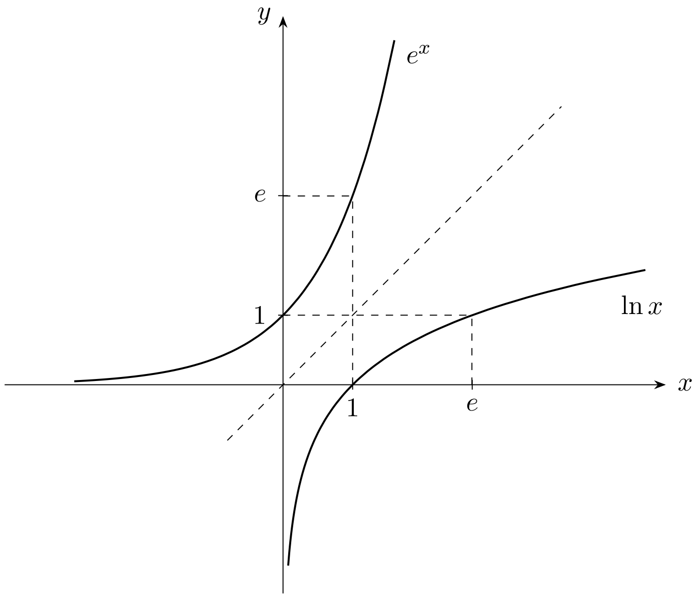
$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Ist $y \in (0, \infty)$ beliebig, so gibt es daher Stellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $e^{x_1} \le y$ und $e^{x_2} \ge y$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz eines $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = y$. $\square$

Der Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion (Satz 8.8) liefert nun, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\ln : \, (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

besitzt. Diese heißt der *(natürliche) Logarithmus.*




Für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ gilt also:

$$e^x = y \iff x = \ln y.$$

Spezielle Werte des Logarithmus:

$$\ln 1 = 0, \ \ln e = 1.$$

Der Wertebereich des Logarithmus ist gleich dem Definitionsbereich der Exponentialfunktion, also ganz $\mathbb{R}$. Weil ln streng monoton ist, gilt daher

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x\downarrow 0} \ln x = -\infty.$$

**9.2 Satz (Eigenschaften des Logarithmus).**

(1) $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.*

(2) *Für alle* $x, y \in (0,\infty)$ *gilt die* ***Funktionalgleichung***

$$\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y\,.}$$

(3) $\ln\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = -\ln x\,.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

*Beweis.* (1) wissen wir bereits. (2) Für $x, y > 0$ erhalten wir unter Verwendung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}\,.$$

Aufgrund der Injektivität von exp auf $\mathbb{R}$ folgt hieraus die Funktionalgleichung des ln.
(3) Für $x > 0$ erhalten wir mit der Funktionalgleichung aus Teil (2)

$$0 = \ln 1 = \ln\Big(x \cdot \frac{1}{x}\Big) = \ln x + \ln\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

(4) Wir verwenden das Folgenkriterium für Grenzwerte. Sei $(x_n) \subseteq (-1,\infty)$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$. Wegen der Stetigkeit des Logarithmus bildet dann auch $y_n := \ln(1+x_n)$ eine Nullfolge, und mit dem Grenzwert für die Exponentialfunktion aus Satz 8.13 erhalten wir

$$\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \frac{y_n}{e^{y_n} - 1} \longrightarrow 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dies liefert die Behauptung. □

**Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen.**

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann gilt für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$:

$$(*) \quad (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p} = e^{\frac{p}{q}\cdot \ln a}.$$

Aufgrund von Korollar 7.2 (4) ist nämlich

$$\big(e^{\frac{p}{q}\cdot \ln a}\big)^q = e^{p \ln a} = (e^{\ln a})^p = a^p,$$

und mit der Eindeutigkeit der (positiven) $q$-ten Wurzel folgt $(*)$.

Dies motiviert die folgende

**Definition.** Für $a > 0$ ist die *Exponentialfunktion zu Basis $a$* definiert durch

$$\boxed{a^z := \exp_a(z) := e^{z \ln a}} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

**9.3 Lemma (Eigenschaften von $\exp_a$).**

(1) *Funktionalgleichung:* $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.

(2) $a^0 = 1$, $a^z \neq 0$ *und* $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(3) $a^x > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(4) $exp_a$ *ist stetig auf* $\mathbb{C}$ *(als Verknüpfung stetiger Funktionen).*

(5) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}. \quad \textit{Insbesondere: } (e^x)^y = e^{xy}.}$$

(6) *Für alle* $a, b > 0$ *und alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $a^z b^z = (ab)^z$.

*Beweis.* (1) $a^z \cdot a^w = e^{z \ln a} \cdot e^{w \ln a} = e^{(z+w) \ln a} = a^{z+w}$.
(2), (3) ergeben sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.
(5), (6): Übung. □

**Potenzfunktionen.**

**Definition.** Sei $s \in \mathbb{R}$. Die *Potenzfunktion zum Exponenten $s$* ist definiert als

$$p_s(x) := x^s = e^{s \ln x}, \quad x \in (0, \infty).$$

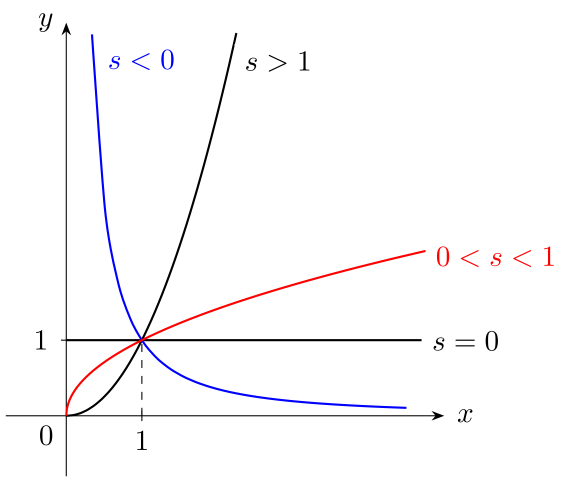
Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist die Potenzfunktion $p_s$ stetig auf $(0, \infty)$.
**Beachte:** Im Fall $s = 1/k$ mit $k \in \mathbb{N}$ stimmt gemäß unserer Vorüberlegung die Potenzfunktion $p_{1/k}$ mit der bekannten $k$-ten Wurzelfunktion überein:

$$p_{1/k}(x) = \sqrt[k]{x}.$$

Wir betrachten Potenzfunktionen mit $s > 0$ noch etwas genauer. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} p_s(x) = \lim_{x \downarrow 0} e^{s \ln x} = 0,$$

da $\lim\limits_{x \downarrow 0} (s \ln x) = -\infty$.
Im Fall $s > 0$ ist daher die Potenzfunktion $p_s$ stetig fortsetzbar in $0$ durch $p_s(0) := 0$.



## 9.2 Trigonometrische Funktionen, Teil 1

Anhand der Exponentialreihe haben wir in Korollar 7.2 gesehen, dass

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich insbesondere: $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$, und daher

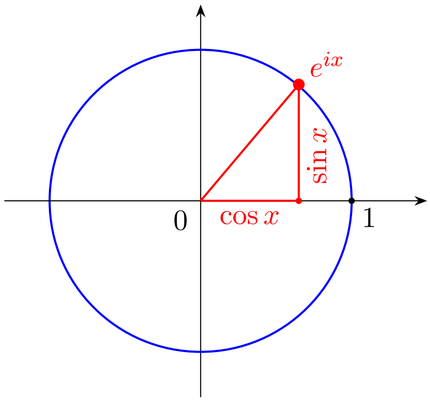
$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1.$$

**Konsequenz:** Die komplexen Zahlen der Form $z = e^{ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegen alle auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Wir definieren nun die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus auf $\mathbb{R}$.

**Definition (Sinus und Cosinus auf $\mathbb{R}$).** Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Cosinus* und den *Sinus* von $x$ durch

$$\cos x := \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right);$$
$$\sin x := \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$




Damit gilt

**9.4 Satz.** *Für $x \in \mathbb{R}$ gelten die **Eulerschen Formeln***

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \textit{und} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.}$$

*Dabei verwenden wir die Schreibweisen* $\cos^2 x := (\cos x)^2$, $\sin^2 x := (\sin x)^2$.
*Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:* $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Beachten Sie, dass hier nirgendwo die Rede von einem *Winkel* ist!
Wir dehnen nun die Definition der trigonometrischen Funktionen ins Komplexe aus:

**Definition (Sinus und Cosinus auf $\mathbb{C}$).** Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man

$$\boxed{\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right); \quad \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).}$$

Bevor wir weitere Eigenschaften der Funktionen Sinus und Cosinus untersuchen, führen wir noch eine Bezeichnung ein:

**Bezeichnung:** Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge mit $D = -D = \{-z : z \in D\}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt

$$\textit{gerade}, \text{ falls } f(-z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D,$$
$$\textit{ungerade}, \text{ falls } f(-z) = -f(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

**9.5 Satz.** (1) *Die Funktionen* $\cos z$ *und* $\sin z$ *sind (als Summen stetiger Funktionen) auf ganz* $\mathbb{C}$ *stetig.*

(2) *Der Cosinus ist gerade und der Sinus ist ungerade auf* $\mathbb{C}$*, d.h.*

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \cos(-z) = \cos z\,, \ \sin(-z) = -\sin z.$$

(3) *Cosinus und Sinus besitzen die folgenden Potenzreihenentwicklungen:*

$$\cos z \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n} \ = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \mp \ldots\,;$$
$$\sin z \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \ = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots\,.$$

*Beide Reihen haben Konvergenzradius* $R = \infty$*, d.h. sie sind für alle* $z \in \mathbb{C}$ *(absolut) konvergent.*

(4) ***Additionstheoreme:*** *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w. \end{aligned}}$$

(5) $\boxed{\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1\,.}$

*Beweis.* (1) und (2) sind offensichtlich. (3) Aus der für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergenten Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wir die Darstellung

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} \ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k + (-i)^k}{2} \cdot \frac{z^k}{k!} \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}.$$

Dabei haben wir verwendet, dass $i^k + (-i)^k = 0$ falls $k$ ungerade, und $i^{2n} + (-i)^{2n} = 2\,(-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Analog beweist man die Potenzreihendarstellung von $\sin z$. Die Aussage über den Konvergenzradius ist klar, da beiden Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren (als Summen konvergenter Reihen). Sie ergeben sich aber auch aus Aufgabe 1, Tutorblatt 8, denn die dortigen Funktionen $C$ und $S$ sind der Cosinus und der Sinus!
(4) Wir beweisen die Formel für den Cosinus; für den Sinus geht sie analog. Es ist

$$\cos(z+w) = \frac{1}{2}\big(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\big) \ =: c.$$

Andererseits ist auch

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w \ = \ \frac{1}{4}\big[\big(e^{iz} + e^{-iz}\big) \cdot \big(e^{iw} + e^{-iw}\big) \ + \ \big(e^{iz} - e^{-iz}\big) \cdot \big(e^{iw} - e^{-iw}\big) \ = \ c.$$

(5) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \Big( \underbrace{\frac{e^{iz}-1}{2iz}}_{\to \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{e^{-iz}-1}{-2iz}}_{\to \frac{1}{2}} \Big) \ = \ 1.$ □

**Bemerkungen:**

(1) In Aufgabe 1, Tutorblatt 8 haben wir bereits das Additionstheorem für den Sinus mittels Cauchyprodukt bewiesen. Das war recht aufwendig, und geht nun über die Exponentialfunktion viel einfacher!

(2) Das Thema „trigonometrische Funktionen" ist hiermit noch nicht abgeschlossen. Wir werden wieder darauf zurückkommen, nachdem wir die Differentialrechnung behandelt haben. Wir wissen z.B. jetzt noch nicht, ob tatsächlich alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ von der Form $z = e^{ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ sind. Wir werden sehen, dass das so ist; dabei ist $x$ aber nicht eindeutig!

# Kapitel 10

# Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ist eines der zentralen Werkzeuge der Analysis und besitzt zahlreiche Anwendungen, u.a. in der Physik.
Wir betrachten in diesem Kapitel stets Funktionen mit reellem Definitionsbereich. Meist ist dieser ein *echtes* Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, d.h. ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält.

## 10.1 Die Ableitung

Beim Studium von Funktionen spielt oft die Veränderung der Werte einer Funktion in Abhängigkeit vom Argument eine wichtige Rolle. Die infinitesimale Betrachtung der Veränderung der Funktionswerte führt auf den Begriff der Ableitung.

**Definition.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$(*) \quad f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. Dabei wird der Grenzwert für $x \in D := I \setminus \{x_0\}$ genommen. Die Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{C}$ heißt dann die *Ableitung* von $f$ in $x_0$. Man schreibt dafür auch $\frac{df}{dx}(x_0)$. Die Funktion

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt der *Differenzenquotient* von $f$ in $x_0$. Die Funktion $f$ heißt *differenzierbar auf* $I$, falls sie in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : I \to \mathbb{C}$ heißt dann die *Ableitung* von $f$.

**Bemerkungen:** 1. Das Intervall $I$ muss nicht offen sein. Falls $x_0$ ein Randpunkt von $I$ ist, so ist der Grenzwert in $(*)$ ein einseitiger Grenzwert.

2. Mit der Substitution $h = x - x_0$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Geometrische Interpretation der Ableitung für reellwertiges $f$:**
In der folgenden Skizze ist die Gleichung der Geraden durch die Punkte $p_0 = (x_0, f(x_0))$ und $p = (x, f(x))$ gegeben durch

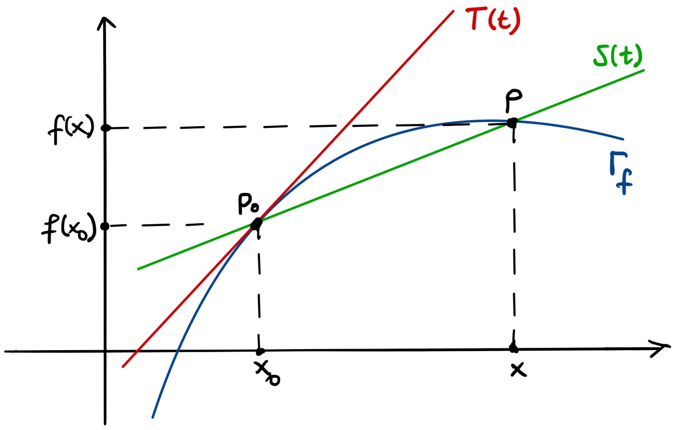
$$S(t) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (t - x_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Gerade heißt die *Sekante* durch $p_0$ und $p$. Ihre Steigung ist gegeben durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Falls die Ableitung $f'(x_0)$ existiert, so geht die Sekante $S$ mit $x \to x_0$ in die folgende Gerade über:

$$T(t) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(t-x_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$




Die Gerade $T$ heißt die *Tangente* an den Graphen von $f$ im Punkt $p_0$. Ihre Steigung ist gegeben durch $f'(x_0)$.

**10.1 Beispiele.** (1) Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = ax + b$ (mit $a, b \in \mathbb{C}$) ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x) = a$.

Denn für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \neq x_0$ gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a.$$

Insbesondere ist die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = b$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

(2) Die **Potenzfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.}$$

**Beweis:** Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Mit dem Binomischen Satz erhalten wir für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = nx_0^{n-1} + \binom{n}{2} h\, x_0^{n-2} + \ldots + h^n \underset{h\to 0}{\longrightarrow} nx_0^{n-1}.$$

(3) **Die Exponentialfunktion.** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ax}$ (mit $a \in \mathbb{C}$) ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}. \quad \text{Insbesondere:} \ \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.}$$

**Beweis:** Wir können o.E. $a \neq 0$ annehmen. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann folgt für $h \neq 0$:

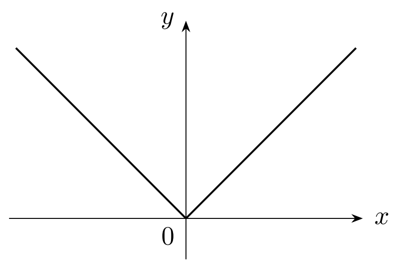
$$\frac{e^{a(x_0+h)} - e^{ax_0}}{h} = e^{ax_0} \cdot \frac{e^{ah} - 1}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} a \cdot e^{ax_0},$$

denn nach Satz 8.13 gilt $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{ah} - 1}{ah} = 1$.

(4) Die **Betragsfunktion** $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$. Es gilt nämlich

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{|x| - 0}{x} = 1, \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Der Limes des Differenzenquotienten in $x_0 = 0$ existiert daher nicht.




Weil aber $f(x) = x$ für $x > 0$ und $f(x) = -x$ für $x < 0$, ist $f$ differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. auf $(0, \infty)$ und auf $(-\infty, 0)$, mit

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

**Bemerkungen:**

(1) Wie die Stetigkeit, so ist auch die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ an einer Stelle $x_0 \in I$ eine lokale Eigenschaft, die nur vom Verhalten von $f$ in (beliebig) kleinen Umgebungen von $x_0$ abhängt.

(2) Ist der Definitionsbereich einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle, so heißt $f$ differenzierbar auf $D$, wenn $f$ auf jedem offenen Teilintervall von $D$ differenzierbar ist.

Wir betrachten nun eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ nahe $x_0 \in I$. Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ schreiben wir

$$(*) \qquad f(x) = f(x_0) + q(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{mit} \quad q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**10.2 Satz.** *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist $f$ auch stetig in $x_0$.*

*Beweis.* Aus $(*)$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f(x_0).$$

Dies besagt, dass $f$ in $x_0$ stetig ist. (Beachte Lemma 8.11). □

**10.3 Satz** (**Äquivalente Formulierung der Differenzierbarkeit**). *Für eine Funktion* $f : I \to \mathbb{C}$ *(*$I$ *ein echtes Intervall) sind äquivalent:*

(i) $f$ *ist differenzierbar in* $x_0 \in I$.

(ii) *Es gibt eine in* $x_0$ *stetige Funktion* $q : I \to \mathbb{C}$, *so dass*

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + q(x) \cdot (x - x_0).$$

*In diesem Fall gilt* $f'(x_0) = q(x_0)$.

*Beweis.* (i) $\Longrightarrow$ (ii): Wir definieren $q$ auf $I \setminus \{x_0\}$ wie in $(*)$. Aus der Differenzierbarkeit von $f$ in $x_0$ folgt, dass $\lim_{x \to x_0} q(x) = f'(x_0)$. Die durch $q(x_0) := f'(x_0)$ definierte Fortsetzung von $q$ ist daher stetig in $x_0$.
(ii)$\Longrightarrow$(i): Aus der Stetigkeit von $q$ in $x_0$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = q(x_0).$$

□

**Bemerkung:** Es gibt Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber *nirgends* differenzierbar sind! Das erste Beispiel einer solchen Funktion stammt von K. Weierstraß (1861). Siehe dazu z.B. K. Königsberger, Analysis 1, Kapitel 9.11.

**Definition** (**Einseitige Ableitungen**). Gegeben sei $f : I \to \mathbb{C}$. Falls in $x_0 \in I$ zumindest der einseitige Grenzwert

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0-) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0+)$$

existiert, so heißt dieser Grenzwert die *linksseitige* bzw. *rechtsseitige Ableitung* von $f$ in $x_0$, und $f$ heißt in $x_0$ *linksseitig* bzw. *rechtsseitig differenzierbar.*

**Beispiel:** Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ ist im Punkt 0 sowohl linksseitig als auch rechtsseitig differenzierbar mit $f'(0+) = 1$, $f'(0-) = -1$.

## 10.2 Ableitungsregeln

**10.4 Satz.** *Seien* $f, g : I \to \mathbb{C}$ *differenzierbar in* $x \in I$. *Dann sind auch* $f + g$ *und* $fg$ *differenzierbar in* $x$. *Ist* $g$ *nullstellenfrei auf* $I$, *so ist auch* $f/g$ *differenzierbar in* $x$, *und es gelten*

(1) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ***(Produktregel);***

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ ***(Quotientenregel).***

*Beweis.* (1) Für $h \neq 0$ mit $x+h \in I$ haben wir

$$\frac{f(x+h)+g(x+h)-\ f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x)+g'(x).$$

(2) Nach Satz 10.2 ist $g$ stetig in $x$. Wir erhalten daher für $h \to 0$:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-\ f(x)g(x)}{h} = \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \cdot f(x).$$

(3) Wir behandeln zunächst den Spezialfall $f=1$. Mit $h \to 0$ erhalten wir

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x)-g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -g'(x)\cdot\frac{1}{g^2(x)}.$$

Also ist $1/g$ differenzierbar in $x$ mit

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Mit der Produktregel folgt nun, dass auch $\dfrac{f}{g}$ im Punkt $x$ differenzierbar ist mit

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\frac{-\,g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

□

**10.5 Beispiele.** (1) **Polynomfunktionen.** Betrachte

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \ p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x\,+\,a_0 \quad \text{mit Koeffizienten } a_i\in\mathbb{C}.$$

Mit Beispiel 10.1 (2) und obigen Ableitungsregeln folgt, dass $p$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$p'(x) = na_nx^{n-1}+\ \ldots + a_1.$$

(2) **Rationale Funktionen.** Sind $p, q$ Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit komplexen Koeffizienten, so ist die rationale Funktion $R=\frac{p}{q}$ aufgrund der Quotientenregel differenzierbar auf $\{x\in\mathbb{R}: q(x)\neq 0\}$. (Dies ist eine Vereinigung endlich vieler offener Intervalle).

**Beispiel:** $R(x)=\dfrac{1}{x^n}$ (mit $n\in\mathbb{N}$) ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit

$$R'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}}\,.$$

(3) **Ableitung von Sinus und Cosinus.** Für $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$\cos x = \frac{1}{2}\big(e^{ix}+e^{-ix}\big), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\big(e^{ix}-e^{-ix}\big).$$

Mit Beispiel 10.1(3) für die Exponentialfunktion und den Ableitungsregeln folgt, dass der Cosinus und der Sinus auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind mit

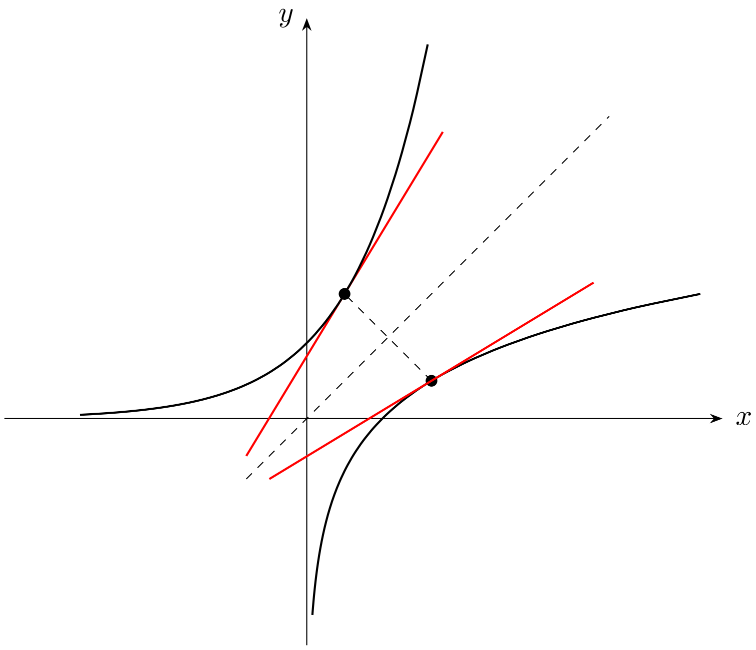
$$\cos'(x) = \frac{1}{2}\big(ie^{ix}-ie^{-ix}\big), \quad \sin'(x) = \frac{1}{2i}\big(ie^{ix}+ie^{-ix}\big).$$

Also: $\boxed{\cos'(x) = -\sin x,\ \sin'(x)=\cos x.}$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist nach Satz 8.8 über die Stetigkeit der Umkehrfunktion auch $f(I)$ ein (echtes!) Intervall, $f : I \to f(I)$ ist bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls stetig. Wir sind nun an Differenzierbarkeitsaussagen interessiert.

**10.6 Satz** (**Ableitung der Umkehrfunktion**). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Ferner sei $f$ differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, und*

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}\,.}$$




*Beweis.* Sei $(y_n) \subseteq f(I) \setminus \{y_0\}$ eine Folge mit $y_n \to y_0 = f(x_0)$. Setze $x_n := f^{-1}(y_n) \in I$. Dann ist $x_n \neq x_0$ (da $f$ bijektiv), und mit der Stetigkeit von $f^{-1}$ folgt $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

□

**Beispiel: Ableitung des Logarithmus.** Der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren, streng monoton wachsenden Exponentialfunktion $\exp$. Wegen $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist Satz 10.6 anwendbar. Wir erhalten, dass $\ln$ auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}\,.$$

**10.7 Satz (Kettenregel).** *Gegeben seien $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{C}$, mit echten Intervallen $I, J$. Die Funktion $f$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$ und $g$ sei differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in $x_0$, und es gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).}$$

*Beweis.* Wir beginnen mit einem naheliegenden ersten Versuch: Wir schreiben für $x \in I$ mit $x \neq x_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Der zweite Faktor konvergiert für $x \to x_0$ gegen $f'(x_0)$. Aber der erste Faktor ist i.A. nicht definiert, weil möglicherweise $f(x) = f(x_0)$ in einer ganzen Umgebung von $x_0$, so dass ein undefinierter Quotient $\frac{0}{0}$ entsteht. Um dieses Problem zu umgehen, arbeiten wir mit der äquivalenten Formulierung der Differenzierbarkeit aus Satz 10.3: Wegen der Differenzierbarkeit von $f$ in $x_0$ gibt es eine in $x_0$ stetige Funktion $q : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - f(x_0) = q(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in I, \quad q(x_0) = f'(x_0).$$

Wegen der Differenzierbarkeit von $g$ in $f(x_0)$ gibt es ferner eine in $y_0 := f(x_0)$ stetige Funktion $r : J \to \mathbb{C}$ mit

$$g(y) - g(y_0) = r(y) \cdot (y - y_0) \text{ für alle } y \in J, \quad r(y_0) = g'(y_0).$$

Zusammen erhalten wir für $x \in I$:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \underbrace{r(f(x)) \cdot q(x)}_{\text{stetig in } x_0} \cdot (x - x_0).$$

Wiederum nach Satz 10.3 folgt hieraus, dass $g \circ f$ an der Stelle $x_0$ differenzierbar ist mit

$$(g \circ f)'(x_0) = r(f(x_0)) \cdot q(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$\square$

**Beispiele.**

(1) Betrachte die **Potenzfunktion** $p_s : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $p_s(x) = x^s$ mit $s \in \mathbb{R}$. Es ist

$$p_s(x) = e^{s \ln x}.$$

Aus der Kettenregel mit $f(x) = s \ln x$ und $g(y) = e^y$ folgt, dass $p_s$ auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit

$$p_s'(x) = se^{s \ln x} \cdot \frac{1}{x} = s\,x^{s-1}.$$

Also: $\boxed{(x^s)' = s\,x^{s-1} \text{ auf } (0, \infty).}$

Insbesondere ist die **Wurzelfunktion** $f(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(2) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in I$. Dann ist auch $e^f = \exp \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x$, und es gilt

$$\big(e^f\big)'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}.$$

Ist sogar $f > 0$ auf $I$, so ist auch die Funktion $\ln f := \ln \circ f$ differenzierbar in $x$, und es gilt

$$(\ln f)'(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**Höhere Ableitungen.**

Betrachte eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ in der Nähe einer Stelle $x_0 \in I$. Wir nehmen an, $f$ sei differenzierbar in einer Umgebung $I \cap U_\epsilon(x_0)$ von $x_0$. Falls die auf $I \cap U_\epsilon(x_0)$ definierte Ableitung $f'$ ebenfalls in $x_0$ differenzierbar ist, so heißt $f$ zweimal differenzierbar in $x_0$. Man schreibt

$$f''(x_0) := \frac{d^2 f}{dx^2}\,(x_0) := \;(f')'(x_0)$$

und nennt $f''(x_0)$ die **2. Ableitung** von $f$ in $x_0$.

Allgemeiner definiert man für $n \in \mathbb{N}_0$ die **n-te Ableitung** (oder: Ableitung der Ordnung $n$) von $f$ in $x_0$ rekursiv durch

$$f^{(0)}(x_0) := f(x_0), \;\; f^{(n)}(x_0) := \big(f^{(n-1)}\big)'(x_0), \quad \text{sofern existent.}$$

Falls alle Ableitungen bis zur Ordnung $n$ von $f$ in $x_0$ existieren, so heißt $f$ $n$-mal differenzierbar in $x_0$. $f$ heißt $n$-mal differenzierbar auf $I$, falls $f$ $n$-mal differenzierbar in jedem $x_0 \in I$ ist.

**Definition.** Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *$n$-mal stetig differenzierbar* auf $I$, falls sie $n$-mal differenzierbar auf $I$ ist und $f^{(n)}$ noch stetig auf $I$ ist. Man schreibt

$$\begin{aligned} C^n(I) &:= \{f : I \to \mathbb{C} \;\; n\text{-mal stetig differenzierbar}\}, \\ C^\infty(I) &:= \{f : I \to \mathbb{C} \;\; \text{beliebig oft stetig differenzierbar}\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \;\; \text{stetig}\} = C(I).$$

Weil Linearkombinationen stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen auf $I$ wieder stetig bzw. differenzierbar sind, sind all diese Räume $\mathbb{C}$-Vektorräume.

**Beispiele:** Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit komplexen Koeffizienten liegen in $C^\infty(\mathbb{R})$, ebenso die Exponentialfunktion $e^x$. Die Potenzfunktionen $p_s$ und der Logarithmus $\ln$ liegen in $C^\infty((0,\infty))$.

## 10.3 Extrema und der Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich reellwertige Funktionen.

**Definition (Extrema einer Funktion).** Gegeben sei eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit (beliebigem) Definitonsbereich $D$. Man sagt, $f$ hat im Punkt $x_0 \in D$ ein

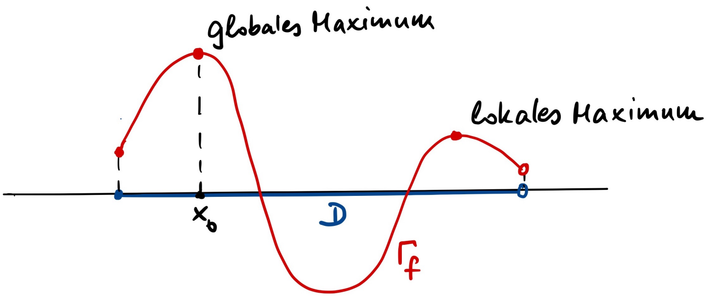
- *globales Maximum*, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
- *lokales Maximum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon.$$

Ein lokales Maximum in $x_0$ heißt *isoliert*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass sogar

$$f(x) < f(x_0) \text{ für alle } x \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon.$$

Analog definiert man ein *globales* bzw. *lokales Minimum* in $x_0$. Maxima und Minima von $f$ heißen auch *Extrema* von $f$. Eine Stelle, an der $f$ ein Extremum annimmt, heißt *Extremalstelle* von $f$.

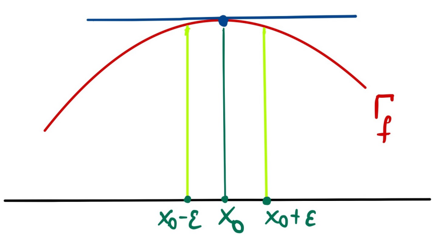



Für differenzierbare Funktionen auf Intervallen gibt es ein wichtiges und nützliches Kriterium bei der Suche nach Extrema:

**10.8 Satz (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema).** *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$. Angenommen, $f$ hat in $x_0$ ein lokales Extremum. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

*Beweis.* Wir nehmen an, $f$ habe in $x_0$ ein lokales Maximum. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass die Umgebung $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ganz im Intervall $(a, b)$ enthalten ist, und so, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \epsilon) \\ \geq 0 & \text{für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0). \end{cases}$$

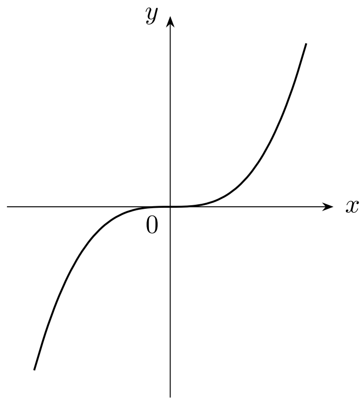



Mit $x \to x_0$ folgt hieraus, dass $f'(x_0)$ sowohl $\leq 0$ als auch $\geq 0$ ist. Daher muss $f'(x_0) = 0$ sein.
Für ein lokales Minimum argumentiert man analog.

□

**Achtung:** Das notwendige Kriterium 10.8 ist **nicht hinreichend** für lokale Extrema!

**Beispiel:** $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Es ist $f'(x) = 3x^2$ und daher $f'(0) = 0$. Aber $x = 0$ ist keine (lokale) Extremalstelle von $f$.




**Vorgehen bei der Suche nach Extrema:**

(1) Wir betrachten zunächst den Fall einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

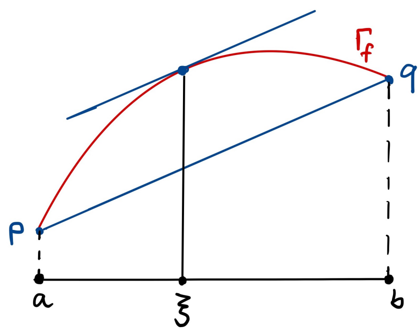
Da der Definitionsbereich ein kompaktes Intervall ist, und da $f$ nach Satz 10.2 auch stetig auf $[a, b]$ ist, nimmt $f$ nach dem Satz vom Maximum und Minimum 8.7 ein globales Maximum und ein globales Minimum auf $[a, b]$ an. Kandidaten für die entsprechenden Extremalstellen sind:

1. Punkte $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$;
2. Die Randpunkte $a$ und $b$.

(2) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem allgemeinen, evtl. unbeschränkten (echten) Intervall $I$, so muss man bei der Untersuchung von $f$ auf globale Extrema ebenfalls das Verhalten von $f$ am Rand von $I$ studieren. So muss man z.B. im Fall $I = (a, \infty)$ das Verhalten von $f$ für $x \to a$ und für $x \to \infty$ untersuchen.

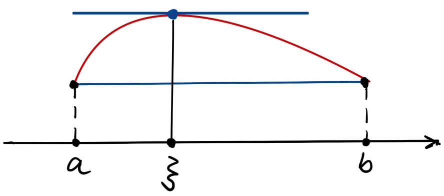
**10.9 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, kurz MWS).** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $(a, b)$. Dann existiert eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)\,.}$$




***Beachte:*** *Der Quotient auf der linken Seite ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $p = (a, f(a))$ und $q = (b, f(b))$.*

***Spezialfall (Satz von Rolle):*** *Ist zusätzlich $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit* $f'(\xi) = 0$.



*Beweis.* **Schritt (I):** Beweis des Satzes von Rolle.
Da $f$ stetig auf $[a,b]$ ist, nimmt $f$ auf $[a,b]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum an. Falls beide Stellen am Rand von $[a,b]$ liegen, so muss wegen $f(a) = f(b)$ die Funktion $f$ konstant sein, und es folgt $f' = 0$ auf ganz $(a,b)$. Wir sind also fertig. Falls aber wenigstens eine der beiden (globalen) Extemalstellen kein Randpunkt von $[a,b]$ ist, so nimmt $f$ ein Extremum in einem inneren Punkt $\xi \in (a,b)$ an. Mit dem notwendigen Kriterium aus Satz 10.8 folgt, dass $f'(\xi) = 0$ sein muss.
**Schritt (II):** Reduktion des MWS auf den Satz von Rolle.
Wir betrachten auf $[a,b]$ die Funktion

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a).$$

Dabei haben wir von $f$ eine lineare Funktion subtrahiert, deren Steigung mit derjenigen der Sekante durch $p$ und $q$ übereinstimmt. Nun ist $g(a) = g(b) = 0$, und $g$ erfüllt daher die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Mit diesem folgt die Existenz einer Stelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 \;=\; g'(\xi) \;=\; f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Dies beweist den MWS. □

**Warnung:** Der Mittelwertsatz gilt **nicht** für komplexwertige Funktionen! Für eine stetige, auf $(a,b)$ differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt der Mittelwertsatz zwar getrennt für $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$, aber evtl. nur mit unterschiedlichen Zwischenstellen.

Der Mittelwertsatz hat zahlreiche Anwendungen und gehört daher zu den wichtigsten Sätzen der Analysis einer reellen Variablen. Eine der Anwendungen betrifft das Monotonieverhalten differenzierbarer reeller Funktionen. Dazu kommen wir als Nächstes.

**10.10 Satz (Monotoniekriterium).** *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $-\infty \le a < b \le \infty$. Dann gelten:*

(1) $f' > 0$ *auf* $(a,b)$ $\Longrightarrow$ $f$ *ist streng monoton wachsend auf* $(a,b)$.
(2) $f' < 0$ *auf* $(a,b)$ $\Longrightarrow$ $f$ *ist streng monoton fallend auf* $(a,b)$.
(3) $f' \ge 0$ *auf* $(a,b)$ $\Longleftrightarrow$ $f$ *ist monoton wachsend auf* $(a,b)$.
(4) $f' \le 0$ *auf* $(a,b)$ $\Longleftrightarrow$ $f$ *ist monoton fallend auf* $(a,b)$.
(5) $f' = 0$ *auf* $(a,b)$ $\Longleftrightarrow$ $f$ *ist konstant auf* $(a,b)$.

*Ist $f$ ferner stetig auf ganz $[a,b]$, so gelten alle rechtsstehenden Aussagen auf ganz $[a,b]$.*

*Beweis.* Betrachte beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a < x < y < b$ bzw. mit $a \le x < y \le b$, falls $f$ stetig auf $[a,b]$. Dann ist der Mittelwertsatz für $f$ auf dem Intervall $[x,y]$ anwendbar. Er liefert eine (von $x$ und $y$ abhängige) Stelle $\xi \in (x,y)$ mit

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;=\; f'(\xi).$$

Wir betrachten nun die einzelnen Fälle: In Teil (1) ist $f'(\xi) > 0$ und daher $f(x) < f(y)$. Also ist $f$ streng monoton wachsend auf $(a,b)$ bzw. auf $[a,b]$. Teil (2) und die Implikationen „$\Rightarrow$" in (3) und (4) beweist man analog.

Zur Implikation „$\Leftarrow$" in (3): Sei $x \in (a,b)$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Analog beweist man die Implikation „$\Leftarrow$" in Teil (4). Teil (5) schließlich ist unmittelbare Konsequenz von (3) und (4). $\square$

**Achtung:** In den Aussagen (1) und (2) des Monotoniekriteriums gilt die umgekehrte Implikation „$\Leftarrow$" **nicht**!
**Beispiel:** Die Potenzfunktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$.

**Zusatz:** Aussage (5) des Monotoniekriteriums gilt auch für komplexwertige differenzierbare Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{C}$. Dazu schreibt man

$$f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f \quad \text{ mit } \mathrm{Re} f := \frac{1}{2}(f + \overline{f}\,), \quad \mathrm{Im} f := \frac{1}{2i}(f - \overline{f}\,).$$

Mit $f$ ist auch $\overline{f}$ differenzierbar auf $(a,b)$ mit $(\overline{f})' = \overline{f'}$. Also sind auch die reellwertigen Funktionen $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ differenzierbar auf $(a,b)$, und wir haben auf $(a,b)$ die Äquivalenzen

$$f' = 0 \iff (\mathrm{Re} f)' = 0 \wedge (\mathrm{Im} f)' = 0 \iff \mathrm{Re} f = \text{konst.} \wedge \mathrm{Im} f = \text{ konst.} \iff f = \text{ konst.}$$

**10.11 Korollar.** *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar und es gebe eine Konstante $a \in \mathbb{C}$, so dass*

$$f' = af \quad \textit{auf } \mathbb{R}.$$

*Dann gilt*

$$f(x) = c \cdot e^{ax} \quad \textit{mit } c = f(0).$$

*Beweis.* Wir wenden einen Trick an: Wir betrachten die Funktion $g(x) := e^{-ax} f(x)$ und zeigen, dass $g$ konstant auf $\mathbb{R}$ ist. In der Tat ist (gemäß Produktregel) $g$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$g'(x) = -ae^{-ax} f(x) + e^{-ax} f'(x) \; = \; 0.$$

Mit dem Zusatz zu Teil (5) des Monotoniekriteriums folgt, dass $g = \mathit{konst} =: c$ auf $\mathbb{R}$. Also ist $f(x) = ce^{ax}$ auf $\mathbb{R}$, und die Konstante $c$ erhalten wir, indem wir $x = 0$ setzen. $\square$

**Bemerkung:** Die Gleichung $f' = af$ ist eine sogenannte lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Mit Differentialgleichungen werden wir uns ausführlich in der Analysis 2 beschäftigen.

**10.12 Satz (Hinreichendes Kriterium für lokale Extema).** *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und im Punkt $x_0 \in (a,b)$ zweimal differenzierbar. Dabei gelte*

$$f'(x_0) = 0 \textit{ und } f''(x_0) > 0.$$

*Dann besitzt $f$ in $x_0$ ein isoliertes lokales Minimum.*
*Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so besitzt $f$ in $x_0$ ein isoliertes lokales Maximum.*

**Vorsicht:** Die umgekehrte Richtung in diesen Aussagen gilt im Allgemeinen nicht!
Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^4$ besitzt in $x_0 = 0$ ein isoliertes lokales Minimum. Es ist aber $f'(0) = f''(0) = 0$.

*Beweis des Satzes.* Wir beweisen die Aussage für ein Minimum. Aus $f''(x_0) > 0$ folgt mit der Definition der Ableitung, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass auch

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \text{ mit } x \neq x_0.$$

Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt hieraus, dass

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \epsilon), \\ < 0 & \text{für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0). \end{cases}$$

Nach dem Monotoniekriterium ist $f$ also streng monoton steigend auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$ und streng monoton fallend auf $(x_0 - \epsilon, x_0)$. Im Punkt $x_0$ liegt daher ein isoliertes lokales Minimum vor. □

**10.13 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz).** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a, b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass $g(a) \neq g(b)$. Angenommen, es sei $g(a) = g(b)$. Dann folgt mit dem Satz von Rolle die Existenz einer Stelle $x \in (a, b)$ mit $g'(x) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Nun betrachten wir die Funktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(x) - g(a)\big).$$

Sie erfüllt $F(a) = f(a) = F(b)$. Wieder mit dem Satz von Rolle folgt die Existenz einer Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi).$$

Umstellen liefert die Behauptung. □

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz ist die Grundlage für die Berechnung (und Sicherung der Existenz!) von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei $f$ und $g$ differenzierbare Funktionen auf einem offenen Intervall $(a, b)$ sind, die für $x \to a$ (oder $x \to b$) entweder beide gegen 0 oder beide gegen $\pm\infty$ konvergieren. Ein Beispiel ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

**10.14 Satz (Regel von L'Hospital).** *Seien* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$, *wobei* $-\infty \leq a < b \leq \infty$. *(Es ist also auch* $a = -\infty$, $b = \infty$ *erlaubt). Ferner sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $f(x) \to 0$ *und* $g(x) \to 0$ *für* $x \downarrow a$, *oder*

(ii) $f(x) \to \pm\infty$ *und* $g(x) \to \pm\infty$ *für* $x \downarrow a$.

*Dann gilt*

$$\boxed{\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,}$$

***sofern der Grenzwert rechts in*** $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ***existiert.***
*Analoge Aussagen gelten für* $x \uparrow b$.

**Bemerkungen:**

(1) Der Marquis de L'Hospital (1661–1704), nach dem diese Regel benannt ist, hat sie unter seinem Namen publiziert, aber nicht selbst entdeckt. Er hat sie Johann Bernoulli abgekauft!

(2) Oft hat man es mit einer Funktion $h = f/g$ zu tun, die auf einer *punktierten Umgebung* $(a - \epsilon, a + \epsilon) \setminus \{a\}$ definiert ist. In diesem Fall gilt:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = c \iff \lim_{x \downarrow x_0} h(x) = c \wedge \lim_{x \uparrow x_0} h(x) = c.$$

(Siehe Blatt 10, Aufgabe H5).

**Beispiel:** Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{n\,x^{n-1}}{m\,x^{m-1}} = \frac{n}{m}.$$

Dabei ist die Existenz des ersten Grenzwerts (links- und rechtsseitig) durch die Existenz des zweiten Grenzwertes gesichert. Beachte dabei, dass $mx^{m-1} \neq 0$ für alle $x$ nahe 1, und daher die Regel von L'Hospital anwendbar ist.

*Beweis der Regel von L'Hospital.* Wir müssen unterschiedliche Stuationen betrachten.
**Situation I:** $x \downarrow a$ mit $a \in \mathbb{R}$, d.h. $a \neq -\infty$ (analog $x \uparrow b$ mit $b \in \mathbb{R}$):
Wir setzen

$$L := \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Wir betrachten nun die beiden im Satz angegebenen Fälle (i) und (ii).

**Fall (i):** In diesem Fall sind $f$ und $g$ stetig fortsetzbar auf $[a, b)$ mit $f(a) = g(a) = 0$. Sei nun $x \in (a, b)$ beliebig. Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf das Intervall $[a, x]$ an. Er liefert, dass $g(x) \neq 0$ sowie die Existenz einer Stelle $\xi_x \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\,.$$

Im Limes $x \downarrow a$ gilt auch $\xi_x \downarrow a$, und daher konvergiert der Ausdruck auf der rechten Seite für $x \downarrow a$ gegen $L$.

**Fall (ii):** In diessem Fall betrachten wir (zunächst noch beliebige) $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a < x < y < b$. Dann ist $g(x) \neq g(y)$ nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, und wir können schreiben:

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} .$$

Wir halten nun $y$ fest. Der zweite Faktor auf der rechten Seite konvergiert dann für $x \downarrow a$ gegen $\frac{1-0}{1-0} = 1$. Der erste Faktor auf der rechten Seite von Gleichung (1) lässt sich, wiederum nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, schreiben als

$$(2) \qquad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle $\xi \in (x, y)$.
Wir betrachten nun zunächst den Fall $-\infty \leq L < \infty$.
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > L$ beliebig. Nach Definition von $L$ existiert dann ein $\delta > 0$, so dass

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} < \lambda \quad \text{für alle } t \in (a, a + \delta).$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a < x < y < a + \delta$ folgt weiter aus Gleichung (2), dass

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \lambda .$$

Unsere vorherigen Beobachtungen zur Gleichung (1) für $x \downarrow a$ zeigen, dass daher für genügend kleines $\delta' > 0$ mit $\delta' < \delta$ auch noch

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{f(y)} < \lambda \quad \text{für alle } x \in (a, a + \delta').$$

Falls $L = -\infty$, so folgt hieraus sofort : $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, und wir sind fertig.

Nun betrachten wir den Fall $-\infty < L \leq \infty$. In diesem Fall zeigt man analog, dass zu beliebigem $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu < L$ ein $\delta'' > 0$ mit $\delta'' < \delta$ existiert, so dass

$$(4) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} > \mu \quad \text{für alle } x \in (a, a + \delta'').$$

Falls $L = \infty$, so folgt hieraus $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, und wir sind wieder fertig.

Im Fall $-\infty < L < \infty$ schließlich folgt aus (3) und (4) zusammen, dass $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, und wir sind ebenfalls fertig.

**Situation II:** $b = \infty$ und $x \to \infty$ (analog $a = -\infty$ und $x \to -\infty$):
Diese Situation können wir durch Substitution $y = \frac{1}{x}$ auf die Situation I zurückführen. Mit der Regel von L'Hospital für $y \downarrow 0$ erhalten wir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{y \downarrow 0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

wobei der Grenzwert links existiert, sofern derjenige rechts existiert. □

**Weitere Beispiele:**

(1) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

Dabei ist die Existenz des ersten Grenzwerts durch die Existenz des zweiten gesichert.

(2) Manchmal muss man die Regel von L'Hospital mehrfach anwenden. Beispiel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Wieder ist die Existenz des Grenzwerts „von hinten nach vorne“ gesichert.

# Kapitel 11

# Trigonometrische Funktionen, Teil 2

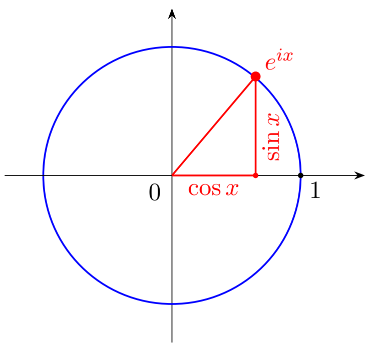
## 11.1 Nullstellen und Periodizität von Sinus und Cosinus

Wir erinnern an den Cosinus und Sinus auf $\mathbb{C}$, die wir in Kapitel 9 eingeführt haben:

$$\cos z = \frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big).$$

Ferner haben wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \operatorname{Re}\big(e^{ix}\big), \quad \sin x = \operatorname{Im}\big(e^{ix}\big).$$
$$|e^{ix}| = 1, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$




Noch ist unklar, welche Punkte auf dem Einheiskreis welchen Argumenten der Funktion $x \mapsto e^{ix}$ auf $\mathbb{R}$ entsprechen. Um das herauszufinden, beginnen wir mit einer genaueren Untersuchung von Sinus und Cosinus auf $\mathbb{R}$.

**11.1 Lemma** (**Einschließungslemma**).

(1) *Für alle* $x \in [0,2]$ *gilt*

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x.$$

*Insbesondere ist* $\sin x > 0$ *für* $0 < x \le 2$.

(2) *Die Funktion* $x \mapsto \cos x$ *ist auf dem Intervall* $[0,2] \subseteq \mathbb{R}$ *streng monoton fallend mit*

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

*Beweis.* (1) Fixiere $x \in [0,2]$. Aufgrund der Potenzreihendarstellung des Sinus gilt

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=:a_n} = x - \frac{x^3}{6} \pm \dots$$

Dabei ist $a_n \ge 0$. Ausserdem ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend, denn für $n \ge 1$ erhalten wir die Abschätzung

$$a_n = \frac{x^2}{2n(2n+1)} \cdot a_{n-1} \le \frac{x^2}{6} a_{n-1} \le a_{n-1}.$$

Wir können daher das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen anwenden. Es besagt insbesondere, dass der Reihenwert $\sin x$ zwischen je zwei aufeinanderliegenden Partialsummen liegt. Dies liefert die behauptete Einschachtelung.

(2) Die Einschachtelung beweist man analog zu der für den Sinus. Es bleibt die strenge Monotonie von $\cos x$ auf $[0,2]$ zu zeigen. Das machen wir mit dem Monotoniekriterium 10.10: $\cos x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und für $x \in (0,2)$ gilt mit Teil (1):

$$\cos'(x) \;=\; -\sin x \;<\; 0.$$

Da der Cosinus auf $[0,2]$ stetig ist, liefert das Monotoniekriterium, dass er auf ganz $[0,2]$ streng monoton fällt. □

**11.2 Satz.** *Die Funktion* $x \mapsto \cos x$ *hat im Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle* $\xi$. *Die Zahl* $\pi := 2\xi$ *heißt* ***Kreiszahl***.

*Beweis.* Der Cosinus ist stetig auf $[0,2]$ mit

$$\cos 0 = 1\,, \quad \cos 2 \;\leq\; 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} < 0;$$

dabei haben wir das Einschließungslemma für den Cosinus verwendet. Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass der Cosinus mindestens eine Nullstelle $\xi \in [0,2]$ besitzt. Aufgrund der strengen Monotonie des Cosinus auf $[0,2]$ ist diese auch die einzige. □

**Bemerkung:** Ferdinand Lindemann hat 1882 bewiesen, dass $\pi$ transzendent ist. Zur näherungsweisen Berechnung von $\pi$ gibt es z.B. ein Kapitel in Köngisberger, Analysis I. Man sollte mindestens 2, aber noch besser die ersten 4 gültigen Nachkommastellen kennen: $\pi = 3,1415....$

Wir können nun eine ganze Reihe von Konsequenzen aus dem obigen Satz ziehen. Mit der Eulerschen Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt aus $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, dass $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Denn wir wissen ja aus dem Einschließungslemma, dass $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ist. Also gilt

$$e^{i\pi/2} \;=\; \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \;+\; i\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \;=\; i\,.$$

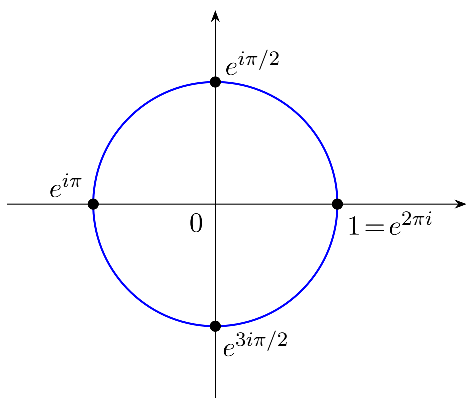
Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergibt sich daraus weiter:

$$e^{i\pi} \;=\; i^2 \;=\; -1$$

sowie

$$e^{3i\pi/2} = i^3 \;=\; -i\,, \quad e^{2\pi i} \;=\; i^4 \;=\; 1\,.$$

| $x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| $e^{ix}$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ |
| $\cos x$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\sin x$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |



Wegen $e^{2\pi i} = 1$ erhalten wir aus der Funktionalgleichung

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

**Definition.** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ heißt *p-periodisch* mit Periode $p \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, falls

$$f(x+p) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

**Beachte:** Ist $p$ eine Periode von $f$, so ist natürlich auch jede Zahl $kp$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine Periode von $f$. Man ist oft an betragsmässig möglichst kleinen Perioden interessiert.

**11.3 Satz (Periodizität der komplexen Exponentialfunktion).** *Die Exponentialfunktion ist $2\pi i$-periodisch auf $\mathbb{C}$, d.h. es gilt*

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}: \; e^{z+2\pi i} = e^z.}$$

**11.4 Korollar (Periodizität von Sinus und Cosinus).** *Der Cosinus und der Sinus sind $2\pi$-periodisch auf $\mathbb{C}$, d.h.*

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}: \; \cos(z+2\pi) = \cos z\,; \quad \sin(z+2\pi) = \sin z\,.}$$

*Ferner gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(z+\pi) = -\cos z\,; & \sin(z+\pi) = -\sin z\,; \\ \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z\,; & \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z\,. \end{array}}$$

*Beweis.* Aus der Periodizität der Exponentialfunktion folgt

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i\,(z+2\pi)} + e^{-i\,(z+2\pi)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z.$$

Analog erhält man die $2\pi$-Periodizität des Sinus. Die restlichen Formeln beweist man analog, z.B.

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+\pi/2)} + e^{-i(z+\pi/2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{i\pi/2} + e^{iz}e^{-i\pi/2}\right) = \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right) = -\sin z.$$

□

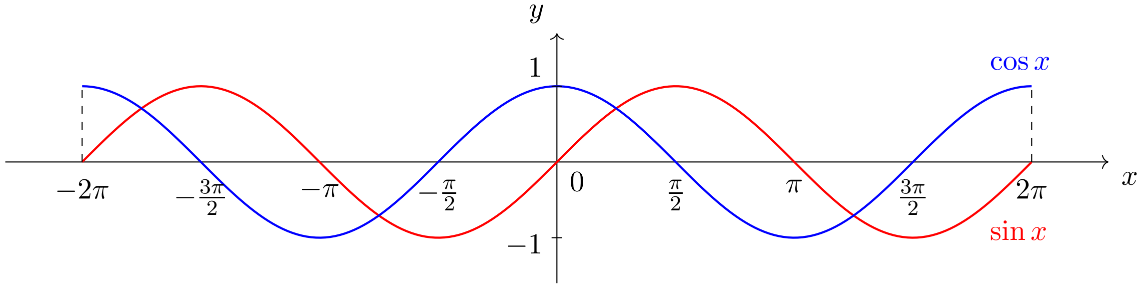
Als nächstes untersuchen wir Cosinus und Sinus auf Nullstellen. Dabei beschränken wir uns auf reelle Argumente.

**11.5 Satz.** (1) $\cos x$ *hat auf* $\mathbb{R}$ *genau die Nullstellen* $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(2) $\sin x$ *hat auf* $\mathbb{R}$ *genau die Nullstellen* $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*Beweis.* (1) Wegen $\cos(-x) = \cos x$ und der Definition von $\pi$ folgt, dass der Cosinus im halboffenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nur $\frac{\pi}{2}$ als Nullstelle hat. Aus der Identitat $\cos(x+\pi) = -\cos x$ folgt weiter, dass der Cosinus im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ genau die Nullstellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ hat. Zusammmen mit der $2\pi$-Periodizität des Cosinus liefert das die Behauptung.

Teil (2) folgt sofort aufgrund der Indentität $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ aus Teil (1). □




Weil $\cos(0) > 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ergibt sich aus der Lage der Nullstellen von Sinus und Cosinus die folgende Konsequenz:

**11.6 Korollar.** *Es gilt*

$$\sin x > 0 \quad \forall x \in (0, \pi),$$
$$\cos x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wir wissen, dass Sinus und Cosinus $2\pi$-periodisch auf $\mathbb{R}$ sind, aber es ist noch nicht klar, ob es nicht noch kleinere positive Perioden als $2\pi$ gibt. Dies beantwortet der folgende Satz.

**11.7 Satz.** (1) *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $e^z = 1 \iff z \in \{2k\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $2\pi$ *ist die kleinste positive Periode von* $\sin x$ *und* $\cos x$ *auf* $\mathbb{R}$.

*Beweis.* (1) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt (mit der Funktionalgleichung von exp):

$$e^{2k\pi i} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1.$$

Sei umgekehrt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ mit $e^z = 1$. Dann folgt

$$1 = \left|e^z\right| = \left|e^{x+iy}\right| = e^x \cdot \left|e^{iy}\right| = e^x.$$

Weil die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ injektiv ist, folgt hieraus $x = 0$. Dies wiederum impliziert

$$1 = e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y\,.$$

Vergleich der Real-und Imaginärteile liefert: $\cos y = 1 \wedge \sin y = 0$. Mit Satz 11.5 folgt hieraus: $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, $k$ gerade.

(2) Angenommen der Cosinus (und damit wegen Korollar 11.4 auch der Sinus) hat eine Periode $p$ mit $0 < p < 2\pi$. Dann folgt

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

im Widerspruch zu Teil (1) des Satzes. □

## 11.2 Tangens und Cotangens

**Definition.** Der Tangens und der Cotangens (mit reellen Argumenten) sind definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Der Tangens und der Cotangens sind (gemäß Quotientenregel) differenzierbar auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich. Beide sind ungerade und haben wegen Korollar 11.4 die Periode $\pi$, also

$$\tan(x+\pi) = \tan x, \quad \cot(x+\pi) = \cot x.$$

Ferner gilt:

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Wir beschränken uns daher bei der weiteren Untersuchung auf den Tangens. Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Nach dem Monotoniekriterium ist der Tangens daher auf seinem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend. Ferner gilt

$$\tan 0 = 0; \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

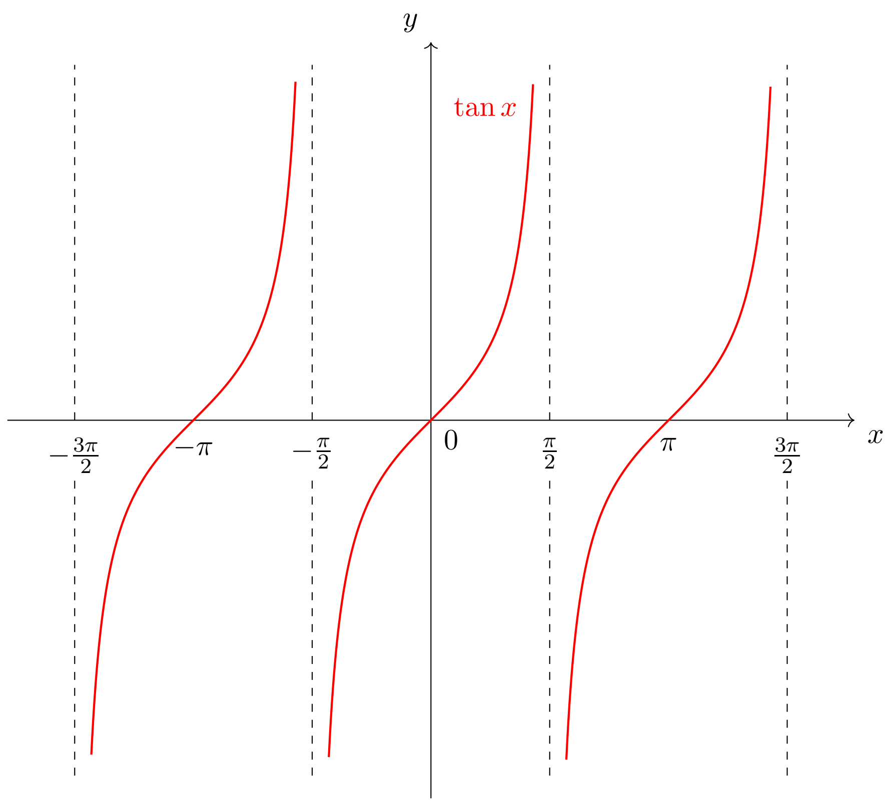
Letzteres folgt (wieder mit Korollar 11.4) aus

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Wir betrachten noch das Verhalten des Tangens in der Nähe seiner Definitionslücken; weil er ungerade und $\pi$-periodisch ist, genügt es dabei, den Grenzwert $x \uparrow \frac{\pi}{2}$ zu betrachten. Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\cos x > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty.$$

Es folgt $\lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz ist daher $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ bijektiv. Sein Umkehrfunktion betrachten wir im nächsten Abschnitt.



## 11.3 Die Arcus-Funktionen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen auf geeigneten Definitionsintervallen.

(1) Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

differenzierbar, streng monoton und bijektiv ist. Die Umkehrfunktion

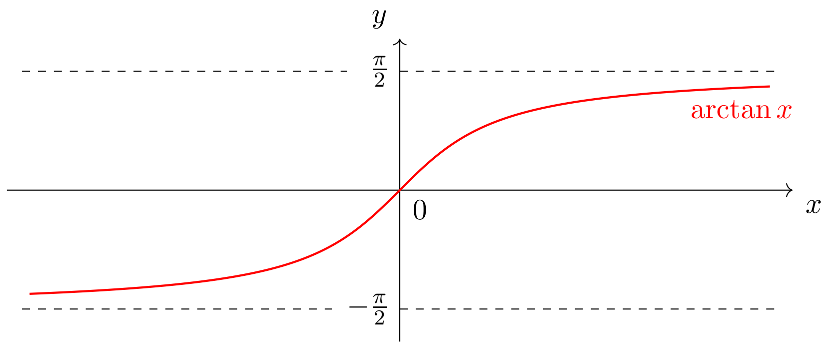
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

heißt der *Arcus-Tangens*. Er ist ebenfalls bijektiv, streng monoton wachsend und nach Satz 10.6 über die Ableitung der Umkehrfunktion auch differenzierbar mit

$$\arctan'(y) \;=\; \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2 x \quad \text{ in } \; y = \tan x.$$

Wegen $\cos^2 x\,(1+\tan^2 x) = 1$ folgt, dass

$$\arctan'(y) \;=\; \frac{1}{1+y^2}\,, \quad y \in \mathbb{R}.$$




(2) Die Umkehrung des Sinus wird in den Übungen behandelt. Dort wird gezeigt, dass

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

differenzierbar, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

heißt der *Arcus-Sinus*. Seine Ableitung wird in den Übungen berechnet.

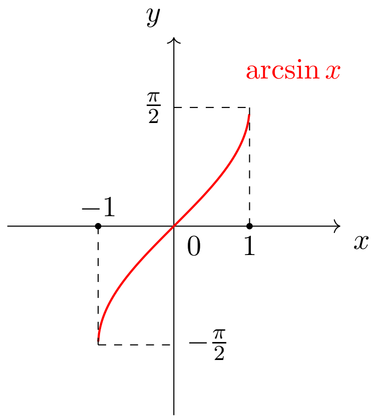
(3) Analog ist auch

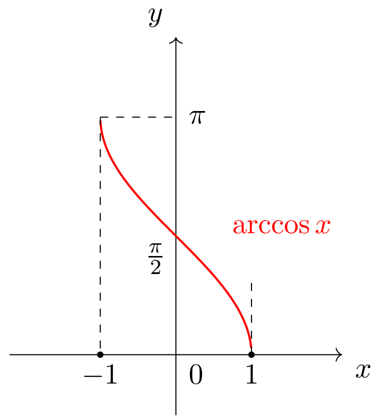
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

differenzierbar, streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

heißt der *Arcus-Cosinus*.




## 11.4 Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt werden wir insbesondere sehen, dass jede Zahl auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ eine Darstellung der Form $z = e^{ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ hat, dass also die Abbildung

$$x \mapsto e^{ix}, \quad \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

surjektiv ist. Wir zeigen sogar noch mehr:

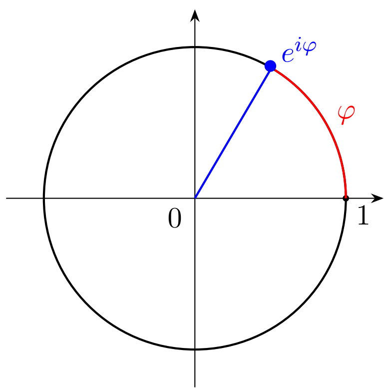
**11.8 Satz.** *Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist darstellbar als*

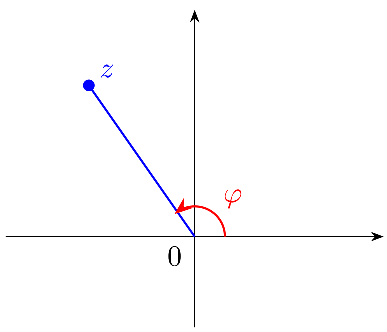
$$\boxed{z \;=\; re^{i\varphi} \;\; \textit{mit} \;\; r = |z| \geq 0, \;\; \varphi \in \mathbb{R}.}$$

*Für $z \neq 0$ ist das sogenannte* Argument *$\varphi$ von $z$ eindeutig bestimmt bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi$.*

Jedes Paar $(r, \varphi)$ mit $z = re^{i\varphi}$ heißt *Polarkoordinaten* von $z$. Üblicherweise legt man fest, dass $\varphi \in [0, 2\pi)$ oder $\varphi \in [-\pi, \pi)$.

**Bemerkung:** Für $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist $\varphi$ die Länge des Einheitskreisbogens von 1 bis $z$. Daher heißt $\varphi$ auch der *Winkel* zwischen 1 und $z$. Um diesen Sachverhalt zu beweisen, muss man aber wissen, wie die Länge einer Kurve in $\mathbb{C}$ definiert ist, und wie man sie berechnen kann. Dies ist Stoff des zweiten Semesters. Wir werden uns den Sachverhalt aber in den Übungen durch eine Approximation plausibel machen.



*Beweis des Satzes.* Im Fall $z = 0$ ist $r = 0$ und $\varphi$ beliebig wählbar. Sei nun $z \neq 0$. Wir setzen $r := |z| > 0$, $w := \frac{z}{r}$. Dann ist $|w| = 1$. Wir schreiben $w = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere $x^2 + y^2 = 1$ und daher $-1 \leq x \leq 1$. Setze $\varphi := \operatorname{arccos} x \in [0, \pi]$. Nun benötigen wir eine Fallunterscheidung:

**1. Fall:** $y \geq 0$. Wegen $\sin\varphi \geq 0$ folgt dann

$$y \;=\; \sqrt{1 - x^2} \;=\; \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \;=\; \sin\varphi.$$

Also ist $w = e^{i\varphi}$ und damit $z = re^{i\varphi}$.

**2. Fall:** $y < 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$y \;=\; -\sqrt{1 - x^2} \;=\; -\sin\varphi \;=\; \sin(-\varphi).$$

Also ist $z = re^{-i\varphi}$.

**Zur Eindeutigkeit:** Sei $z = re^{i\varphi} = re^{i\psi}$ mit $r > 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann folgt $e^{i(\varphi - \psi)} = 1$. Nach Satz 11.3 ist das äquivalent zu $\varphi - \psi \in 2\pi\mathbb{Z}$. $\square$

Mit Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation komplexer Zahlen schön veranschaulichen:

$$z = re^{i\varphi},\; w = se^{i\psi} \;\Longrightarrow\; zw \;=\; rs\, e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Man multipliziert also die Beträge, und addiert die Argumente (modulo $2\pi$).

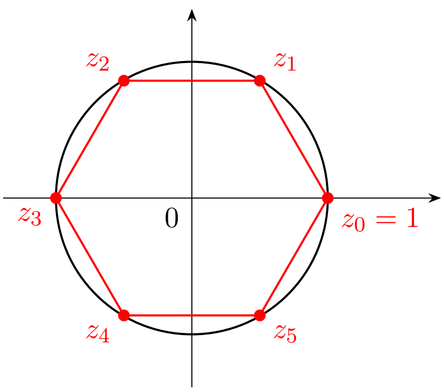
Wir beenden diesen Abschnitt mit einer weiteren wichtigen Anwendung der Polarkoordinaten.

**11.9 Satz.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau die $n$ Lösungen*

$$z_k \;=\; e^{2k\pi i/n}, \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

*Diese heißen die **n-ten Einheitswurzeln**.*

*Beweis.* Es ist $z_k^n \;=\; e^{2k\pi i} \;=\; 1$, das heißt jedes $z_k$ ist Lösung der Gleichung. Ferner ist $z_k \neq z_l$ für $k \neq l$ aufgrund von Satz 11.7. Und weil $p(z) = z^n - 1$ ein Polynom vom Grad $n$ ist, gibt es gemäß Korollar 5.8 höchstens $n$ Lösungen. $\square$




Die $n$-ten Einheitswurzeln bilden die Ecken eines regelmäßigen $n$-Ecks.

Im Bild: $n = 6$.

# Kapitel 12

# Gleichmäßige Konvergenz

## 12.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Sei $D$ eine (beliebige) Menge und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $D$.

**Definition.** Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* auf $D$ gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{für jedes } x \in D.$$

**Also:** Die Folge $(f_n)$ konvergiert genau dann punktweise auf $D$ gegen $f$, wenn gilt:
Zu jedem $x \in D$ und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $N(x) = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

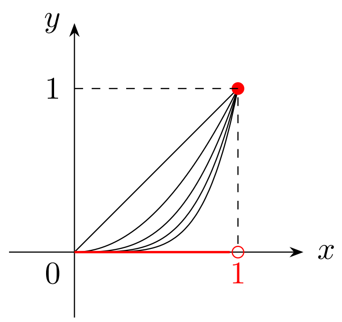
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(x).$$

Eine wichtige Frage in einer solchen Situation ist: Welche Eigenschaften der Funktionen $f_n$, wie z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, übertragen sich auf die Grenzfunktion $f$?

**12.1 Beispiel.** $f_n(x) = x^n$ auf $D = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Alle $f_n$ sind stetig (und sogar differenzierbar) auf $[0, 1]$, aber die Grenzfunktion $f$ ist unstetig in $x = 1$.



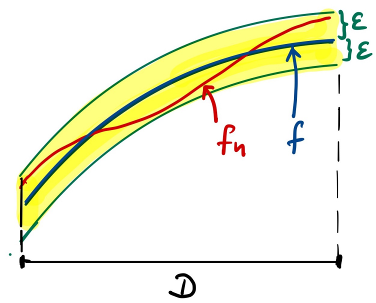

Damit sich die Stetigkeit der Funktionen $f_n$ auf die Grenzfunktion überträgt, reicht punktweise Konvergenz also nicht aus. Man muß mit einem stärkeren Konvergenzbegriff arbeiten, den wir nun einführen.

**Definition.** Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiert *gleichmäßig* auf $D$ gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in D.$$

Der Index $N$ ist dabei zwar abhängig von $\epsilon$, aber unabhängig von $x \in D$ wählbar.

**Anschaulich:** Die $f_n$ mit $n \geq N$ bleiben im Schlauch vom Radius $\epsilon$ um $f$.




**Beachte:**

(1) Gleichmäßige Konvergenz auf $D$ impliziert punktweise Konvergenz auf $D$.

(2) Die Folge $(f_n)$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $D$ gegen $f$, wenn

$$(*) \qquad \boxed{\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.}$$

**Definition.** Für ein Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ definiert man die **Supremumsnorm** von $f$ (auf $D$) als

$$\boxed{\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty,D} := \sup_{x\in D} |f(x)|}$$

Offenbar gilt

$$\|f\|_\infty < \infty \iff f \text{ ist beschränkt.}$$

Wir betrachten nun den Raum

$$B(D) := \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ ist beschränkt}\}.$$

Dies ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

**Eigenschaften der Supremumsnorm:** Seien $f, g \in B(D)$. Dann gilt

(1) $\|f\|_\infty \geq 0$.

(2) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ auf $D$, d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in D$.

(3) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

(4) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Dabei folgt Ungleichung (5) aus

$$\forall x \in D : |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g_\infty.$$

Die Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ auf $D$ ist daher eine *Norm* auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $B(D)$ im Sinne der folgenden Definition.

**Definition.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine *Norm* auf $V$ ist eine Abbildung

$$\|\,.\,\| : V \to [0, \infty)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0.$ *(Definitheit)*

(ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$. *(Homogenität)*

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. *(Dreiecksungleichung)*

**Weitere Beispiele für Normen:**

1. Auf $V = \mathbb{K}$: $\|x\| = |x|$.
2. Auf $V = \mathbb{R}^n$: $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

   Dies ist die sogenannten *Euklidische Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$. Dass sie tatsächlich alle Normeigenschaften erfüllt, wird in der Analysis II (und in der Linearen Algebra) bewiesen.

**Bemerkung:** Mit einer Norm läßt sich in $V$ ein Abstand definieren durch

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

Die Abbildung $d : V \times V \to [0, \infty)$ ist eine sogenannte *Metrik* und hat ebenfalls schöne Eigenschaften. Über Normen und Metriken werden wir in der Analysis II mehr erfahren.

Wir kehren nun zurück zur Betrachtung von Funktionen auf $D$ und der Supremumsnorm. Aus der Charakterisierung $(*)$ der gleichmäßigen Konvergenz erhalten wir:

**12.2 Korollar.** *Für Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f : D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(1) *$(f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf $D$ gegen $f$.*

(2) *$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.*

**12.3 Beispiele.** (1) Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \text{auf } D = \mathbb{R}.$$

Wegen $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen 0 (d.h. gegen die Nullfunktion).

(2) Wir greifen nochmals Beispiel 12.1 auf. Wir wissen, dass die dortige Folge stetiger Funktionen $(f_n)$ punktweise auf $[0, 1]$ gegen die unstetige Grenzfunktion $f$ konvergiert. Sie konvergiert aber nicht gleichmäßig gegen $f$. Denn wegen $f_n(1) = 1 = f(1)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x \in [0,1)} (x^n) = 1.$$

Der folgende Satz zeigt, dass der Verlust der Stetigkeit beim Grenzübergang im Falle gleichmäßiger Konvergenz nicht passieren kann.

**12.4 Satz.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion $f$ stetig auf $D$.*

*Beweis.* Sei $x_0 \in D$. Um die Stetigkeit von $f$ in $x_0$ zu überprüfen, müssen wir beweisen, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Da $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, gibt es zunächst einen Index $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_N - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Weil $f_N$ stetig in $x_0$ ist, existiert außerdem ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ erhalten wir daher mit der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

□

**Bemerkung:** Unter geeigneten Bedingungen überträgt sich auch die Differenzierbarkeit einer Funktionenfolge unter Limesbildung. Dies können wir aber erst später behandeln, weil dabei Integration erforderlich ist.

Analog zur Konvergenz von Zahlenfolgen läßt sich auch die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen mittels eines Cauchy-Kriteriums überprüfen. Der Vorteil ist, dass man die Grenzfunktion (bzw. den Kandidaten dafür) nicht kennen muss.

**12.5 Satz (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).** *Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $D$, wenn gilt:*

$$(**) \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \; \textit{ für alle } n, m \geq N.$$

*(Dabei bezeichnet $\| \,.\, \|_\infty$ die Supremumsnorm auf $D$).*

*Beweis.* (I) Sei $(f_n)$ gleichmäßig konvergent auf $D$ mit Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$, und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Hieraus folgt mit der Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm:

$$\forall n, m \geq N : \; \|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(II) Sei umgekehrt die Cauchy-Bedingung $(**)$ erfüllt. Wir müssen zunächst zeigen, dass die Folge $(f_n)$ punktweise konvergiert und die Grenzfunktion finden. Sei dazu $x \in D$. Wegen $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ ist die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, und daher konvergent (wegen des Cauchykriteriums 5.14). Die durch

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in D)$$

definierte Funktion ist die gesuchte Grenzfunktion. Es bleibt noch zu zeigen, dass $(f_n)$ nicht nur punktweise, sondern gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Sei also $\epsilon > 0$ und dazu $N \in \mathbb{N}$ so, dass die Bedingung $(**)$ erfüllt ist. Dann gilt für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon,$$

weil ja $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ sobald auch $m \geq N$. Also ist $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$, und dies liefert die behauptete gleichmäßige Konvergenz.

□

## 12.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen

Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ (wieder ist $D$ eine beliebige Menge). Man definiert dann die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n : D \to \mathbb{C}$ „punktweise“ durch

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{für } x \in D,$$

vorausgesetzt die Reihe rechts konvergiert für alle $x \in D$.

**Beispiel:** Für $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ auf $\mathbb{R}$ ist $\big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\big)(x) = e^x$, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \exp$ auf $\mathbb{R}$.

Die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sind die Funktionen $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Definition.** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf $D$, falls die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen gleichmäßig auf $D$ konvergiert.

Anwendung des Cauchykriteriums 12.5 auf die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ liefert:

**12.6 Satz (Cauchykriterium für Funktionenreihen).** *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $D$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} f_k \Big\|_{\infty} < \epsilon \quad \textit{für alle } n \geq m \geq N \quad (\textit{wobei } \|\,.\,\|_{\infty} = \|\,.\,\|_{\infty,D}).$$

In der Praxis ist das nächste Kriterium sehr nützlich.

**12.7 Satz (Majorantenkriterium).** *Sei $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen mit*

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty.$$

*Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* ***absolut und gleichmäßig*** *auf $D$. Dabei heißt die Reihe absolut konvergent auf $D$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ für alle $x \in D$.*

*Beweis.* Für alle $x \in D$ gilt $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty}$. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt daher aus dem Majorantenkriterium 6.11 für Zahlenreihen. Aus der Bedingung $(*)$ folgt ferner, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \epsilon.$$

Für $n \geq m \geq N$ ergibt sich hieraus mit der Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm:

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} f_k \Big\|_{\infty} \leq \sum_{k=m}^{n} \|f_k\|_{\infty} < \epsilon.$$

Anwendung des Cauchykriteriums für Funktionenreihen liefert die gleichmäßige Konvergenz der Reihe. $\square$

Satz 12.4 zeigt:

**12.8 Korollar.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$. Ferner sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf $D$. Dann ist auch die Grenzfunktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stetig auf $D$.*

**Beispiel:** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{mit} \ f_n(x) \ = \ \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

konvergiert nach dem Majorantenkriterium absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$; es gilt nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ < \ \infty.$$

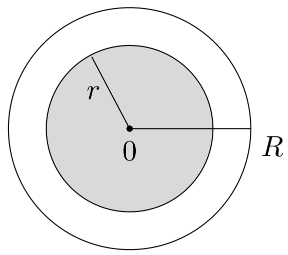
Gemäß Korollar 12.8 ist daher durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

Eine besonders wichtige Klasse von Funktionenreihen sind Potenzreihen. Der folgende Satz besagt insbesondere, dass jede Potenzreihe eine auf ihrer (offenen) Konvergenzkreisscheibe stetige Funktion darstellt.

**12.9 Satz.** *Sei $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gelten*




(i) *Für jedes $r > 0$ mit $r < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe*

$$\overline{B_r(0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}.$$

(ii) *Die Funktion $P$ ist stetig auf der offenen Kreisscheibe $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.*

*Beweis.* (i) Wir setzen $f_n(z) := a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt auf $D = \overline{B_r(0)}$ : $\|f_n\|_\infty = |a_n| r^n$. Wir wollen das Majorantenkriterium anwenden. Weil die Potenzreihe für $z = r$ absolut konvergiert (Lemma 7.7), ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,D} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^n \ < \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium 12.7 erhalten wir Teil (i).
(ii) Weil alle $f_n$ stetig auf $\mathbb{C}$ sind, folgt mit (i) und Korollar 12.8, dass die Reihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stetig auf der Kreisscheibe $\overline{B_r(0)}$ ist, und zwar für jedes $0 < r < R$. Daher ist $P$ stetig auf ganz $B_R(0)$, denn jeder Punkt aus $B_R(0)$ ist ja auch in einer Kreisscheibe $B_r(0)$ mit geeignetem $r < R$ enthalten. ☐

**12.10 Beispiel.** Die **Binomialreihe** mit Parameter $s \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$B_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$$

mit den allgemeinen Binomialkoeffizienten aus Kapitel 5.4,

$$\binom{s}{n} = \begin{cases} \dfrac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} & \text{falls } n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Im Fall $s \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{s}{n} = 0$ für $n > s$ und $B_s$ ist ein Polynom, nämlich $B_s(z) = (1+z)^s$ aufgrund des binomischen Satzes.
Für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ ist der Konvergenzradius der Binomialreihe $B_s$ gleich 1 (das wurde in Aufgabe H3, Blatt 8 gezeigt). Sie stellt daher eine auf der offenen Kreisscheibe $B_1(0)$ stetige Funktion dar. Wir werden später beweisen, dass tatsächlich

$$B_s(x) = (1+x)^s \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \in (-1, 1).$$

# Kapitel 13

# Integration

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Grundidee, die uns bei der Definition des Integrals leiten wird, ist, dass das Integral

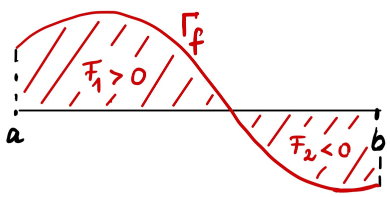
$$\int_a^b f(x)dx$$

die Fläche beschreiben soll, die vom Graphen von $f$ und der $x$-Achse eingeschlossen wird. Dabei werden wir Abschnitte, in denen $f$ positiv ist, als positive Fläche zählen, und Abschnitte, in denen $f$ netagiv ist, als negative Fläche.

Im skizzierten Beispiel etwa soll

$$\int_a^b f(x)dx = F_1 + F_2$$

sein.




Zunächst ist unklar, wie für recht beliebiges $f$ ein solcher Flächeninhalt definiert und berechnet werden kann. Wir betrachten daher zunächst einfach gebaute Funktionen, und zwar solche, die stückweise konstant sind. Der Integrationsbereich ist vorerst immer ein kompaktes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$.

## 13.1 Das Integral von Treppenfunktionen

**Definition.** Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f\big|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

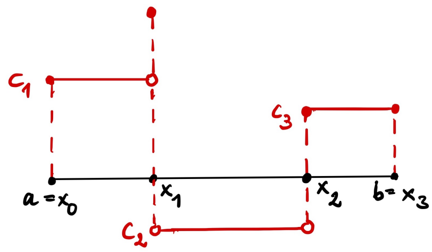
D.h. $f$ ist konstant mit Wert $c_k$ auf dem offenen Teilintervall $(x_{k-1}, x_k)$ für $1 \leq k \leq n$. Man definiert dann das Integral von $f$ über $[a, b]$ als

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).}$$

Wir nennen $f$ auch eine Treppenfunktion auf $[a, b]$ zur Unterteilung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

**Beachte:** Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ ist unabhängig von den Funktionswerten von $f$ an den Teilpunkten.

Ist die Treppenfunktion $f$ reellwertig, so ist $\int_a^b f(x)dx$ die Summe der Flächen der Rechtecke mit Basislänge $x_k - x_{k-1}$ und Höhe $c_k$, wie beabsichtigt.




**Achtung:** Die Unterteilung einer gegebenen Treppenfunktion $f$ ist nicht eindeutig festgelegt, man kann z.B. zusätzliche Teilpunkte einfügen. Damit das Integral $\int_a^b f(x)dx$ tatsächlich wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass es von der Wahl der Unterteilung unabhängig ist. Seien also $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und $Z' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$ zwei Unterteilungen von $[a, b]$, so dass $f$ auf jedem der offenen Teilintervalle von $Z$ und von $Z'$ konstant ist. Dann ist $f$ auch Treppenfunktion zur Unterteilung $Z \cup Z'$, der gemeinsamen Verfeinerung von $Z$ und $Z'$. Die Unterteilung $Z \cup Z'$ entsteht aus $Z$ und ebenso aus $Z'$ durch Hinzufügen von Teilpunkten. Es genügt daher zu zeigen, dass sich der Wert des Integrals einer Treppenfunktion nicht ändert, wenn man einen Teilpunkt hinzufügt. Wird etwa eine Teilpunkt $t$ mit $x_{k-1} < t < x_k$ hinzugefügt, so ist

$$f\big|_{(x_{k-1},\, t)} = f\big|_{(t,\, x_k)} = c_k = f\big|_{(x_{k-1},\, x_k)}$$

aber auch $c_k(t - x_{k-1}) + c_k(x_k - t) = c_k(x_{k+1} - x_k)$, d.h. der Wert des Integrals ändert sich nicht.

**Definition.** Wir bezeichnen die Menge der Treppenfunktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $T[a, b]$.

**13.1 Lemma.** (1) *$T[a, b]$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.*

(2) *Für $f \in T[a, b]$ gehören auch $|f|, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, \overline{f}$ zu $T[a, b]$.*

*Beweis.* (1) Seien $f, g \in T[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dass $\lambda f \in T[a, b]$ ist klar. Wir betrachten nun $f + g$. Sei $f$ Treppenfunktion zur Unterteilung $Z$ von $[a, b]$ und $g$ Treppenfunktion zur Unterteilung $Z'$. Dann ist $f + g$ Treppenfunktion zur Unterteilung $Z \cup Z'$.
(2) ist klar. □

Bevor wir das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen ausdehnen, stellen wir einige grundlegende Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen zusammen:

**13.2 Lemma.** (1) *Die Abbildung*

$$I : T[a, b] \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)dx =: \int_a^b f\,dx$$

*ist **linear**, d.h. für $f, g \in T[a, b]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx.$$

(2) ***Monotonie des Integrals:*** *Sind $f, g \in T[a, b]$ $\mathbb{R}$-wertig mit $f \le g$ auf $[a, b]$, so gilt*

$$\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx.$$

(3) ***Beschränktheit:*** *Für* $f \in T[a,b]$ *gilt*

$$\Big|\int_a^b f\,dx\Big| \;\le\; \int_a^b |f|\,dx \;\le\; \|f\|_\infty \cdot (b-a).$$

*Dabei bezeichnet* $\|\,.\,\|_\infty$ *die Supremumsnorm auf* $[a,b]$.

Beachte, dass jede Treppenfunktion beschränkt ist, da sie nur endlich viele Werte annimmt.

*Beweis.* (1) Wir wählen eine gemeinsame Unterteilung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ für $f$ und $g$. Sei $f\big|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k$ und $g\big|_{(x_{k-1},x_k)} = d_k$. Dann folgt

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx \;=\; \sum_{k=1}^n (\lambda c_k + \mu d_k)(x_k - x_{k-1}) \;=\; \lambda \int_a^b f\,dx \;+\; \mu \int_a^b g\,dx.$$

Der Beweis von Teil (2) geht analog.
Zu Teil (3): Für $f$ wie in (1) erhalten wir mit der Dreiecks-Ungleichung

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f\,dx\Big| \;=\; \Big|\sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})\Big| \;&\le\; \sum_{k=1}^n |c_k|(x_k - x_{k-1}) \;=\; \int_a^b |f|\,dx \\ &\le \big(\max_{1\le k\le n} |c_k|\big)\cdot (b-a) \;=\; \|f\|_\infty \cdot (b-a).\end{aligned}$$

□

## 13.2 Integration von Regelfunktionen

Wir erweiteren nun das Integral auf Funktionen, die gleichmäßig auf $[a,b]$ durch Treppenfunktionen approximiert werden können. Wieder bezeichnet $\|\,.\,\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $[a,b]$.

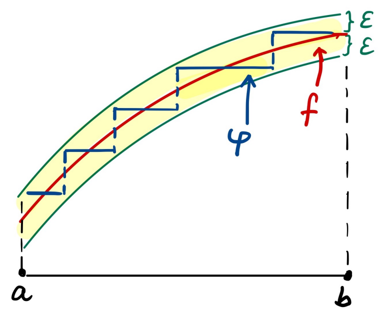
**Definition.** Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion* auf $[a,b]$, falls es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty \;=\; 0.$$

$f$ ist also genau dann Regelfunktion auf $[a,b]$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a,b]$ existiert, so dass

$$(*) \quad \|f - \varphi\|_\infty \;<\; \epsilon\,,$$

d.h. $\varphi$ verläuft im $\epsilon$-Schlauch um $f$.




Wir setzen

$$R[a,b] \;:=\; \{f : [a,b] \to \mathbb{C} :\; f \text{ ist Regelfunktion}\}.$$

Beachte, dass jede Regelfunktion auf $[a,b]$ beschänkt ist, denn in der Situation $(*)$ gilt : $\|f\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty + \epsilon < \infty$.

**13.3 Satz (und Definition).** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion, und sei $(\varphi_n)$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$. Dann existiert der Grenzwert*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.}$$

*Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge $(\varphi_n)$ und heißt das (Regel-) Integral von $f$ über $[a,b]$.*

*Beweis.* I. Existenz des Grenzwerts: Hierzu genügt es aufgrund des Cauchy-Kriteriums nachzuweisen, dass die Folge der Integrale $\left(\int_a^b \varphi_n\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Sei dazu $\epsilon > 0$. Mit der Standardabschätzung und der Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi_n\, dx - \int_a^b \varphi_m\, dx \right| &\le \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \cdot (b-a) \\ &\le (b-a) \cdot \big(\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \varphi_m\|_\infty\big) \end{aligned}$$

Die rechte Seite wird nach Voraussetzung kleiner als $\epsilon$, sofern $n$ und $m$ groß genug sind.

II. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx$ ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge $(\varphi_n)$: Denn sei $(\psi_n)$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $\|f - \psi_n\|_\infty \to 0$. Dann folgt (wieder mit der Standardabschätzung):

$$\left| \int_a^b \psi_n\, dx - \int_a^b \varphi_n\, dx \right| \le \int_a^b |\psi_n - \varphi_n|\, dx \le \|\psi_n - \varphi_n\|_\infty \cdot (b-a).$$

Wegen

$$\|\psi_n - \varphi_n\|_\infty \le \|\psi_n - f\|_\infty + \|f - \varphi_n\|_\infty \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx\,.$$

□

**Zusatz:** Ist $f \in R[a,b]$ reellwertig, so ist auch der Wert des Integrals $\int_a^b f\, dx$ reell.

*Beweis.* $f$ ist durch eine Folge reellwertiger Treppenfunktionen approximierbar, deren Integrale natürlich alle reell sind. Um das zu sehen, starten wir mit einer komplexwertigen Folge $(\varphi_n)$ von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$. Dann bilden die Realteile $\operatorname{Re}\varphi_n$ eine Folge reellwertiger Treppenfunktion mit $\|f - \operatorname{Re}\varphi_n\|_\infty \le \|f - \varphi_n\|_\infty \to 0$. Daher ist

$$\int_a^b f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\operatorname{Re}\varphi_n)\, dx \in \mathbb{R}.$$

□

**Bemerkung:** In einem Integral $\int_a^b f\, dx$ heißen $f$ der Integrand und $a, b$ die Integrationsgrenzen.

Wir dehnen nun die Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen aus Lemma 13.2 auf Regelfunktionen aus.

**13.4 Satz** (**Eigenschaften des Regelintegrals**).

(1) ***(Linearität)*** *Die Menge $R[a,b]$ der Regelfunktionen auf $[a,b]$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und die Abbildung*

$$I : R[a,b] \to \mathbb{C},\; f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

*ist linear.*

(2) ***(Monotonie)*** *Für reellwertige Regelfunktionen $f, g \in R[a,b]$ mit $f \le g$ auf $[a,b]$ gilt*

$$\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx.$$

(3) *Für $f \in R[a,b]$ gehören auch $|f|$ und $\overline{f}$ zu $R[a,b]$, und es gelten*

$$\Big|\int_a^b f\,dx\Big| \le \int_a^b |f|dx \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty \qquad \textit{\textbf{(Beschränktheit)}}$$

*sowie*

$$\int_a^b \overline{f}\,dx = \overline{\int_a^b f\,dx}\,.$$

*Beweis.* Seien $f, g \in R[a,b]$ und $(\varphi_n)$, $(\psi_n)$ Folgen von Treppenfunktionen mit $\|f-\varphi_n\|_\infty \to 0$, $\|g-\psi_n\|_\infty \to 0$. Wir betrachten damit nun die einzelnen Behauptungen.

(1) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $n \to \infty$ erhalten wir

$$\|(\lambda f + \mu g) - (\lambda\varphi_n + \mu\psi_n)\|_\infty \le |\lambda|\cdot\|f-\varphi_n\|_\infty + \|g-\psi_n\|_\infty \to 0.$$

Daher ist auch $\lambda f + \mu g \in R[a,b]$, und mit Lemma 13.2 folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\lambda\varphi_n + \mu\psi_n)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\lambda\int_a^b \varphi_n\,dx + \mu\int_a^b \psi_n\,dx\Big) = \lambda\int_a^b f\,dx + \mu\int_a^b g\,dx.\end{aligned}$$

(2) Wir können (vgl. den Zusatz nach Satz 13.3) annehmen, dass die Treppenfunktionen $\varphi_n, \psi_n$ reellwertig sind mit $\|f-\varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$, $\|g-\psi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$. Wegen $f \le g$ haben wir zunächst $\varphi_n \le \varphi_n - f + g - \psi_n + \psi_n$. Hieraus folgt, dass

$$\varphi_n(x) \le \frac{2}{n} + \psi_n(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Die Funktion rechts ist ebenfalls eine Treppenfunktion. Mit der bereits bekannten Monotonie des Integrals von Treppenfunktionen erhalten wir daher

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n\,dx \le \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2}{n}(b-a) + \int_a^b \psi_n\,dx\Big) = \int_a^b g\,dx.$$

(3) Aus $\|f-\varphi_n\|_\infty \to 0$ folgt $\|\,|f|-|\varphi_n|\,\|_\infty \to 0$, weil $\big||f|-|\varphi_n|\big| \le |f-\varphi_n|$. Da auch $|\varphi_n|$ eine Treppenfunktion ist, ist $|f|$ eine Regelfunktion auf $[a,b]$, und für ihr Integral ergibt sich

$$\int_a^b |f|\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |\varphi_n|\,dx \ge \lim_{n\to\infty}\Big|\int_a^b \varphi_n\,dx\Big| = \Big|\int_a^b f\,dx\Big|.$$

Wegen $|f| \leq \|f\|_\infty$ folgt aus Teil (2) außerdem, dass

$$\int_a^b |f|\,dx \leq (b-a)\|f\|_\infty\,.$$

Weil die $\overline{\varphi}_n$ Treppenfunktionen sind mit $\|\overline{\varphi}_n - \overline{f}\|_\infty \to 0$, ist ferner auch $\overline{f}$ eine Regelfunktion, und es gilt

$$\int_a^b \overline{f}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \overline{\varphi}_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\overline{\int_a^b \varphi_n\,dx} = \overline{\int_a^b f\,dx}.$$

□

**13.5 Lemma (Intervalladitivität).** *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f \in R[a,c]$. Dann sind auch die Einschränkungen von $f$ auf $[a,b]$ bzw. auf $[b,c]$ Regelfunktionen, und es gilt*

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx.$$

*Beweis.* Die Aussage ist klar, falls $f$ eine Treppenfunktion ist; um das zu sehen, muss man nur $b$ als ggf. neuen Teilpunkt einfügen. Sei nun $f \in R[a,c]$ und $(\varphi_n) \subseteq T[a,c]$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_n\|_{\infty,\,[a,c]} \to 0$. Dann konvergiert die Folge $(\varphi_n)$ auch gleichmäßig auf den Teilintervallen $[a,b]$ und $[b,c]$ gegen $f$. Daher sind die Restriktionen von $f$ auf diese Teilintervalle Regelfunktionen, und es gilt

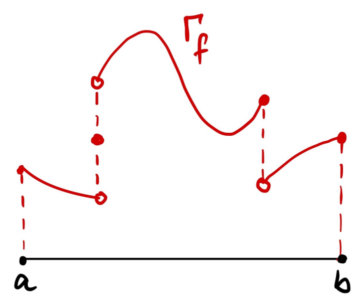
$$\int_a^c f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b \varphi_n\,dx + \int_b^c \varphi_n\,dx\Big) = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx.$$

□

**Konvention:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in R[a,b]$ setzt man

$$\int_b^a f dx := -\int_a^b f\,dx, \qquad \int_a^a f dx := 0.$$

**13.6 Satz (Charakterisierung von Regelfunktionen).** *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in [a,b]$ einseitige Grenzwerte (in $\mathbb{C}$) besitzt.*




*Beweis.* Wir beweisen hier nur die etwas wichtigere Richtung, nämlich dass aus der Existenz einseitiger Grenzwerte in jedem Punkt aus $[a,b]$ folgt, dass $f$ Regelfunktion ist. Für die umgekehrte Richtung siehe z.B. Köngisberger, Analysis 1, Kapitel 11.2.

$f$ besitze also in jedem $x_0 \in [a,b]$ einseitige Grenzwerte. (Dabei handelt es sich in den Randpunkten $a, b$ natürlich nur um den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert). Wir nehmen an, $f$ sei keine Regelfunktion. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass keine Treppenfunktion $\varphi \in T[a,b]$

existiert mit $\|f-\varphi\|_\infty < \epsilon$. Wir sagen, $f$ ist auf $[a,b]$ nicht $\epsilon$-approximierbar durch Treppenfunktionen. Wir teilen nun das Intervall $[a,b] =: [a_1,b_1]$ in zwei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle. Dann ist $f$ auf mindestens einem dieser Intervalle nicht $\epsilon$-approximierbar durch Treppenfunktionen. Sei $[a_2,b_2]$ ein solches Teilintervall. Iteration liefert eine Folge ineinander geschachtelter abgeschlossener Intervalle $[a_n,b_n]$ $(n\in\mathbb{N})$ derart, dass gilt:

$$(*) \quad \nexists\,\varphi \in T[a_n,b_n] : \|f-\varphi\|_{\infty,[a_n,b_n]} < \epsilon\,.$$

Dabei ist die Folge $(a_n)$ monoton wachsend, die Folge $(b_n)$ ist monoton fallend. Beide sind beschränkt, da in $[a,b]$ enthalten, und daher konvergent. Ausserdem gilt $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n| = 0$. Die Grenzwerte der beiden Folgen müssen daher übereinstimmen. Setze

$$x_0 := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in [a,b].$$

Wir müssen nun unterscheiden, ob $x_0$ ein Randpunkt von $[a,b]$ ist oder im Inneren liegt.
**1. Fall:** $x_0 \in (a,b)$. In diesem Fall setzen wir

$$c_l := \lim_{x\uparrow x_0} f(x), \quad c_r := \lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

Beide Grenzwerte existieren gemäß Voraussetzung. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt also

$$\begin{aligned} |f(x)-c_l| &< \epsilon \text{ für alle } x \in (x_0-\delta, x_0)\,; \\ |f(x)-c_r| &< \epsilon \text{ für alle } x \in (x_0, x_0+\delta). \end{aligned}$$

Wir wählen nun $n\in\mathbb{N}$ so groß, dass $[a_n,b_n]$ im offenen Intervall $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ enthalten ist, und definieren eine Treppenfunktion $\varphi\in T[a_n,b_n]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_l & \text{für } x \in [a_n, x_0), \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0\,, \\ c_r & \text{für } x \in (x_0, b]. \end{cases}$$

Damit gilt aber $\|f-\varphi\|_{\infty,[a_n,b_n]} < \epsilon$, im Widerspruch zu $(*)$.
**2. Fall:** $x_0 = a$ oder $x_0 = b$. In diesem Fall geht man analog vor, man arbeitet aber nur mit $c_r$ bzw. $c_l$ und dem Intervall $[x_0,x_0+\delta)$ bzw. $(x_0-\delta,x_0]$.

□

Satz 13.6 liefert uns sofort wichtige Klassen von Regelfunktionen:

**13.7 Korollar.** (1) *Jede stetige Funktion auf $[a,b]$ ist Regelfunktion.*
(2) *Jede monotone Funktion auf $[a,b]$ ist Regelfunktion (aufgrund von Satz 8.15).*

**13.8 Korollar.** *Seien $f,g\in R[a,b]$. Dann gelten*

(i) $fg \in R[a,b]$.

(ii) *Falls $g$ nullstellenfrei auf $[a,b]$ ist, so ist auch* $\dfrac{f}{g} \in R[a,b]$.

*Beweis.* Dies folgt aus den Regeln für Grenzwerte (Satz 8.14). □

**Beispiele von Funktionen, die keine Regelfunktionen sind:**

(1) Die Dirichletsche Sprungfunktion auf $[0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist keine Regelfunktion, da sie in keinem $x \in [0,1]$ einseitige Grenzwerte besitzt.

(2) Wir betrachten auf dem Intervall $[0,1]$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wegen $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$ $(\notin \mathbb{C}!)$ ist $f$ keine Regelfunktion auf $[0,1]$.