Vorlesung „Approximationstheorie“

Institut für Mathematik, Universität Paderborn

Kursdokument – Sommersemester 2013

Webseite:
http://www2.math.uni-paderborn.de/people/kerstin-hesse/vorlesung-approximationstheorie.html

Dozent:

Dr. Kerstin Hesse
Büro: Gebäude D, Raum D1.217
Telephone: 2605 (intern), 05251 60-2605 (extern)
Email: kerstin.hesse@math.uni-paderborn.de
Webpage: http://www2.math.uni-paderborn.de/people/kerstin-hesse.html

Sprechstunde: Gebäude D, Raum D1.217, Donnerstag, 10:00-12:00 Uhr, oder nach Vereinbarung

Vorlesung mit Übung:

Bei der Veranstaltung handelt es sich um eine Spezialvorlesung im Masterprogramm (Masterstudiengänge Mathematik und Technomathematik). Die Vorlesung zählt 5 Credits/Leistungspunkte.

Die Veranstaltung besteht aus einer zweistündigen Vorlesung und einer einstündigen Übung.

Tag, Uhrzeit und Ort:

- **Vorlesung: Mittwoch, 14:00-16:00 Uhr, Gebäude N, Raum N1.101** (Semesterwochen 2–15); Dienstag, 16:00-18:00 Uhr, Gebäude L, Raum L2.201 (Semesterwochen 1)
- **Übung: Mittwoch, 13:00-14:00 Uhr, Gebäude N, Raum N1.101** (Semesterwochen 2–15)

In der ersten Semesterwoche findet noch keine Übung statt. Vorlesung und Übung fangen c.t. – also 15 min nach Beginn der angegebenen vollen Stunde – an.

Eine regelmäßige Teilnahme an der Vorlesung und Übung wird erwartet.

Übungszettel und Übungen:

Es gibt 13 Übungszettel, und der erste Übungszettel wird in Semesterwoche 2 ausgeteilt. Die Übungszettel werden Dienstags in der Vorlesung ausgeteilt, und die Lösungen zu den Übungszetteln müssen eine Woche später Dienstags in der Vorlesung eingereicht werden. Sie werden in der Regel in der nachfolgenden Übung korrigiert zurückgegeben, wobei pro Übungszettel 100 Punkte erworben werden können. Die Lösungen zu den Übungsaufgaben werden in der Übung besprochen. Weiter können in der Übung je nach Bedarf auch Fragen zur Vorlesung besprochen werden. **50% der insgesamt für alle 13 Übungszettel erhältlichen Punkte sind die Voraussetzung für die Prüfungszulassung!**

Materialien: Materialien für den Kurs (z.B. dieses Kursdokument und die Übungszettel) werden auf der Webpage zum Download zur Verfügung gestellt.

Prüfung und Benotung:

Die Note für den Kurs wird durch eine **30-minütige mündliche Prüfung** bestimmt, an der die/der Studierende, die Dozentin als Prüferin und ein/e Beisitzer/in teilnehmen. Die Prüfung findet im Anschluss an das Semester voraussichtlich in der Kalenderwoche 30 oder 31 (genauer Termin nach Absprache) statt.

Zur **Zulassung für die mündliche Prüfung** sind **50% der insgesamt für alle 13 Übungszettel erhältlichen Punkte** erforderlich.

Die **Wiederholungsprüfung ist ebenfalls mündlich.** Eine Wiederholungsprüfung wird nur bei Nicht-Bestehen des Kurses aber nicht zur Verbesserung der Note bei einer vorher bereits bestandenen mündlichen Prüfung für diesen Kurs angeboten.

Thematische Einordnung der Vorlesung: Approximationstheorie ist ein Forschungsgebiet in der Mathematik, das sowohl Methoden der Analysis anwendet als auch Fragen der Numerik betrachtet. In der Approximationstheorie werden theoretische Fragen im Zusammenhang mit Approximationsverfahren betrachtet. Unter Approximationsverfahren verstehen wir Methoden zur numerischen/angenäherten Berechnung von Funktionen oder auch Integralen. Aus der Numerik 1 bekannte Approximationsverfahren sind z.B. Polynominterpolation, Splines, Fouriertransformation und numerische Integrationsverfahren. Unter theoretischen Fragen für konkrete Approximationsverfahren sind z.B. Fehlerabschätzungen für das Konvergenzverhalten zu verstehen. Zu fortgeschrittenen und moderneren Approximationsverfahren zählen z.B. Wavelets und (streng) positiv definite Funktionen bzw. radiale Basisfunktionen. In diesem Kurs werden wir uns verstärkt mit (streng) positiv definiten Funktionen bzw. radialen Basisfunktionen befassen.

Anwendungsgebiete in der Praxis: Moderne Approximationsverfahren werden vielfältig in der Praxis eingesetzt. So spielen die schnelle Fouriertransformation und Wavelets in der Signal- und Bildverarbeitung eine zentrale Rolle. Radiale Basisfunktionen werden u.a. bei der Modellierung von Oberflächen (z.B. Außenhülle eines Flugzeugs) sowie in geodätischen/geophysikalischen Anwendungen eingesetzt.

Notwendige Kenntnisse: Analysis 1–3, Lineare Algebra 1–2, Numerik 1.

Hilfreiche aber nicht notwendige Kenntnisse: Hilbertraummethoden, Funktionalanalysis – hier werden aber keine Kenntnisse vorausgesetzt; alles wird eingeführt.

Themen der Vorlesung:

1. Das lineare Interpolationsproblem
2. Lineare Interpolationsoperatoren
3. Interpolation mit translatierten Kopien einer einzigen Funktion
4. Approximation mit positiv definiten Funktionen
5. Positiv definite Funktionen auf Sphären

6. Die Golomb-Weinberger-Theorie
7. Reproduzierende-Kern-Hilberträume
8. Sphärische Thin Plate Splines

Lernziele: Bei erfolgreicher Teilnahme an diesem Kurs sollte man:

1. Kenntnisse der grundlegenden Fragestellungen zu Interpolationsproblemen besitzen;
2. die Idee der Approximation mit translatierten Kernen einer einzigen Funktion und (streng) positiv definiten Funktionen verstanden haben und erklären können;
3. die für den Kurs relevanten Ideen der Golomb-Weinberger-Theorie erklären können;
4. die Idee der Reproduzierenden-Kern-Hilberträume verstanden haben und diese anwenden können;
5. mit dem Beispiel der Thin Plate Splines auf der Sphäre vertraut sein und die im Kurs gelernte Theorie für dieses Beispiel anwenden können;
6. die Ideen der Beweise der wichtigen Sätze aus der Vorlesung und Übung erklären können und die Beweise gegebenenfalls durchführen können.

Literatur:

- Ward Cheney, Will Light. A Course in Approximation Theory. Graduate Studies in Mathematics, Volume 101, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009 (Erste Ausgabe bei: Brooks/Cole Pub. Co., Pacific Grove, 2000.)