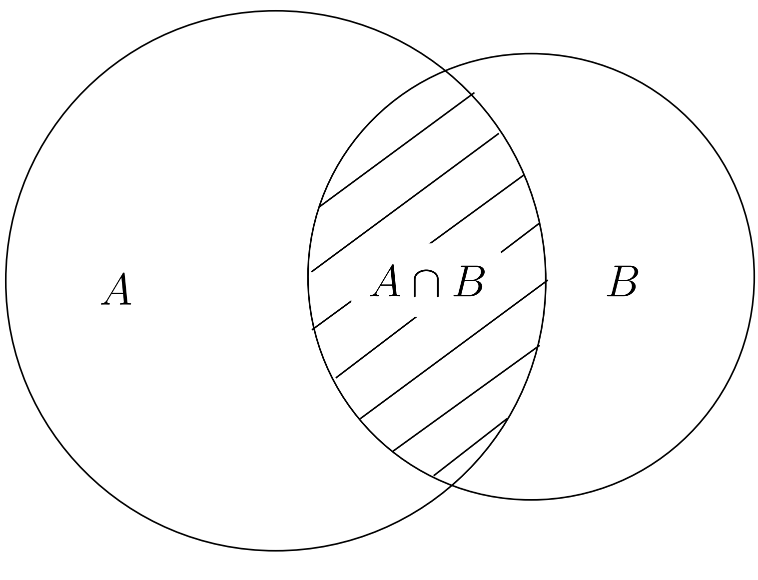
UNIVERSITÄT PADERBORN

Die Universität der Informationsgesellschaft

Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten (EmDA)

Kerstin Hesse

Universität Paderborn, Sommersemester 2017



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ für endliche Mengen A, B

Dieses Skript bildet die Basis für meine Vorlesung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“. Es enthält gegenüber dem Tafelanschrieb zusätzliche Beispiele und weiterführende Erklärungen, sowie Hinweise zum Lernen von Mathematik, und kann wie ein Lehrbuch verwendet werden.

Paderborn, Februar 2017

Kerstin Hesse

Einleitung

Jeder von Ihnen, der in der „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ (kurz: EmDA) angemeldet ist, will Lehrerin bzw. Lehrer für Mathematik und ein anderes Fach an einem Gymnasium, einer Gesamtschule mit gymnasialer Oberstufe oder einem Berufskolleg werden. Die EmDA soll Ihnen den **Einstieg in Ihr Studium im Fach Mathematik** erleichtern.

Vielleicht hatten Sie in der Schule gute oder sogar sehr gute Noten in Mathematik und fanden Ihr Mathematik-Schulbuch leicht verständlich und fragen sich nun, warum es eigentlich nötig ist, dass man Ihnen am Studienbeginn in der Mathematik extra hilft. – Sie werden sehr schnell feststellen, dass Mathematik-Vorlesungen an der Universität sich in vieler Hinsicht erheblich von dem Mathematik-Unterricht in der Schule unterscheiden:

- **Tempo:** Es werden viel mehr Inhalte in viel kürzerer Zeit abgedeckt. (Dieses gilt für alle Fächer und ist nicht auf die Mathematik beschränkt.)
- **Eigenverantwortung für das Lernen:** An der Universität wird erwartet, dass Sie die Eigenverantwortung für Ihr Lernen übernehmen, d.h. insbesondere, dass Sie das Bearbeiten von Hausübungen, das Schreiben von Hausarbeiten und Referaten, das Nacharbeiten von Vorlesungen und die Vorbereitung auf Tests, Klausuren und mündliche Prüfungen eigenständig und weitgehend in Eigenarbeit erledigen. (Auch dieses gilt für alle Fächer und ist nicht auf die Mathematik beschränkt.)
- **anspruchsvollere Inhalte und tieferes Eindringen in die Materie:** Die Veranstaltungen an der Universität decken das Material in einem viel umfassenderen Umfang und mit einer viel größeren Tiefe ab, als es in den entsprechenden Fächern in der Schule der Fall war. (Auch dieses gilt für alle Fächer und ist nicht auf die Mathematik beschränkt.)
- **Hochschulmathematik statt Schulbuch-Mathematik:** In der universitären Mathematikausbildung liegt der Fokus auf **Verstehen und Beweisen**! Dieses bedeutet nicht, dass die Schulmathematik unwichtig ist und in Ihrem Studium gar nicht mehr vorkommt. (Letzteres würde ja auch keinen Sinn machen, denn das Ziel des Studiums ist es, dass Sie eine gute Mathematiklehrerin bzw. ein guter Mathematiklehrer werden.)

Es ist aber so, dass die Darstellung der Mathematik in Ihrem Schulbuch meist an der Oberfläche geblieben ist und weder die Hintergründe der Inhalte gezeigt hat, noch in die Tiefe gegangen ist (Warum gilt das? Wie beweist man es?), noch das große Bild vermittelt hat. Nur mit diesem Wissen und Verständnis aus der Hochschulmathematik und den zugehörigen Fähigkeiten kann man eine gute Mathematiklehrerin bzw. ein guter Mathematiklehrer werden!

Was macht eine gute Mathematiklehrerin bzw. einen guten Mathematiklehrer aus?

Es soll hier nicht der Eindruck erweckt werden, dass man alleine durch fachmathematische Kompetenz eine gute Mathematiklehrerin bzw. ein guter Mathematiklehrer wird. Natürlich gehören dazu mehrere Fähigkeiten:

(1) **eine souveräne Beherrschung des mathematischen Stoffs und ein Blickwinkel von einem höheren Standpunkt aus:** Dazu gehört (wie bereits oben erklärt), dass man mehr Mathematik lernt, als im Schulbuch vorkommt, und auch die Hintergründe des „warum“ und „wie beweist man es“ kennt und versteht. Damit das Gehirn hinreichend in „mathematischem Denken“ trainiert wird, muss man in seinem Studium auch Vorlesungen hören, deren Inhalte nicht in der Schule vorkommen.

(2) **mathematikdidaktische Kenntnisse und Fähigkeiten:** In mathematikdidaktischen Lehrveranstaltungen lernt man, wie man Schülerinnen und Schülern Mathematik vermittelt.

(3) **Fähigkeiten im Umgang mit Schülerinnen und Schülern:** Es ist ganz wichtig für den Lehrerberuf, dass man Spaß an der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern und auch ein „gewisses Händchen“ dafür hat.

(4) **mathematische Allgemeinbildung:** Es ist wünschenswert, dass eine Mathematiklehrerin bzw. ein Mathematiklehrer etwas über Mathematikgeschichte weiß. Sie bzw. er sollte auch wissen, wo Mathematik im täglichen Leben eine Rolle spielt und was man mit einem Mathematikstudium außer dem Lehrerberuf und der Arbeit bei einer Bank oder Versicherung sonst noch beruflich machen kann.

Man muss sich aber darüber klar sein, dass sich fehlende in Punkt (1) genannte Fähigkeiten nicht durch die Fähigkeiten aus Punkten (2) und (3) kompensieren lassen! Mathematikdidaktische Fähigkeiten kann man nur erwerben, wenn man die mathematischen Inhalte verstanden hat, die man vermitteln will. Auch die besten Fähigkeiten im Umgang mit Schülerinnen und Schülern können fachmathematische Kompetenz nicht ersetzen.

Was für Kenntnisse und Fähigkeiten werden vorausgesetzt?

Generell werden in dieser Veranstaltung im Wesentlichen **grundlegende Kenntnisse und Rechentechniken aus der Mittelstufe** vorausgesetzt, aber je mehr Mathematik Sie bereits beherrschen, desto besser sind sie natürlich vorbereitet. Erwartet wird vor Allem, dass Sie grundlegende Rechentechniken wie das Rechnen mit Ungleichungen, Klammersetzung, die Bruchrechnung und die binomischen Formeln beherrschen. Wenn Sie bei diesen grundlegenden Rechentechniken Defizite haben, müssen Sie selbst daran arbeiten, diese zu beheben! Weiterführendes Material wird in der Regel vollständig in der Vorlesung eingeführt.

Da ich aus Erfahrung weiß, dass einige Studienanfängerinnen und Studienanfänger auch bei grundlegenden Rechentechniken manchmal Unsicherheiten oder sogar Defizite haben, habe ich **in Anhang A einige Themen aus der Schulmathematik zusammengestellt**, die für die EmDA relevant sind und bei denen meiner Erfahrung nach öfter Unsicherheiten oder Defizite vorhanden sind. Bitte nutzen Sie diese Zusatzmaterialien, falls Sie feststellen, dass dieses erforderlich ist.

Wie sollte man für die EmDA lernen?

- **Kommen Sie immer zu den Vorlesungen und nehmen Sie aktiv an diesen teil:** Schreiben Sie mit, oder machen Sie sich zumindest Notizen, damit Sie die Vorlesungen nacharbeiten können. Wenn Sie das Skript dabei haben, dann können Sie dieses natürlich auch mit Anmerkungen versehen. Denken Sie mit, und versuchen Sie möglichst viel bereits in den Vorlesungen zu verstehen.
- **Lassen Sie sich in den Vorlesungen nicht durch Ihr Smartphone, Tablet, Laptop oder Handy ablenken.** Nur wenn Sie sich ganz auf die Vorlesungen konzentrieren, haben Sie eine Chance, die mathematischen Inhalte direkt in den Vorlesungen zu verstehen.
- **Gehen Sie immer zu Ihrer Übungsgruppe und bearbeiten Sie die Gruppenübungen** (diese werden in der Übung bearbeitet) **und die Hausübungen** (diese sollten Sie nach der Übung zu Hause bearbeiten). **Mathematik lernt sich nur durch Übung, d.h. indem man die mathematischen Techniken für Beispiele und Übungsaufgaben anwendet.** Daher ist es unerlässlich, dass Sie die Übungsaufgaben bearbeiten.
- **Kommen Sie vorbereitet in die Übungen**, d.h. schauen Sie den Übungszettel schon vorher an, so dass Sie konkrete Fragen zu den Aufgaben stellen können, mit denen Sie Schwierigkeiten haben.

- **Wenn Sie die Übungsaufgaben lösen, dann sollten Sie parallel dazu das zugehörige Material aus den Vorlesungen nacharbeiten.** Dieses passiert ganz „natürlich“, denn die Übungsaufgaben sind so konzipiert, dass Sie mit ihnen den Vorlesungsstoff anwenden und üben. Das Nacharbeiten kann mit Ihren handschriftlichen Notizen und/oder diesem Skript erfolgen. Das Skript ist dabei wesentlich ausführlicher als der Tafelanschrieb und somit auch als Ihre handschriftlichen Notizen. Im Skript finden Sie weitere und teilweise andere Beispiele und zusätzliche Erklärungen. Das Skript kann wie ein Lehrbuch verwendet werden.
- **Was machen Sie, wenn Sie etwas nicht verstehen?** Wichtig ist vor Allem, zu wissen, dass dieses bei mathematischen Themen völlig normal ist und allen Studierenden hin und wieder passiert. Was können Sie tun, um das Problem zu beheben?
  - Geben Sie nicht auf, sondern befassen Sie sich weiter mit dem mathematischen Inhalten. Manche mathematischen Themen muss man mehrfach studieren, bis „der Groschen fällt“.
  - Fragen Sie Ihre Kommilitoninnen und Kommilitonen danach und diskutieren Sie mit ihnen darüber.
  - Fragen Sie die Dozentin in den Vorlesungen und/oder die Tutorin bzw. den Tutor in der Übungen.
  - Sie können auch Fragen per E-Mail an die Tutorinnen und Tutoren und die Dozentin schicken. Wenn Sie dabei Hemmungen haben, so schicken Sie Ihre Frage mit dem anonymen E-Mail-Tool (siehe den Link auf dem Kursdokument) und die Antwort wird anonym für alle in koaLA gepostet.
  - Schauen Sie die zu dem Material gehörigen Beispiele an: Mathematik lernt sich durch das Verständnis der Beispiele. Wenn Sie das Beispiel verstehen, dann wird die mathematische Technik klarer. Können Sie nun vielleicht ein ähnliches Beispiel selber durchrechnen? Wenn ja, dann sind Sie einen Schritt weiter gekommen.
  - Lesen Sie ein Thema, mit dem Sie Probleme haben, in einem Lehrbuch nach, um eine alternative Darstellung zu bekommen.
- Nutzen Sie die Gelegenheit und trauen Sie sich, **in den Vorlesungen und in den Übungen Fragen zu stellen**. Es gibt keine dummen Fragen, sondern dumm ist nur, wenn man nicht fragt und ignorant bleibt. Die Vorlesungen und die Übungen sind dazu da, Sie beim Lernen zu unterstützen – also machen Sie von der Gelegenheit, Fragen zu stellen, Gebrauch.
- **Gruppenarbeit:** Gruppenarbeit ist nützlich und kann sehr produktiv sein. Übungsaufgaben sind oft leichter zu lösen, wenn verschiedene Per-

sonen ihre Ideen beisteuern. Indem Sie sich von anderen etwas erklären lassen, lernen Sie etwas dazu. Wenn Sie anderen etwas erklären, so lernen Sie auch etwas dazu und gewinnen größere Klarheit über das bereits verstandene Material. Wichtig ist aber, dass Sie nach der Gruppenarbeit nun auch in der Lage sind, die gelösten Typen von Aufgaben **eigenständig zu rechnen**, denn in der Klausur und im Test sind Sie auf sich alleine gestellt und haben keine Gruppe zur Hand.

- **Klausurvorbereitung:** Wenn Sie während des Semesters die Vorlesungen gut nachgearbeitet haben und die Übungsaufgaben erfolgreich gelöst haben, dann sind Sie bereits gut vorbereitet. Wiederholen Sie den Stoff noch einmal, rechnen Sie zu allen Themen passende Übungsaufgaben und lernen Sie das nötige Wissen. (Es gibt im Test und in der Klausur keine Formelsammlung und keinen Taschenrechner und auch keine sonstigen Hilfsmittel.)

Zum Schluss noch eine **Warnung**: **Mathematische Themen bauen aufeinander auf!** Man kann sich als gutes Modell für den Erwerb mathematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten den Bau einer Mauer ohne Mörtel/Zement vorstellen. In der EmDA lernen Sie mathematische Grundlagen, die Ihnen für alle weiteren Vorlesungen helfen sollen. Wo Sie Wissens- und Verständnislücken haben, fehlen Ziegelsteine in den untersten drei Reihen Ihrer Mauer. Die Mauer kann bereits hier lokal einbrechen. Mit der parallel laufenden „Linearen Algebra 1“ bauen sie ebenfalls Teile der ersten bis dritten Reihe Ziegelsteine, aber hier wächst die Mauer noch höher, und Sie errichten bereits Teile der vierten bis sechsten Reihe Ziegelsteine. Mit weiterführenden Vorlesungen kommen immer mehr Reihen Ziegelsteine hinzu. Wo bereits Lücken in den ersten drei Reihen der Mauer sind, können die weiteren Reihen Ziegelsteine nicht stabil aufgelegt werden und brechen ein. Erst wenn Sie Ihre Wissens- und Verständnislücken aus der EmDA (und der „Linearen Algebra 1“) geschlossen haben, können Sie die Inhalte der anderen darauf aufbauenden Mathematikvorlesungen richtig verstehen. Es ist daher ganz wichtig, dass Sie beim Nacharbeiten und Verstehen der Vorlesungsinhalte „am Ball bleiben“, damit Ihre Mauer aus mathematischem Wissen keine Lücken aufweist. Wie beim Bau einer Mauer ist dieses auch mit manchmal hoher Anstrengung verbunden.

Es sei aber auch erwähnt, dass **mathematische Inhalte einfach werden, wenn man sie verstanden hat**! Der Moment des Verstehens einer mathematischen Idee sowie das erfolgreiche Lösen einer anspruchsvollen Übungsaufgabe **sind sehr befriedigend und entschädigen für die harte Arbeit.**

Ich freue mich auf Ihre Teilnahme an der EmDA!

Kerstin Hesse Paderborn, Februar 2017

Literaturverzeichnis

Bei der Erstellung des EmDA-Skripts wurde die unten angegebene Literatur verwendet. Nicht alle dieser Bücher haben den gleichen Fokus wie diese EmDA-Vorlesung. Alle der Lehrbücher denken mehr Material ab, als in der mit zwei Semesterwochenstunden insgesamt 30-stündigen EmDA-Vorlesung abgedeckt werden kann.

[1] Titu Andreescu, Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*. Boston: Birkhäuser, 2006.

[2] Albrecht Beutelspacher: *„Das ist o. B. d. A. trivial!“ – Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken* (9te aktualisierte Aufl.). Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.

[3] Ethan D. Bloch: *Proofs and Fundamentals – A First Course in Abstract Mathematics* (2te Aufl.). New York: Springer Science+Business Media, 2011.

[4] Oliver Deiser: *Grundbegriffe der wissenschaftlichen Mathematik – Sprache, Zahlen und erste Erkundungen*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[5] Peter J. Eccles: *An Introduction to Mathematical Reasoning – numbers, sets and functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[6] Daniel Grieser: *Mathematisches Problemlösen und Arbeiten – Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[7] Sönke Hansen: *Mathematisches Denken und Arbeiten* (Vorlesungsskript). Universität Paderborn, WS 2011/12.

[8] Kerstin Hesse: *Höhere Mathematik A für Elektrotechniker* (Vorlesungsskript). Universität Paderborn, WS 2016/17.

[9] Joachim Hilgert, Max Hoffmann, Anja Panse: *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2015.

[10] Kevin Houston: *Wie man mathematisch denkt – Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2012.

[11] Martin Liebeck: *A Concise Introduction to Pure Mathematics* (4te Aufl.). Florida, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016.

[12] Hermann Schichl, Roland Steinbauer: *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

[13] VEMINT Konsortium der Universitäten Darmstadt, Kassel, Lüneburg, und Paderborn (Leitung Universität Paderborn: Rolf Biehler), Kerstin Hesse: *Skript zum Mathematik-Vorkurs (VEMINT-Vorkurs P2)*. Universität Paderborn, 2014.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Mengen

Sei es Lineare Algebra, Analysis oder Stochastik; Mengen als grundlegende mathematische Objekte spielen überall eine Rolle. In diesem Kapitel lernen wir die grundlegenden Begriffe der (naiven) Mengenlehre kennen, um in den nachfolgenden Kapiteln darauf und auf die in diesem Kapitel eingeführte Notation zurückgreifen zu können.

Die Inhalte dieses Einstiegskapitels sind vergleichsweise einfach, und bis auf das kartesische Produkt und die Mächtigkeit endlicher Mengen sind Ihnen die Konzepte vermutlich auch schon einmal in der Schulzeit begegnet. Wichtig ist allerdings, dass Sie sich bereits hier eine saubere mathematische Notation angewöhnen. Wir werden auch erste kleine Beweise sehen und selber durchführen.

Neben dem Verstehen und selber Durchführen von Beweisen ist das Erlernen sauberer mathematischer Notation (in Formeln und mit Symbolen) und korrekter mathematischer Sprache (mit Worten) ein Hauptlernziel der EmDA.

1.1 Mengen und Elemente

Wir beginnen die Einführung von Mengen mit der historischen Definition einer Menge von Georg Cantor (1845–1918).

Definition 1.1. (Menge und Elemente nach Georg Cantor)
Eine ***Menge*** *M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche die* ***Elemente*** *der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.*

Bemerkung 1.2. (Cantors Definition einer Menge)

(1) In der Erklärung Cantors wird nicht genauer geregelt, welche „Objekte“ man zu Mengen zusammenfassen darf. Dieses ist der Standpunkt der sogenannten naiven Mengenlehre (im Gegensatz zur mathematisch strengen axiomatischen Mengenlehre).

(2) Es muss (zumindest prinzipiell) feststehen, ob ein Objekt ein Element einer Menge M ist oder nicht. Die Entscheidung darüber darf nicht subjektiv sein.

(3) Die Elemente einer Menge M müssen „wohlunterschieden“ sein, d.h. für Elemente x, y von M muss zumindest prinzipiell feststehen, ob $x = y$ oder $x \neq y$ gilt.

(4) Mengen selbst sind wieder „Objekte unseres Denkens“ und können daher als Elemente neuer Mengen auftreten.

    Beispiel: Menge aller Geraden in der Ebene (denn Geraden sind Punktmengen)

(5) Allerdings ist die Zusammenfassung aller Mengen zu einer Menge aller Mengen nicht erlaubt, weil dieses zu Widersprüchen führen würde.

    (*Erklärung:* Die Menge aller Mengen müsste selber auch zur Menge aller Mengen gehören. Dieses führt zu einem Widerspruch.)

Betrachten wir einige Beispiele für Mengen.

Beispiel 1.3. (klassische Zahlenmengen)

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen (oder Brüche)
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

Diese Zahlenmengen werden hier nicht näher erklärt, sondern als aus der Schule bekannt vorausgesetzt.

Beispiel 1.4. (Mengen)

(a) $A = \{1, 2, 3, 7, 9, -16, \pi\}$

(b) $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

(c) $C =$ Menge der EmDA-Hörerinnen und EmDA-Hörer der Uni Paderborn im WS 2016/17

(d) $D = \{0, \alpha, 17, \mathbb{N}\}$

(e) $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

Notation 1.5. (Mengenklammern und Elementsymbol)
Wie wir bereits in Beispiel 1.4 gesehen haben, schreibt man Mengen mit geschweiften Klammern „{“ und „}“, sogenannten **Mengenklammern**. Weiter schreiben wir:

„$a \in M$“ für „a ist ein Element der Menge M“ oder kurz „a ist in M“.

„$a \notin M$“ für „a ist kein Element der Menge M“ oder kurz „a ist nicht in M“.

Beispiel: Es gilt $0 \in \mathbb{N}_0$ und $0 \notin \mathbb{N}$. Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Man nennt „$\in$“ das **Elementsymbol**.

In der nächsten Definition legen wir fest, wann zwei Mengen gleich sind, und lernen die leere Menge kennen.

Definition 1.6. (Gleichheit von Mengen und leere Menge)

*(1) Zwei Mengen A, B heißen **gleich** (in Zeichen: $A = B$), wenn sie dieselben Elemente enthalten. Sind zwei Mengen A, B **nicht gleich**, so schreiben wir in Zeichen $A \neq B$.*

*(2) Die Menge, die **keine** Elemente enthält, heißt die **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ (oder auch $\{\}$) bezeichnet.*

Betrachten wir ein Beispiel, um uns klar zu machen, wie wir Mengen darstellen.

Beispiel 1.7. (Darstellung von Mengen)
Es sei M die Menge, deren Elemente die Zahlen $1, 2$ und 3 sind. Dann lässt sich M mathematisch beschreiben durch:

(a) Auflistung ihrer Elemente:

$$M = \{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$$

Die Reihenfolge, in der die Elemente aufgelistet werden, spielt keine Rolle.

(b) Angabe einer Auswahleigenschaft:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \;:\; x < 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \;:\; 1 \leq x \leq 3\}$$

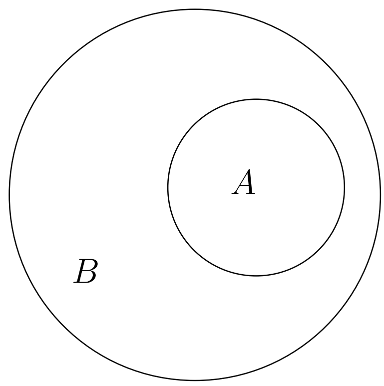
Dabei bedeutet „:“ in der obigen Zeile „für die gilt“ oder „so dass“.

Wir führen nun Relationen für Mengen ein.

Definition 1.8. (Teilmenge und Obermenge)

(1) Eine Menge A heißt eine ***Teilmenge*** *einer Menge B (in Zeichen: $A \subseteq B$), wenn jedes Element von A auch in B liegt. B wird dann auch als eine* ***Obermenge*** *von A bezeichnet (in Zeichen: $B \supseteq A$).*

(2) Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A eine ***echte Teilmenge*** *von B (in Zeichen: $A \subsetneq B$). Ist $B \supseteq A$ und $B \neq A$, so heißt B eine* ***echte Obermenge*** *von A (in Zeichen: $B \supsetneq A$).*



Wir sehen: Wenn A eine **echte** Teilmenge von B ist, so ist B eine Obermenge von A, und B enthält **mindestens ein** Element, welches nicht in A ist.

Die Zeichnung neben Definition 1.8 ist ein **Euler-Venn-Diagramm**, mit dem man Mengen veranschaulichen kann: Mengen werden als kreisförmige Gebilde dargestellt, und alle Elemente innerhalb des kreisförmigen Gebildes gehören zu der Menge.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1.9. (Teilmengen und Obermengen)

(a) Seien $A := \{1,3\}$ und $B := \{1,2,3\}$. Dann gilt $A \subseteq B$ und $B \supseteq A$. Es gilt sogar $A \subsetneq B$ und $B \supsetneq A$.

(b) Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Natürlich gilt auch $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Notation 1.10. („wird definiert durch“)
Die im letzten Beispiel verwendete Notation „:=“ steht für **„wird definiert durch“**. Also: „$A := \{1, 3\}$“ bedeutet, dass die Menge A als die Menge $\{1, 3\}$ mit den Elementen 1 und 3 definiert ist. Der Doppelpunkt steht dabei immer auf der Seite des Objekts, welches definiert wird. „$\mathbb{N} =: B$“ und „$B := \mathbb{N}$“ bedeuten also beide, dass wir die Menge B als die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen definieren.

Als Nächstes lernen wir eine Charakterisierung gleicher Mengen mit Teilmengenbeziehungen kennen.

Hilfssatz 1.11. (Charakterisierung gleicher Mengen)
Seien A, B Mengen. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Wir müssen uns zunächst klar machen, was „... genau dann, wenn ... “ bedeutet. Hilfssatz 1.11 beinhaltet nämlich zwei Aussagen:

- Aus $A = B$ folgt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
- Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$.

Hilfssatz 1.11 ist nützlich, wenn man zeigen will, dass zwei komplizierte Mengen gleich sind. Man zeigt dann die beiden Teilmengenbeziehungen und folgert daraus, dass die Mengen gleich sind.

Beweis von Hilfssatz 1.11:

„Hinrichtung“: Seien A und B zwei Mengen mit $A = B$. Dann haben sie die gleichen Elemente. Also ist jedes Element von A auch ein Element von B, d.h. $A \subseteq B$, und jedes Element von B ist auch ein Element von A, d.h. $B \subseteq A$.

„Rückrichtung“: Seien A und B zwei Mengen mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Wegen $A \subseteq B$ ist jedes Element von A auch ein Element von B. Wegen $B \subseteq A$ kann B keine Elemente enthalten, die nicht in A sind. Also enthält B die gleichen Elemente wie A, und es gilt $A = B$. $\square$

Der obige Beweis ist natürlich elementar, und die Aussage von Hilfssatz 1.11 ist uns anschaulich klar. Das **Verstehen und selber Durchführen von Beweisen** wird in dieser Vorlesung eine zentrale Rolle spielen, denn dieses steht im Zentrum des „mathematischen Denkens und Arbeitens“.

Wir sehen auch, dass es mühselig ist, einen solchen Beweis im Wesentlichen nur mit Worten und (bis auf $=$, $\subseteq$) fast ohne mathematische Notation durchzuführen. In Kapitel 2 werden wir die nötige Notation zum Lesen und knapperen Aufschreiben von Mathematik und verschiedene Beweistechniken kennenlernen.

Zuletzt halten wir die Notation für Intervalle fest.

Definition 1.12. (Intervalle)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die ***beschränkten Intervalle*** *sind:*

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\} && \textit{(abgeschlossenes Intervall)},\\
]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\} && \textit{(offenes Intervall)},\\
[a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x < b\} && \textit{(halboffenes Intervall)},\\
]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x \leq b\} && \textit{(halboffenes Intervall)}.
\end{aligned}$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die ***unbeschränkten Intervalle*** *sind:*

$$\begin{aligned}
[a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x\},\\
]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x\},\\
]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x \leq b\},\\
]-\infty,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < b\},\\
]-\infty,\infty[&:= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dabei steht das Symbol „∞“ für ***„unendlich“****. Bei ∞ bzw. $-\infty$ steht immer die nach außen geöffnete Klammer, da weder ∞ noch $-\infty$ reelle Zahlen sind und daher nicht zum Intervall gehören.*

Es gibt auch noch eine alternative Notation für Intervalle mit runden und eckigen Klammern, bei der die „offenen Enden“ der Intervalle anders notiert werden:

$$(a,b) := \,]a,b[\,, \qquad (a,b] := \,]a,b], \qquad [a,b) := [a,b[\,.$$

Wir wollen aber die Notation aus Definition 1.12 verwenden.

1.2 Mengenoperationen

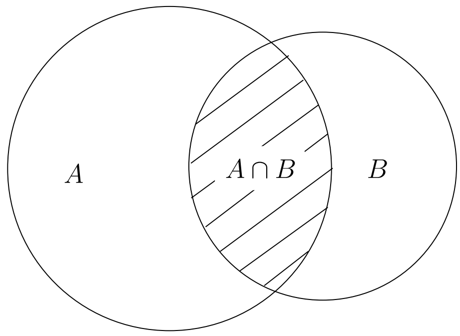
In diesem Teilkapitel lernen wir die folgenden Mengenoperationen kennen: das Schneiden und das Vereinigen von Mengen, sowie das Bilden einer Differenzmenge. Alle Mengenoperationen werden durch Euler-Venn-Diagramme veranschaulicht.

Definition 1.13. (Durchschnitt von Mengen und disjunkte Mengen)

*(1) Der **Durchschnitt** (oder die **Schnittmenge**) $A \cap B$ (in Worten: „A geschnitten mit B“) der Mengen A, B ist die Menge*

$$A \cap B := \{x \ : \ x \in A \ \textit{und} \ x \in B\}.$$

*(2) Ist $A \cap B = \emptyset$, so sind A und B **disjunkt**.*



Es gilt immer $A \cap B = B \cap A$.

Beispiel 1.14. (Durchschnitt von Mengen)

(a) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

(b) $\mathbb{Z} \cap [0, \infty[= \mathbb{N}_0$

(c) $[2, 7] \cap]3, 11[=]3, 7]$

(d) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und das Intervall $[-1, 0]$ sind disjunkt, denn $\mathbb{N} \cap [-1, 0] = \emptyset$.

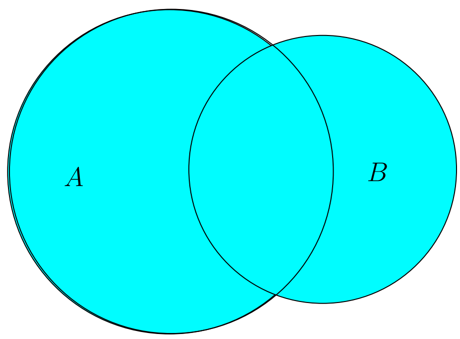
Als Nächstes definieren wir die Vereinigung zweier Mengen.

Definition 1.15. (Vereinigung von Mengen)

*Die **Vereinigung** (oder **Vereinigungsmenge**) $A \cup B$ (in Worten: „A vereinigt mit B„) der Mengen A, B ist die Menge*

$$A \cup B := \{x \ : \ x \in A \ \textit{oder} \ x \in B\}.$$

Mit „oder“ ist das „einschließende oder“ gemeint (und nicht „entweder ... oder“).



Also gilt: $x \in A \cup B$ liegt in A oder in B oder auch in beiden Mengen A und B.

Es gilt immer $A \cup B = B \cup A$.

Betrachten wir auch hierzu einige Beispiele.

Beispiel 1.16. (Vereinigung von Mengen)

(a) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

(b) $]-\infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, \infty[= \mathbb{R}$

(c) $\mathbb{N}_0 \cup \big\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n < 0\big\} = \mathbb{Z}$

(d) $\big\{\emptyset, \mathbb{N}\big\} \cup \{3, 5, 7\} = \big\{3, 5, 7, \emptyset, \mathbb{N}\big\}$

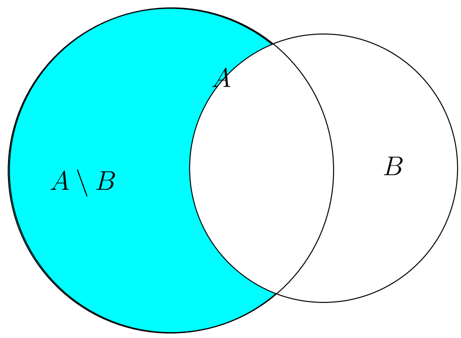
Als Letztes lernen wir den Begriff der Differenz zweier Mengen kennen.

Definition 1.17. (Differenz von Mengen)

*(1) Seien A, B Mengen. Die **Differenz** (oder **Differenzmenge**) $A \setminus B$ (in Worten: „A ohne B“) ist die Menge*

$$A \setminus B := \{x \ : \ x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

*(2) Ist $B \subseteq A$, so heißt $A \setminus B$ auch das **Komplement von** B **in** A.*



Beispiel 1.18. (Differenz von Mengen)

(a) $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\}, \quad \{3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\}$.

Wir sehen an diesem Beispiel, dass im Allgemeinen (d.h. bis auf mögliche Sonderfälle) gilt $A \setminus B \neq B \setminus A$.

(b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 = \{-1, -2, -3, \ldots\} = \big\{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$ ist die Menge der negativen ganzen Zahlen.

(c) Die irrationalen Zahlen sind das Komplement der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen, also: Menge der irrationalen Zahlen $:= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(d) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

Bemerkung 1.19. (mehrere Mengenoperationen)

Wendet man mehrere Mengenoperationen an, so ist es ganz wichtig, dass **Klammern gesetzt sind**, damit klar ist, in welcher Reihenfolge die Mengenoperationen auszuführen sind! Beispielsweise gilt im Allgemeinen (d.h. bis auf mögliche Sonderfälle)

$$A \setminus (B \cup C) \neq (A \setminus B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C,$$

wie man sich leicht an den folgenden Beispielen klar macht:

Seien $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{-1, 0, 1, 2\}$ und $C := \{3, 4, 5, 6\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \emptyset \\ &\neq (A \setminus B) \cup C = \{3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ &\neq (A \cap B) \cup C = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Es gibt Ausnahmen, bei denen man keine Klammen setzen muss, nämlich wenn alle Mengenoperationen $\cup$ oder wenn alle Mengenoperationen $\cap$ sind:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Weil die Klammersetzung hier keine Rolle spielt, lässt man sie (wie jeweils im Ausdruck ganz rechts) in der Regel weg.

1.3 Kartesisches Produkt und Mächtigkeit endlicher Mengen

In diesem Teilkapitel lernen wir zwei wichtige Konzepte kennen: das kartesische Produkt und die Mächtigkeit endlicher Mengen.

Definition 1.20. (geordnetes Paar und kartesisches Produkt)
Seien A, B Mengen.

(1) Ein Objekt der Form (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$ heißt ein ***geordnetes Paar****.*

(2) $A \times B := \big\{(a, b) \ : \ a \in A,\ b \in B\big\}$ (in Worten: „A kreuz B“) ist das ***kartesische Produkt von*** *A* ***und*** *B.*

Bemerkung 1.21. (geordnetes Paar und kartesisches Produkt)

(1) Der Name **geordnetes** Paar macht deutlich, dass **die Reihenfolge eine Rolle spielt**. Im Allgemeinen (d.h. bis auf Sonderfälle) ist also $(a, b) \neq (b, a)$. Genauer gilt $(a, b) = (b, a)$ genau dann, wenn $a = b$ ist.

(2) Im Allgemeinen (d.h. bis auf Sonderfälle) gilt $A \times B \neq B \times A$. (Siehe dazu auch Beispiel 1.22 (a).)

(3) Man kann für Mengen A, B, C das kartesische Produkt $A \times B \times C$ als Menge aller geordneten Tripel (a, b, c) mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ definieren. Analog kann man auch für mehr als drei Mengen vorgehen. Wir untersuchen dieses auf einem Übungszettel.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1.22. (geordnetes Paar und kartesisches Produkt)

(a) Seien $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{7, 8\}$. Dann ist das kartesische Produkt $A \times B$ von A und B gegeben durch

$$A \times B = \big\{(1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 8), (3, 7), (3, 8)\big\}.$$

Das kartesische Produkt $B \times A$ von B und A ist gegeben durch

$$B \times A = \big\{(7, 1), (7, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2), (8, 3)\big\}.$$

Wir haben also ein Gegenbeispiel, für das $A \times B = B \times A$ nicht gilt. Daraus können wir schließen, dass im Allgemeinen $A \times B = B \times A$ nicht gelten kann (d.h. dass $A \times B = B \times A$ nicht für beliebige Mengen A, B gelten kann).

(b) $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\big\}$

kann man sich als die **Menge aller Punkte in der Ebene** veranschaulichen.

(c) $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\big\}$

kann man sich als die **Menge aller Punkte im dreidimensionalen Anschauungsraum** veranschaulichen.

Wir definieren nun die Mächtigkeit einer Menge mit endlich vielen Elementen.

Definition 1.23. (Mächtigkeit einer endlichen Menge)
Sei A eine ***endliche*** *Menge (d.h. eine Menge mit endlich vielen Elementen). Die* ***Mächtigkeit*** *$|A|$ gibt die Anzahl der Elemente in der Menge A an. (Wir sagen: „A hat die Mächtigkeit $|A|$“.) Dabei gilt insbesondere $|\emptyset| = 0$, d.h. die leere Menge hat die Mächtigkeit Null.*

Beispiel 1.24. (Mächtigkeit einer endlichen Menge)

(a) Die Mächtigkeit der Menge $A := \{1, 2, 3, 4, 7, 13\}$ ist $|A| = 6$.

(b) Die Mächtigkeit der Menge $B := \{b, d, e\}$ ist $|B| = 3$. Dabei setzen wir voraus, dass keine zwei der Buchstaben b, d, e gleich sind, also $b \neq d$, $b \neq e$ und $d \neq e$.

Hilfssatz 1.25. (Rechnen mit Mächtigkeiten)
Seien A und B zwei endliche *Mengen. Dann gelten:*

(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
und für $A \cap B = \emptyset$ ist insbesondere $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(2) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

Zur Illustration von Hilfssatz 1.25 betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 1.26. (Rechnen mit Mächtigkeiten)
Betrachten wir die Mengen $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{3, 5, 7, 9\}$. Dann ist $A \cap B = \{3\}$, und es gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 4 - 1 = 7,$$
$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 4 - 1 = 3.$$

In der Tat finden wir mit der direkten Berechnung

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \qquad \text{und} \qquad A \setminus B = \{1, 2, 4\},$$

und diese Mengen haben die Mächtigkeiten $|A \cup B| = 7$ und $|A \setminus B| = 3$.

In dem Beweis von Hilfssatz 1.25 steckt auch die Anschauung des Satzes.

Beweis von Hilfssatz 1.25:

(1) Bei der Vereinigung von A und B werden Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen (also Elemente in $A \cap B$), nur einmal in $A \cup B$ aufgenommen. In $|A|+|B|$ werden solche Elemente aus $A \cap B$ aber doppelt gezählt. Daher muss noch $|A \cap B|$ von $|A| + |B|$ abgezogen werden, wenn man $|A \cup B|$ berechnet. Also gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(2) In $A \setminus B$ wurden aus A alle Elemente entfernt, die auch in B liegen. Diese Elemente sind aber gerade die Elemente aus $A \cap B$. Daher gilt $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$. $\square$

KAPITEL 2

Aussagen, Logik und Beweistechniken

In diesem Kapitel lernen wir zunächst elementare Logik kennen. Dabei werden wir Aussagen, Wahrheitswerte, sowie Negationen (Verneinungen) von Aussagen und Verknüpfungen von Aussagen mit „und“ bzw. „oder“ kennenlernen. Insbesondere werden wir die Implikation (die kausale „wenn-dann“-Beziehung) zweier Aussagen einführen und dem Konzept der Äquivalenz (der kausalen „genau dann, wenn“-Beziehung) von Aussagen begegnen. Weiterhin lernen wir Quantoren und Aussageformen kennen.

Anschließend werden wir die bereits gelernten Elemente der Logik verwenden, um Beweistechniken zu lernen. Neben dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass Sie vielleicht aus der Schule kennen, werden wir direkte Beweise, Beweise durch Kontraposition und den Beweis durch Widerspruch kennenlernen.

2.1 Aussagen und Logik

Zum Verständnis mathematischer Aussagen ist es notwendig, dass wir die Grundelemente der Logik kennenlernen.

Wir definieren zunächst, was eine Aussage ist.

Definition 2.1. (Aussage)
*Eine **Aussage** A ist ein Satz, dem man einen der beiden **Wahrheitswerte wahr** (abgekürzt: w) oder **falsch** (abgekürzt: f) zuordnen kann.*

Betrachten wir ein paar Beispiele.

Beispiel 2.2. (Aussagen)

(a) Die Aussage $A =$ „Deutschland liegt in Europa.“ ist wahr.

(b) Die Aussage $B =$ „$2 + 3 = 5$“ (für die normale Addition $+$ der reellen Zahlen) ist wahr.

(c) Die Aussage $C =$ „Alle Hunde sind braun.“ ist falsch, da es auch weiße, schwarze und gescheckte Hunde gibt.

(d) Die Aussage $D =$ „$2 \cdot 3 = 7$“ (für die normale Multiplikation $\cdot$ der reellen Zahlen) ist falsch.

Wir können für jede Aussage auch ihre Verneinung, mathematisch „Negation“ genannt, bilden, die ebenfalls eine Aussage ist.

Definition 2.3. (Negation)
*Die **Negation** (oder **Verneinung**) der Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet. Der Wahrheitswert der Negation $\neg A$ hängt vom Wahrheitswert der Aussage A ab: Ist A wahr, so ist die $\neg A$ falsch, und ist A falsch, so ist $\neg A$ wahr. Wir können dieses mit einer **Wahrheitstafel für die Negation** beschreiben:*

Dabei ist die Wahrheitstafel wie folgt zu lesen: In der ersten Spalte finden wir die möglichen Wahrheitswerte für A und in der zweiten Spalte die zugehörigen Wahrheitswerte für $\neg A$.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Betrachten wir die Negation unserer Beispiele.

Beispiel 2.4. (Negation)

(a) Die Negation der wahren Aussage $A =$ „Deutschland liegt in Europa.“ ist die falsche Aussage $\neg A =$ „Deutschland liegt nicht in Europa.“.

(b) Die Negation der wahren Aussage $B =$ „$2+3 = 5$“ ist die falsche Aussage $\neg B =$ „$2 + 3 \neq 5$.“.

(c) Die Negation der falschen Aussage $C =$ „Alle Hunde sind braun“ ist die wahre Aussage $\neg C =$ „Nicht alle Hunde sind braun.“ bzw. logisch gleichwertig $\neg C =$ „Es gibt mindestens einen Hund, der nicht braun ist.“.

(d) Die Negation der falschen Aussage $D =$ „$2 \cdot 3 = 7$“ ist die wahre Aussage $\neg D =$ „$2 \cdot 3 \neq 7$“. (Beachten Sie, dass die Negation **nicht** „$2 \cdot 3 = 6$“ ist.)

Wir können zwei Aussagen A und B mit „und“ bzw. mit dem mathematischen „(einschließenden) oder“ verbinden. Der Wahrheitswert der so erhaltenen Aussage „A und B“ bzw. „A oder B“ hängt natürlich von den Wahrheitswerten der beiden Aussagen A und B ab.

Definition 2.5. (Konjunktion und Disjunktion)

*(1) Die **Konjunktion** verknüpft zwei Aussagen A, B durch **und**: „A und B“, bzw. in Zeichen „$A \wedge B$“. Beide Aussagen A und B müssen wahr sein, damit die Konjunktion wahr ist.*

*(2) Die **Disjunktion** verknüpft zwei Aussagen A, B durch das **(einschließende) oder**: „A oder B“, bzw. in Zeichen „$A \vee B$“. Es muss mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr sein, damit die Disjunktion wahr ist. (Es dürfen aber auch beide wahr sein – im Gegensatz zum alltäglichen Gebrauch von „oder“ als „entweder ... oder“.)*

*Wir erhalten damit die folgende **Wahrheitstafel für die Konjunktion und die Disjunktion**:*

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Beispiel 2.6. (Konjunktion und Disjunktion)
Es seien $A =$ „$3 > 0$“ (wahr) und $B =$ „$3 < 0$“ (falsch). Dann sind:

- $A \vee B =$ „$3 > 0$ oder $3 < 0$“ (wahr),
- $A \wedge B =$ „$3 > 0$ und $3 < 0$“ (falsch).

Betrachten wir ein etwas aufwendigeres Beispiel.

Beispiel 2.7. (Konjunktion und Disjunktion)
Eine Geldbörse enthalte 20 Euro.

- $A =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro.“ ist wahr.
- $B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“ ist falsch.
- $A \wedge B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und mehr als 30 Euro.“ ist falsch. („Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und mehr als 30 Euro.“ ist logisch gleichwertig zu der Aussage „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“.) Dass $A \wedge B$ falsch ist, sagt uns auch die Wahrheitstafel, denn für A wahr und B falsch folgt, dass $A \wedge B$ falsch ist.
- $A \vee B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro oder mehr als 30 Euro.“ ist wahr. Aus der Wahrheitstafel liest man hier ab, dass $A \vee B$ wahr ist, da A wahr und B falsch ist.
- Die Aussage $A \wedge (\neg B)$ ist wahr, denn A ist wahr und $\neg B$ ist wahr (da B falsch ist). Damit ist gemäß der Wahrheitstafel $A \wedge (\neg B)$ in der Tat wahr.

  $\neg B =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 30 Euro.“ (oder logisch gleichwertig $\neg B =$ „Die Geldbörse enthält höchstens 30 Euro.“).

  $A \wedge (\neg B) =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und nicht mehr als 30 Euro.“.

Wir hätten unser Beispiel auch mit Mathematik (statt mit Worten) beschreiben können, indem wir eine Variable n (in Euro) für das Geld in der Geldbörse einführen. Dann gilt $n = 20$, und die Aussagen sind nun:

- $A =$ „$n > 10$“ (wahr); $B =$ „$n > 30$“ (falsch); $\neg B =$ „$n \leq 30$“ (wahr)
- $A \wedge B =$ „$n > 10$ und $n > 30$“ $=$ „$n > 30$“ (falsch)
- $A \vee B =$ „$n > 10$ oder $n > 30$“ (wahr)
- $A \wedge (\neg B) =$ „$n > 10$ und $n \leq 30$“ $=$ „$10 < n \leq 30$“ (wahr)

Wir betrachten nun die Negation der Konjunktion bzw. Disjunktion zweier Aussagen.

Hilfssatz 2.8. (Negation der Disjunktion bzw. Konjunktion)
Seien A, B zwei Aussagen.

*(1) Für die **Verneinung von durch Disjunktion verknüpften Aussagen** gilt die folgende Wahrheitstafel:*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	w	w	f	w	w

An den letzten beiden Spalten der Wahrheitstafel sieht man, dass die Aussage „$\neg(A \vee B)$“ und die Aussage „$(\neg A) \wedge (\neg B)$“ die gleichen Wahrheitswerte haben. Diese beiden Aussagen sind logisch gleichwertig: ***„nicht (A oder B)“ bedeutet dasselbe wie „(nicht A) und (nicht B).“***

(2) *Für die* ***Verneinung von durch Konjunktion verknüpften Aussagen*** *gilt die folgende Wahrheitstafel:*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

An den letzten beiden Spalten der Wahrheitstafel sieht man, dass die Aussage „$\neg(A \wedge B)$“ und die Aussage „$(\neg A) \vee (\neg B)$“ die gleichen Wahrheitswerte haben. Diese beiden Aussagen sind logisch gleichwertig: ***„nicht (A und B)“ bedeutet dasselbe wie „(nicht A) oder (nicht B).“.***

Beispiel 2.9. (Konjunktion und Disjunktion)
Es seien $A =$ „$3 > 0$“ (wahr) und $B =$ „$3 < 0$“ (falsch).

Dann sind $\neg A =$ „$3 \leq 0$“ (falsch) und $\neg B =$ „$3 \geq 0$“ (wahr).

Wir bestimmen nun die Negation der Konjunktion und Disjunktion:

- $A \vee B =$ „$3 > 0$ oder $3 < 0$“ (wahr),

- $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) =$ „$3 \leq 0$ und $3 \geq 0$“ (falsch),
- $A \wedge B =$ „$3 > 0$ und $3 < 0$“ (falsch),
- $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) =$ „$3 \leq 0$ oder $3 \geq 0$“ (wahr).

Betrachten wir wieder die Aussagen aus unserem Beispiel 2.7.

Beispiel 2.10. (Negation von Konjunktion und Disjunktion)
Eine Geldbörse enthalte 20 Euro.

- $A =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro.“ ist wahr.
- $B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“ ist falsch.
- $A \wedge B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und mehr als 30 Euro.“ $=$ „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“ ist falsch.
- $\neg(A \wedge B) =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 30 Euro.“ $=$ „Die Geldbörse enthält höchstens 30 Euro.“ ist wahr.
- $\neg A =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 10 Euro.“ ist falsch.

  $\neg B =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 30 Euro.“ ist wahr.

  $(\neg A) \vee (\neg B)$ ist wahr, weil $\neg B$ wahr ist. Nach dem Hilfssatz 2.8 ist die Aussage $(\neg A) \vee (\neg B)$ logisch gleichwertig zur Aussage $\neg(A \wedge B)$.

  $(\neg A) \vee (\neg B) =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 10 Euro oder nicht mehr als 30 Euro.“ $=$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 30 Euro.“

  (Wir dürfen in $(\neg A) \vee (\neg B)$ „nicht mehr als 10 Euro“ weglassen, weil aus „nicht mehr als 10 Euro“ immer „nicht mehr als 30 Euro“ folgt, d.h. durch „nicht mehr als 30 Euro“ sind auch alle Fälle, in denen „nicht mehr als 10 Euro“ gilt, mit erfasst.)

Auch hier wollen wir unser Beispiel mit Mathematik (statt mit Worten) beschreiben, indem wir eine Variable n (in Euro) für das Geld in der Geldbörse einführen. Dann gilt $n = 20$, und die Aussagen sind nun:

- $A =$ „$n > 10$“ (wahr); $B =$ „$n > 30$“ (falsch)
- $\neg A =$ „$n \leq 10$“ (falsch); $\neg B =$ „$n \leq 30$“ (wahr)
- $A \wedge B =$ „$n > 10$ und $n > 30$“ $=$ „$n > 30$“ (falsch)
- $\neg(A \wedge B) =$ „$n \leq 30$“ (wahr)
- $(\neg A) \vee (\neg B) =$ „$n \leq 10$ oder $n \leq 30$“ $=$ „$n \leq 30$“ (wahr)

Bemerkung 2.11. (Negation von „und“ bzw. „oder“)
Wir können uns als „Faustregel“ merken, dass **bei der Negation** einer Verknüpfung von Aussagen **aus einem „und“ ein „oder“** wird und dass **aus einem „oder“ ein „und“** wird. Vergleiche hierzu Hilfssatz 2.8.

Beispiel 2.12. (Negation von Konjunktion und Disjunktion)

(a) Die Aussage „Jede Lösung von $x^2 = 4$ erfüllt $x = 2$ **oder** $x = -2$.“ ist wahr. Ihre Negation ist die falsche Aussage „**Nicht jede** Lösung von $x^2 = 4$ erfüllt $x = 2$ **oder** $x = -2$.“ oder gleichbedeutend „**Es gibt mindestens eine** Lösung von $x^2 = 4$, die $x \neq 2$ **und** $x \neq -2$ erfüllt.“.

(b) Wann gilt $x \notin A \cup B$? Wir haben $A \cup B = \big\{x \ : \ x \in A \textbf{ oder } x \in B\big\}$. Also folgt dass $x \notin A \cup B$ gilt, wenn $x \notin A$ **und** $x \notin B$ gilt.

Wann gilt $x \notin A \cap B$? Wir haben $A \cap B = \big\{x \ : \ x \in A \textbf{ und } x \in B\big\}$. Also folgt dass $x \notin A \cap B$ gilt, wenn $x \notin A$ **oder** $x \notin B$ gilt.

Die erste der beiden Negationen sieht man relativ leicht, aber bei der zweiten ist die korrekte Negation ohne die Regeln aus der Wahrheitstafel nicht offensichtlich.

(c) Auf einem Übungszettel haben wir bewiesen, dass gilt

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Nun können wir dieses leicht nachweisen:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \big\{x \in A \ : \ x \notin B \cup C\big\} \\ &= \big\{x \in A \ : \ x \notin \{y \ : \ y \in B \textbf{ oder } y \in C\}\big\} \\ &= \big\{x \in A \ : \ x \notin B \textbf{ und } y \notin C\big\} \\ &= \big\{x \in A \ : \ x \notin B\big\} \cap \big\{x \in A \ : \ x \notin C\big\} \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten in die dritte Zeile genutzt haben, dass die Verneinung von „oder“ ein „und“ ergibt.

(d) Sei A eine Menge reeller Zahlen. Dann kann man das **Minimum** von A (sofern ein solches existiert) wie folgt charakterisieren:

Definition: Eine Menge reeller Zahlen A hat ein Minimum, wenn es eine reelle Zahl m gibt für die gilt: (i) $m \leq x$ für alle $x \in A$ **und** (ii) $m \in A$. Man schreibt dann auch $\min(A) := m$.

Beispiele:

- $[-1,1]$ hat das Minimum $\min\big([-1,1]\big) = -1$, denn (i) $-1 \leq x$ für alle $x \in [-1,1]$, und (ii) $-1 \in [-1,1]$.
- $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ hat kein Minimum.

Wie bestimmt man, wenn eine Menge **kein** Minimum hat?

Eine Menge reeller Zahlen A hat kein Minimum, wenn es keine reelle Zahl m gibt für die gilt: (i) $m \leq x$ für alle $x \in A$ und (ii) $m \in A$.

Nach der Negation der Konjunktion folgt:

Eine Menge reeller Zahlen A hat kein Minimum, wenn für jede reelle Zahl m gilt: („$m \leq x$ für alle $x \in A$" ist falsch) **oder** $m \notin A$.

Beispiel: Als Kandidaten für ein Minimum von $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ kommen nur Zahlen der Form $\frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ in Frage (weil das Minimum zu der Menge $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ gehören muss), aber für diese gibt es immer eine kleinere Zahl $\frac{1}{k+1} \in \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Also kann für kein $\frac{1}{k} \in \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ gelten $\frac{1}{k} \leq x$ für alle $x \in \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, d.h. $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ hat kein Minimum.

Es gibt Aussagen, die immer (d.h. egal unter welchen Umständen) den Wert „wahr" bzw. den Wert „falsch" annehmen.

Definition 2.13. (Widerspruch und Tautologie)

(1) Eine Aussage, die immer (d.h. egal unter welchen Umständen) den Wert falsch annimmt, bezeichnet man als ***Widerspruch****.*

(2) Eine Aussage, die immer (d.h. egal unter welchen Umständen) den Wert wahr annimmt, bezeichnet man als ***Tautologie****.*

Beispiel 2.14. (Widerspruch und Tautologie)

Die Aussage $A =$ „Es regnet." kann je nach der aktuellen Wetterlage wahr oder falsch sein. Die Negation ist $\neg A =$ „Es regnet nicht.".

(a) Die Aussage $A \vee (\neg A) =$ „Es regnet, oder es regnet nicht." ist dagegen unabhängig von der aktuellen Wetterlage immer wahr. (Je nach Wetterlage hat entweder A oder $\neg A$ den Wahrheitswert wahr. Somit hat $A \vee (\neg A)$ immer den Wahrheitswert wahr.) Daher ist „Es regnet, oder es regnet nicht." eine Tautologie.

(b) Die Aussage $A \wedge (\neg A) =$ „Es regnet, und es regnet nicht.“ ist dagegen unabhängig von der aktuellen Wetterlage immer falsch. (Je nach Wetterlage hat entweder A oder $\neg A$ den Wahrheitswert falsch. Somit hat $A \wedge (\neg A)$ immer den Wahrheitswert falsch.) Daher ist „Es regnet, und es regnet nicht.“ ein Widerspruch.

Beispiel 2.15. (Widerspruch und Tautologie)

(a) In den reellen Zahlen ist „$1 = 2$“ immer falsch. Daher ist diese Aussage ein Widerspruch.

(b) „Wenn n eine gerade natürliche Zahl ist, dann ist n eine gerade natürliche Zahl.“ ist immer wahr und somit eine Tautologie.

(c) „Eine natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.“ ist immer wahr und somit eine Tautologie.

Der Widerspruch ist sehr wichtig, denn er ist der zentrale Punkt in einem Widerspruchsbeweis. Wir lernen das Konzept des Widerspruchsbeweises in Teilkapitel 2.4 kennen.

2.2 Implikationen und Äquivalenzen

Fast alle mathematischen Sätze, Hilfssätze, Lemmata („Lemma“ ist eine andere Bezeichnung für einen Hilfssatz) und Theoreme (Sätze oder besonders wichtige Sätze) sind Implikationen oder Äquivalenzaussagen. Um mathematische Aussagen richtig lesen zu können, und damit richtig anzuwenden und einen korrekten Beweis der Aussage geben zu können, ist es zentral Implikationen und Äquivalenzen zu verstehen.

In diesem Teilkapitel benutzen wir in unseren Beispielen gerade und ungerade (ganze) Zahlen: Eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ heißt **gerade**, wenn sie durch 2 teilbar ist mit Ergebnis in den ganzen Zahlen, d.h. wenn $m/2 \in \mathbb{Z}$. Gilt $m/2 \in \mathbb{Z}$, so sagen wir auch kürzer „m ist durch 2 teilbar“ und lassen „mit Ergebnis in den ganzen Zahlen“ weg. Die Aussage $m/2 \in \mathbb{Z}$ bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m/2 = k$, oder anders ausgedrückt $m = 2\,k$, gibt. Eine ganze Zahl heißt **ungerade**, wenn sie nicht gerade ist. – Wir werden gerade bzw. ungerade (ganze) Zahlen also folgendermaßen charakterisieren:

- Eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ heißt **gerade**, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2k$ gibt.
- Eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ heißt **ungerade**, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2k + 1$ gibt.

(Bei der Charakterisierung von „ungerade“ nutzen wir, dass $(2k+1)/2 = k+\frac{1}{2}$ nicht in Z liegt.) Mit $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, und $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, können wir alle ganzen Zahlen darstellen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Verknüpfung von Aussagen durch die kausale Beziehung, dass „aus einer Aussage A eine andere Aussage B folgt“, oder (in anderen Worten) „Aussage A impliziert Aussage B.“.

Definition 2.16. (Implikation)
*Seien A und B zwei Aussagen. Die **Implikation** „$A \Rightarrow B$“ ist die Aussage „Aus A folgt B.“ oder gleichbedeutend „Wenn A gilt, dann gilt B.“ oder gleichbedeutend „A impliziert B.“*

*Für die Implikation „$A \Rightarrow B$“ gilt die rechts stehende **Wahrheitstafel**, wobei der Wahrheitswert von „$A \Rightarrow B$“ von den Wahrheitswerten von A und B abhängt:*

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Überraschend ist der Grundsatz **„Aus Falschem folgt Alles.“** („Ex falso quodlibet.“), der durch die dritte und vierte Zeile in der Wahrheitstafel wiedergegeben wird: Sie können aus einer falschen Aussage, z.B. „Die Erde ist eine Scheibe.“, lückenlos eine wahre Aussage, z.B. „7 ist eine Primzahl.“, ableiten. Die wahre Aussage (z.B. „7 ist eine Primzahl.“) wird nicht falsch, weil wir von einer falschen Aussage (z.B. „Die Erde ist eine Scheibe.“) ausgegangen sind.

Man kann sich **„Aus Falschem folgt Alles.“** gut an dem folgenden Beispiel klar machen $(A \Rightarrow B) =$ „Wenn morgen schönes Wetter ist, so gehen wir spazieren.“ Hier ist Aussage $A =$ „Morgen ist schönes Wetter.“ und Aussage $B =$ „Wir gehen spazieren.“. Fasst man die Aussage als ein Versprechen auf, so wird der Sinn der Wahrheitstafel in Definition 2.16 ersichtlich. Nur wenn morgen gutes Wetter ist und morgen kein Spaziergang stattfindet, so wird das Versprechen gebrochen (Wahrheitswert: falsch). Ist morgen gutes Wetter und findet ein Spaziergang statt, so wird das Versprechen gehalten (Wahrheitswert: wahr). Ist dagegen das Wetter morgen schlecht, so wird das Versprechen ebenfalls gehalten (Wahrheitswert wahr) – egal, ob ein Spaziergang stattfindet oder nicht, – denn $(A \Rightarrow B) =$ „Wenn morgen schönes Wetter ist, so gehen wir spazieren.“ macht über diesen Fall keine Aussage.

Bemerkung 2.17. (Anwendung auf mathematische Beweise)
Wenn wir in der Mathematik (für zwei gegebene Aussagen A und B) beweisen wollen, dass eine Aussage „$A \Rightarrow B$“ wahr oder falsch ist, dann beschäftigen wir uns nur mit den ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel in Definition 2.16.

(1) **Beweis**, dass **„Aus der Aussage A folgt die Aussage B.“** gilt (also **wahr** ist):

Wir nehmen an, dass Aussage A gilt (also, dass A wahr ist). Die Aussage A ist unsere **Voraussetzung**. Die Aussage B ist unsere **Behauptung**. Dann zeigen wir, dass wir aus Aussage A die Aussage B schlussfolgern können (also schließen können, dass B ist wahr). Damit haben wir gemäß der ersten Zeile der Wahrheitstafel in Definition 2.16 gezeigt, dass „$A \Rightarrow B$“ gilt (d.h. „$A \Rightarrow B$“ ist wahr).

(2) **Beweis**, dass **„Aus der Aussage A folgt die Aussage B.“ nicht** gilt (also **falsch** ist):

Wir nehmen an, dass die Aussage A gilt (also, dass A wahr ist) und zeigen, dass die Aussage B nicht wahr ist (also, dass B falsch ist). Dieses kann z.B. geschehen, indem man ein Gegenbeispiel angibt, für das Aussage A gilt, aber das B nicht erfüllt. Dann folgt nach der zweiten Zeile der Wahrheitstafel in Definition 2.16, dass „$A \Rightarrow B$“ falsch ist.

Illustrieren wir dieses für zwei Beispiele.

Beispiel 2.18. (Beweis einer Implikation)
Wir wollen zeigen: „Wenn $n \in \mathbb{Z}$ gerade ist, dann ist $n+1 \in \mathbb{Z}$ ungerade.“ oder gleichwertig:

$$„n \in \mathbb{Z} \text{ ist gerade.} \qquad \Longrightarrow \qquad n+1 \in \mathbb{Z} \text{ ist ungerade.“}$$

Hier ist die Voraussetzung (Aussage A) „$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade.“, und die Behauptung (Aussage B) ist „$n+1 \in \mathbb{Z}$ ist ungerade.“

Beweis: Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige gerade ganze Zahl. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$. Daraus folgt $n+1 = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $n+1 \in \mathbb{Z}$ ist eine ungerade ganze Zahl. $\square$

Beispiel 2.19. (Beweis einer Implikation)
Wir wollen zeigen: „Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n ungerade ist, dann ist n^2 ungerade.“,

oder gleichwertig:

„Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $\quad n$ ist ungerade. $\quad \Longrightarrow \quad n^2$ ist ungerade.“

(Hier ist „Sei $n \in \mathbb{Z}$.“ eine generelle Voraussetzung für die Implikation.)

Beweis: Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ungerade Zahl. Dann ist $n = 2k+1$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 = 2\,\underbrace{(2\,k^2 + 2\,k)}_{=:\,\ell\,\in\,\mathbb{Z}} + 1,$$

d.h. $n^2 = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$. Also ist n^2 ungerade. $\square$

Wir können den Beweis auch mit mehr mathematischer Notation und weniger Text aufschreiben:

Beweis: Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ungerade Zahl.

$\Longrightarrow \quad n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \quad n^2 = (2k+1)^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 = 2\,\underbrace{(2\,k^2 + 2\,k)}_{=:\,\ell\in\,\mathbb{Z}} + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \quad n^2 = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow \quad n^2$ ist ungerade. $\square$

Bemerkung 2.20. (Implikationen lesen und verstehen)
Wichtig ist auch, das man eine Implikation „$A \Rightarrow B$“ richtig liest, denn nicht immer ist sie in der Form „Aus Aussage A folgt Aussage B.“ formuliert. Man muss also identifizieren

- was die Voraussetzung (Aussage A) ist,
- was die Behauptung (Aussage B) ist,
- gegebenenfalls welche generellen Voraussetzungen gelten.

Erst dann kann man die Implikation anwenden und beweisen.

Beispiel: Die Aussage „Das Produkt zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist gerade.“ ist eine Implikation: Die Voraussetzung (Aussage A) ist, dass zwei beliebige aufeinanderfolgende ganze Zahlen gegeben sind, und die Folgerung (Aussage B) ist, dass das Produkt dieser Zahlen gerade ist. Also:

„Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n\,(n+1)$ eine gerade ganze Zahl.“

= „Wenn $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist $n\,(n+1)$ eine gerade ganze Zahl.“

Nun betrachten wir die Situation, dass die Aussage A die Aussage B impliziert, aber gleichzeitig auch die Aussage B die Aussage A impliziert.

Definition 2.21. (Äquivalenz)
*Die **Äquivalenz** zweier Aussagen A und B bedeutet, dass B aus A folgt (d.h. „$A \Rightarrow B$“) **und** dass A aus B folgt (d.h. „$B \Rightarrow A$“ oder logisch gleichwertig „$A \Leftarrow B$“). Man schreibt für die Aussage „$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$“ kürzer in Zeichen „$A \Leftrightarrow B$“, und wir sagen „Die Aussagen A und B sind **äquivalent**.“.*

Wir stellen die Wahrheitstafel für die Äquivalenz auf.

Hilfssatz 2.22. (Wahrheitstafel für die Äquivalenz)
Die Wahrheitstafel für „$A \Leftrightarrow B$“ (also für „$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$“) besagt, dass „$A \Leftrightarrow B$“ wahr ist, wenn A und B dieselben Wahrheitswerte besitzen:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Beweis von Hilfssatz 2.22: Die Aussage „$A \Leftrightarrow B$“ ist per Definition die Aussage

$$„(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)“.$$

Mit den Wahrheitswerten von A und von B können wir mit der Wahrheitstafel aus Definition 2.16 die Wahrheitswerte für „$A \Rightarrow B$„ bzw. für „$B \Rightarrow A$“ angeben. Aus diesen können wir mit der Wahrheitstafel für die Konjunktion (siehe

Definition 2.5) die Wahrheitswerte für „$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$“ bestimmen. Dieses liefert die Tabelle in Hilfssatz 2.22. □

Bemerkung 2.23. (Äquivalenzen lesen, anwenden und beweisen)

(1) Bei einer Äquivalenz „$A \Leftrightarrow B$“ interessiert in der Praxis meist nur die erste Zeile in der Wahrheitstafel. **Wenn wir „$A \Leftrightarrow B$“ beweisen**, zeigen wir in der Sprache der Logik das Folgende:

- Ist die Aussage A wahr, so schließen wir, dass auch die Aussage B wahr ist, und damit hat „$A \Rightarrow B$“ den Wahrheitswert „wahr“.
- Ist die Aussage B wahr, so schließen wir, dass auch die Aussage A wahr ist, und damit hat „$B \Rightarrow A$“ den Wahrheitswert „wahr“.

(2) Eine **Äquivalenz** kann wie folgt formuliert sein:

- „Aussage A gilt. $\Longleftrightarrow$ Aussage B gilt.“
- „Aussage A gilt genau dann, wenn Aussage B gilt.“
- „Aussage A gilt dann und nur dann, wenn Aussage B gilt.“
- „Aussage A ist äquivalent zu Aussage B.“

Findet man ein solche Formulierung, so weiß man, dass eine Äquivalenz vorliegt und dass damit **zwei** Implikationen gelten:

„Aussage A gilt. $\Rightarrow$ Aussage B gilt.“ **und**
„Aussage B gilt. $\Rightarrow$ Aussage A gilt.“

Um eine Äquivalenz zu beweisen, muss man **beide** Implikationen beweisen. – Will man einen Satz mit einer Äquivalenz anwenden, so kann man jede der beiden Implikationen einzeln oder beide Implikationen zusammen benutzen.

Betrachten wir zwei Beispiele für eine Äquivalenz.

Beispiel 2.24. (Äquivalenz)
Seien $A =$ „$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade.“ und $B =$ „$n + 1 \in \mathbb{Z}$ ist ungerade.“. In Beispiel 2.18 haben wir bereits gezeigt, dass die Implikation „$A \Rightarrow B$“ gilt.

Gilt auch „$B \Rightarrow A$“? „$B \Rightarrow A$“ ist die Aussage:

„$n + 1 \in \mathbb{Z}$ ist ungerade. $\quad\Longrightarrow\quad$ $n \in \mathbb{Z}$ ist gerade.“

Beweis: Sei $n + 1 \in \mathbb{Z}$ ungerade.

$\Longrightarrow \qquad n + 1 = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \quad n = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \quad n = 2k \in \mathbb{Z}$ ist gerade. $\square$

Da sowohl „$A \Rightarrow B$“ wie auch „$B \Rightarrow A$” wahr sind, gilt die folgende Äquivalenz:

„$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade. $\quad \Longleftrightarrow \quad n+1 \in \mathbb{Z}$ ist ungerade.“

bzw. „$n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann gerade, wenn $n+1 \in \mathbb{Z}$ ungerade ist.“

Gilt eine Implikation, so gilt noch lange nicht immer eine Äquivalenz, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.25. (keine Äquivalenz)
Sie A die Aussage „$n = 2$“ und B die Aussage „$n^2 = 4$“. Dann gilt „$A \Rightarrow B$“, denn wenn $n = 2$ ist, so ist $n^2 = 4$, also: „$n = 2 \quad \Longrightarrow \quad n^2 = 4$“.

Umgekehrt gilt aber **nicht** „$B \Rightarrow A$“, denn aus $n^2 = 4$ folgt ($n = 2$ oder $n = -2$). Genauer können wir durch das Gegenbeispiel $n = -2$ mit $n^2 = (-2)^2 = 4$ zeigen, dass aus $n^2 = 4$ nicht (immer) $n = 2$ folgt.

Um eine Äquivalenz herzustellen, müssen wir die Aussage A erweitern: Ersetzen wir „$n = 2$“ durch „$n = 2$ oder $n = -2$“ so gilt in der Tat:

$$„\big(n = 2 \text{ oder } n = -2 \big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 = 4“.$$

Achtung: An dem letzten Beispiel sieht man, dass man **sehr vorsichtig mit der Verwendung von Äquivalenzpfeilen $\Leftrightarrow$ umgehen sollte**. Will man statt $\Rightarrow$ in einer Kette von Umformungen immer $\Leftrightarrow$ schreiben, so muss man in jedem Schritt prüfen, ob auch tatsächlich zusätzlich zu $\Rightarrow$ auch $\Leftarrow$ gilt, d.h. ob man die Umformung jeweils rückgängig machen kann.

Im nächsten Beispiel sind mehrere Aussagen aufgelistet bei denen direkt oder indirekt eine Äquivalenz vorkommt, damit wir lernen, Aussagen richtig zu lesen.

Beispiel 2.26. (Äquivalenzen lesen und verstehen)

(a) Betrachten wir die folgende Aussage:

„Sei D ein Dreieck. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) D ist ein rechtwinkliges Dreieck.

(ii) Die Summe von zwei Winkeln in D ist 90°.

(iii) Der größte Winkel in D ist 90°.“

Diese Aussage bedeutet, dass **jede der (drei) Aussagen zu jeder an-**

deren äquivalent ist. Also gelten die folgenden Äquivalenzen für ein Dreieck D:

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii): „D ist ein rechtwinkliges Dreieck. $\Longleftrightarrow$ Die Summe von zwei Winkeln in D ist 90°."
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): „Die Summe von zwei Winkeln in D ist 90°. $\Longleftrightarrow$ Der größte Winkel in D ist 90°."
- (iii) $\Leftrightarrow$ (i): „Der größte Winkel in D ist 90°. $\Longleftrightarrow$ D ist ein rechtwinkliges Dreieck."

Übrigens muss man nicht sechs Implikationen beweisen, um die obige Aussage zu beweisen. Hat man nämlich „(i) $\Rightarrow$ (ii)", „(ii) $\Rightarrow$ (iii)" und „(iii) $\Rightarrow$ (i)" bewiesen, so hat man bereits alle Äquivalenzen gezeigt! Das macht man sich so klar: „(i) $\Rightarrow$ (ii)" haben wir direkt gezeigt. Aus „(ii) $\Rightarrow$ (iii)" und „(iii) $\Rightarrow$ (i)" (was wir auch bewiesen haben) folgt nun aber direkt „(ii) $\Rightarrow$ (i)". Die anderen Äquivalenzen folgen mit analogen Argumenten.

(b) **In Definitionen stecken (indirekt) immer Äquivalenzen!**

Die Definition „$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$ gibt." beinhaltet die folgenden beiden Implikationen:

- „Sei $n \in \mathbb{Z}$, so dass $n = 2k$ mit $k \in Z$. $\Longrightarrow n \in \mathbb{Z}$ ist gerade."
- „$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade. $\Longrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$."

Also ist die Definition auch eine Äquivalenz, nämlich:

„$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade. $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$."

Achtung: Eigentlich würden wir bei der Formulierung der Definition erwarten, dass „genau dann, wenn" statt „wenn" vorkommt, also:

„$n \in \mathbb{Z}$ ist gerade genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$ gibt."

Bei Definitionen ist dieses aber meist nicht der Fall, denn das Wort „Definition" impliziert, dass man in beide Richtungen schließen kann.

(c) Wir haben in Teilkapitel 1.2 gelernt, dass zwei Mengen A und B disjunkt sind, wenn gilt $A \cap B = \emptyset$. Mit dem Verständnis von Definitionen aus Beispiel (b) bedeutet dieses also, dass für zwei beliebige Mengen A und B die folgenden zwei Implikationen beide gelten:

- „A und B sind disjunkt. $\Longrightarrow A \cap B = \emptyset$"
- „$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A$ und B sind disjunkt."

oder kürzer als Äquivalenz geschrieben:

„A und B sind disjunkt. $\Longleftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$"

Mit der sogenannten Kontraposition erhalten wir weitere Möglichkeiten, Implikationen zu beweisen.

Hilfssatz 2.27. (Kontraposition)
Seien A, B Aussagen. Dann ist die Aussage „$A \Rightarrow B$" logisch gleichwertig zu der Aussage „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$". Für mathematische Aussagen (und deren Beweise) bedeutet das: Aus „$A \Rightarrow B$" folgt „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$", und aus „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" folgt „$A \Rightarrow B$". In Formeln:

$$\big(A \Rightarrow B\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big). \tag{2.1}$$

*Die Aussage „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" wird als die **Kontraposition** von „$A \Rightarrow B$" bezeichnet.*

Beweis von Hilfssatz 2.27: Man stellt die Wahrheitstafel für „$A \Rightarrow B$" und für „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" auf und zeigt damit, dass „$A \Rightarrow B$" und „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" dieselben Wahrheitswerte haben und somit logisch gleichwertig sind. Insbesondere gilt dann (2.1). Wir führen dieses in einer Übungsaufgabe durch. □

Kommen wir noch einmal auf Beispiel 2.19 zurück.

Beispiel 2.28. (Beweis durch Kontraposition)
In Beispiel 2.19 haben wir gezeigt, dass gilt : „Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: Wenn n ungerade ist, dann ist n^2 ungerade.", oder gleichwertig:

$$\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist ungerade.} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade.“}$$

Gilt auch die Aussage

$$\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n^2 \text{ ist ungerade.} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ ist ungerade.“?} \tag{2.2}$$

Wenn ja dann liegt eine Äquivalenz vor, nämlich:

„Sie $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: n ist ungerade genau dann, wenn n^2 ungerade ist."

oder gleichwertig:

$$\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist ungerade.} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade.“}$$

Wir beweisen nun dass (2.2) in der Tat gilt: Nach Hilfssatz 2.27 wissen wir, dass (2.2) logisch äquivalent zu der Aussage

$$\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist nicht ungerade.} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ ist nicht ungerade.“}$$

ist. Daher reicht es diese Aussage zu beweisen.

Beweis (mittels Kontraposition): Sei $n \in \mathbb{Z}$ nicht ungerade. Dann ist n gerade, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$. Daraus folgt $n^2 = (2k)^2 = 4\,k^2 = 2\,(2\,k^2) = 2\,\ell$ mit $\ell := 2\,k^2 \in \mathbb{Z}$. Also ist n^2 gerade und damit nicht ungerade. □

Der Wert der Kontraposition liegt unter anderem darin, dass es manchmal viel einfacher ist, $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zu beweisen als $A \Rightarrow B$ zu beweisen. Das vorige Beispiel illustriert dieses. Weiter gibt es auch Aussagen, deren Kontraposition für die Anwendung auf Beispiele nützlicher ist als die Aussage selber.

Beispiel 2.29. (Kontraposition einer Äquivalenz)
In Beispielen 2.19 und 2.28 haben wir die folgende Äquivalenz beweisen:

$$\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist ungerade.} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade.“}$$

welche die beiden Implikationen

$$\begin{aligned} &\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist ungerade.} \quad &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade.“} \\ &\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n^2 \text{ ist ungerade.} \quad &\Longrightarrow \quad n \text{ ist ungerade.“} \end{aligned}$$

beinhaltet. Wir bilden für jede Implikation ihre Kontraposition, wobei wir nutzen, dass eine ganze Zahl genau dann nicht ungerade ist, wenn sie gerade ist. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n^2 \text{ ist gerade.} \quad &\Longrightarrow \quad n \text{ ist gerade.“} \\ &\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist gerade.} \quad &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ist gerade.“} \end{aligned}$$

und diese liefert die Äquivalenz:

$$\text{„Sei } n \in \mathbb{Z}\text{. Dann gilt:} \quad n \text{ ist gerade.} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ ist gerade.“}$$

oder in Worten:

„Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.“

Bemerkung 2.30. (Kontraposition einer Äquivalenz)
Was wir im vorigen Beispiel gesehen haben, gilt allgemein: „$A \Leftrightarrow B$“ ist äquivalent zu „$(\neg A) \Leftrightarrow (\neg B)$“.

In Beispiel 2.25 haben wir bereits gesehen, dass man eine nicht gültige Implikation durch ein Gegenbeispiel widerlegen kann. Wir halten dies nun in einer Bemerkung fest, und illustrieren es mit weiteren Beispielen.

Bemerkung 2.31. (Widerlegen einer (falschen) Implikation durch ein Gegenbeispiel)
Um zu zeigen, dass eine Implikation $A \Rightarrow B$ **nicht** wahr ist, reicht es **ein Gegenbeispiel anzugeben**. Genauer bedeutet das: Wir finden eine Situation, in der die Aussage A wahr ist, aber in der dann die Aussage B nicht wahr ist. Dann ist $A \Rightarrow B$ nicht wahr, also falsch.

Erklärung mit der Wahrheitstafel: Ist A wahr und B falsch, so folgt mit der Wahrheitstafel, dass $A \Rightarrow B$ falsch ist.

Betrachten wir zwei Beispiele zum Widerlegen einer falschen Implikation durch ein Gegenbeispiel.

Beispiel 2.32. (Widerlegen einer Implikation durch Gegenbeispiel)

(a) „Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Ist n ungerade, so ist das Produkt $m \cdot n$ ungerade.“

(Achtung: Die obige Formulierung bedeutet, dass $m \cdot n$ ungerade ist für jedes $m \in \mathbb{Z}$ und jedes ungerade $n \in \mathbb{Z}$.)

Dass diese Aussage **falsch** ist, zeigt man mit dem folgenden *Gegenbeispiel*:

Seien $m = 2$ und $n = 3$. Dann ist $n = 3$ ungerade, aber $m \cdot n = 2 \cdot 3 = 6$ ist gerade. Da wir ein Gegenbeispiel zu der Aussage gefunden haben, ist diese falsch.

(b) Betrachten wir die Aussage:

„Seien A, B und C Mengen. Dann gilt $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.“

Diese Aussage ist **falsch**, denn:

Nachweis durch Angabe eines Gegenbeispiels: Seien $A = B = C := M$ mit einer beliebigen nichtleeren Menge M. Dann gelten:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= M \setminus (M \setminus M) = M \setminus \emptyset = M \\ &\neq (A \setminus B) \setminus C = (M \setminus M) \setminus M = \emptyset \setminus M = \emptyset. \end{aligned}$$

Durch das Gegenbeispiel haben wir gezeigt, dass die Aussage $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ für beliebige Mengen A, B und C falsch ist.

In diesem Kapitel haben wir bei logischen Operatoren und Implikationen immer Klammern gesetzt, wenn ein Missverständnis entstehen konnte. Dieses wird nicht in allen Textbüchern an allen Stellen gemacht, und es gelten bestimmte Konventionen, die in der nächsten Bemerkung erklärt werden.

Bemerkung 2.33. (Konventionen bei logischen Operatoren)
Sind bei logischen Operatoren und Implikationen an bestimmten Stellen keine Klammern gesetzt, so gelten die folgenden Konventionen:

- Die Negation $\neg$ bindet stärker als alle anderen Operatoren.

  Beispiel: $\neg A \vee B$ bedeutet $(\neg A) \vee B$. Möchte man $A \vee B$ verneinen, so muss man $\neg(A \vee B)$ schreiben.

- Die Konjunktion $\wedge$ bzw. die Disjunktion $\vee$ binden jeweils stärker als die Implikation $\Rightarrow$ und die Äquivalenz $\Leftrightarrow$.

  Beispiel: $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$ bedeutet $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$.

2.3 Aussageformen und Quantoren

Zunächst führen wir den Begriff der Aussageform ein. Anschließend lernen wir beim Klassifizieren von Aussageformen auch die Quantoren kennen.

Definition 2.34. (Aussageform)
Wir betrachten eine Menge X und betrachten Aussagen $A(x)$, welche jeweils von einem Element x der Menge X abhängen. Dann nennen wir $A := \big\{A(x) \ : \ x \in X\big\}$ eine ***Aussageform****.*

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.35. (Aussagenformen)

(a) Sei X die Menge aller Tage in 2015, und sei $A(x)$ die folgende Aussage: „Am Tag x (in 2015) hat es in Paderborn geregnet.“

(b) Sei $X := \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Aussage: „n ist genau dann durch 2 teilbar, wenn n^2 durch 2 teilbar ist.“

(c) Sei $X := \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Aussage: „$n\,(n+1)$ ist eine ungerade natürliche Zahl."

Wir klassifizieren nun Aussageformen hinsichtlich ihrer Gültigkeit.

Definition 2.36. (Typen von Aussageformen; Quantoren)
Seien X eine Menge und $A := \big\{A(x) \;:\; x \in X\big\}$ eine Aussageform. Für jedes $x \in X$ ist $A(x)$ eine Aussage mit dem Wahrheitswert wahr oder falsch. Wir definieren:

(1) ***Allgemeingültige Aussage(form):*** *Ist $A(x)$ wahr für alle $x \in X$, so nennt man A* ***allgemeingültig*** *und schreibt*

$$\forall\, x \in X\colon A(x) \quad (\text{„Für alle } x \in X \text{ gilt } A(x)\text{."}).$$

(2) ***Erfüllbare Aussage(form):*** *Gibt es* ***mindestens ein*** *Element $x \in X$, für welches $A(x)$ wahr ist, so nennt man A* ***erfüllbar*** *und schreibt*

$$\exists\, x \in X\colon A(x) \quad (\text{„Es existiert ein } x \in X, \text{ für das } A(x) \text{ wahr ist."}).$$

(3) ***Unerfüllbare Aussage(form):*** *Ist $A(x)$ für kein Objekt $x \in X$ wahr, so nennt man A* ***unerfüllbar*** *und schreibt*

$$\nexists\, x \in X\colon A(x) \quad (\text{„Es existiert kein } x \in X, \text{ für welches } A(x) \text{ wahr ist."}).$$

Die Symbole „$\forall$" und „$\exists$" werden ***Quantoren*** *genannt. Das Symbol „$\forall$" heißt* ***Allquantor*** *und bedeutet „für alle". Das Symbol „$\exists$" heißt* ***Existenzquantor****, und wir sagen „es existiert". Das Symbol „$\nexists$" ist die Verneinung von „$\exists$", und wir sagen „es existiert kein" („es existiert nicht"). Es gibt auch noch den Quantor „$\exists\,!$" („es existiert genau ein").*

Betrachten wir nun noch einmal unsere vorigen Beispiele.

Beispiel 2.37. (Aussagenformen)

(a) Sei X die Menge aller Tage in 2015, und sei $A(x)$ die folgende Aussage: „Am Tag x (in 2015) hat es in Paderborn geregnet." Die Aussageform $A = \big\{A(x) : x \in X\big\}$ ist erfüllbar, denn in 2015 gab es Tage, an denen es in Paderborn geregnet hat.

(b) Sei $X := \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Aussage: „n ist genau dann durch 2 teilbar, wenn n^2 durch 2 teilbar ist.“ Dass diese Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, haben wir im vorigen Teilkapitel (siehe Beispiel 2.29) bewiesen. Also ist die Aussageform $A = \big\{A(n) \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$ eine allgmeingültige Aussageform.

(c) Sei $X := \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Aussage: „$n\,(n+1)$ ist eine ungerade natürliche Zahl.“

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ wahr?

Wir behaupten, dass die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ falsch ist, d.h. dass die Aussageform $A = \big\{A(n) \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$ unerfüllbar ist.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Falls n gerade ist, so ist n durch 2 teilbar, und damit ist auch $n\,(n+1)$ durch 2 teilbar und somit gerade (und nicht ungerade).
- Ist n ungerade, so ist aber $n+1$ gerade und damit durch 2 teilbar. Somit ist auch $n\,(n+1)$ durch 2 teilbar und damit gerade (und nicht ungerade).

Wir sehen, dass sowohl für gerades wie für ungerades $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n\,(n+1)$ gerade und nicht ungerade ist. Die Aussage $A(n) =$ „$n\,(n+1)$ ist eine ungerade natürliche Zahl.“ ist also für kein $n \in \mathbb{N}$ wahr. $\square$

Die Verwendung der Quantoren $\forall$ („für alle“) und $\exists$ („es existiert“) erfordert sowohl beim Lesen als auch beim selber Aufschreiben Übung. Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 2.38. (Quantoren lesen und verneinen)

(a) Was bedeutet „$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \exists\, y \in \mathbb{R} : \ y > x$“?

„Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $y > x$ gilt.“

Anders ausgedrückt: „Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y, die größer als x ist.“ Dieses ist eine wahre Aussage. Beispielsweise kann man $y := x + 1$ wählen.

Wir sehen: Kommt zuerst ein „für alle“ und danach ein „es existiert“, so ist das Objekt, welches existieren soll, in der Regel in Abhängigkeit von dem Objekt hinter dem vorgestellten „für alle“ zu wählen. In dem Beispiel muss man zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein geeignetes $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$ finden können.

(b) Was bedeutet „$\exists\, y \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R} : \ y > x$“?

„Es existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $y > x$ gilt.“

Anders ausgedrückt: „Es existiert eine reelle Zahl y, die größer als alle reellen Zahlen x ist.“ Diese Aussage ist natürlich falsch, denn es gibt keine größte reelle Zahl. (Selbst, wenn es eine größte reelle Zahl y gäbe, wäre die Aussage aber falsch, denn sie müsste auch für $x = y$ gelten und $y > x = y$ kann niemals wahr sein.)

Wir sehen: Gegenüber der Aussage in Teil (a) wurde nur die Reihenfolge von $\forall$ und $\exists$ vertauscht, und die Aussage hat sich völlig verändert. **Offensichtlich kommt es auf die Reihenfolge der Quantoren an!**

Was sind die **Negationen** der beiden obigen Aussagen?

- Wenn eine Aussage nicht für alle Objekte gilt, so gibt es ein Objekt, für das sie nicht gilt. Also wird bei der Negation einer Aussage aus „für alle“ ein „es existiert“.
- Wenn kein Objekt mit einer gewissen Eigenschaft existiert, dann haben alle Objekte die gewisse Eigenschaft nicht. Also wird bei der Negation einer Aussage aus „es existiert“ ein „für alle“.

Wir bilden nun die Negationen der Aussagen aus (a) und (b).

(c) Die Negation von „$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \exists\, y \in \mathbb{R} :\ y > x$“ ist:

„$\exists\, x \in \mathbb{R} : \forall\, y \in \mathbb{R} :\ y \leq x$“.

In Worten lautet die Negation:

„Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt.“

Anders ausgedrückt besagt die Negation, dass es eine größte reelle Zahl gibt, und dieses ist natürlich falsch.

(d) Die Negation von „$\exists\, y \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R} :\ y > x$“ ist:

„$\forall\, y \in \mathbb{R} :\ \exists\, x \in \mathbb{R} :\ y \leq x$“.

In Worten ausgedrückt: „Für alle $y \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x$“. Anders ausgedrückt: „Zu jeder reellen Zahl y gibt es immer eine reelle Zahl x mit $y \leq x$.“ Dieses ist wahr; man wähle z.B. $x := y$.

Wir halten fest, was wir in den Beispielen gelernt haben.

Bemerkung 2.39. (Verwendung und Negation der Quantoren)
Beim Umgang mit Quantoren sind die folgenden Dinge zu beachten:

(1) Es kommt auf die **Reihenfolge der Quantoren** an, d.h. man darf die Reihenfolge von Quantoren im Allgemeinen nicht verändern!

Ausnahmen: Hat man mehrere „für alle", die direkt hintereinander auftreten, so kann man die Reihenfolge vertauschen. Hat man mehrere „es existiert", die direkt hintereinander auftreten, so kann man ebenfalls die Reihenfolge tauschen.

(2) Verneint man eine Aussage, in der „es existiert" vorkommt, so erhält man **statt „es existiert" in der Negation ein „für alle"**.

Genauer: Ist $A = \{A(x) \;:\; x \in X\}$ eine Aussageform, so ist die Verneinung von „$\exists\ x \in X : A(x)$" also „$\forall\ x \in X : \neg A(x)$".

(3) Verneint man eine Aussage, in der „für alle" vorkommt, so erhält man **statt „für alle" in der Negation ein „es existiert"**.

Genauer: Ist $A = \{A(x) \;:\; x \in X\}$ eine Aussageform, so ist die Verneinung von „$\forall\ x \in X : A(x)$" also „$\exists\ x \in X : \neg A(x)$".

(4) **Vorsicht:** Die Regeln in (2) und (3) gelten nur, wenn man **alles in der Aussage verneint**!

Beispiel: Die Negation von „Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$." = „Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $m \leq n$." = „$\exists\ m \in \mathbb{N} : \forall\ n \in \mathbb{N} : m \leq n$" (wahre Aussage, denn $m = 1$ ist die kleinste natürliche Zahl) kann als „Es existiert kein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $m \leq n$." (falsche Aussage) formuliert werden. Nutzt man die Faustregeln oben, so bekommt man die gleichbedeutende Aussage „Für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$." (falsche Aussage).

Betrachten wir noch ein Beispiel zu dem Fall gleicher Quantoren, bei denen man die Reihenfolge tauschen darf (bzw. nicht tauschen darf).

Beispiel 2.40. (Aussagen mit gleichen Quantoren)

(a) Die Aussagen „$\forall\ n \in \mathbb{N} : \forall\ x \in \mathbb{Q} : \exists\ y \in \mathbb{Q} : y = x^n$" und „$\forall\ x \in \mathbb{Q} : \forall\ n \in \mathbb{N} : \exists\ y \in \mathbb{Q} : y = x^n$" sind gleichbedeutend. In Worten lauten sie jeweils:

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{Q}$ existiert ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $y = x^n$."

bzw. „Für alle $x \in \mathbb{Q}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $y = x^n$."

Die Aussagen sind natürlich wahr, weil x^n für $x \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ das n-fache Produkt der rationalen Zahl x ist und dieses wieder in $\mathbb{Q}$ liegt.

(b) Die Aussagen „$\forall\ x \in \mathbb{R} : \exists\ n \in \mathbb{Z} : \exists\ m \in \mathbb{Z} : m \leq x < n$“ und „$\forall\ x \in \mathbb{R} : \exists\ m \in \mathbb{Z} : \exists\ n \in \mathbb{Z} : m \leq x < n$“ sind gleichbedeutend. In Worten lauten sie jeweils

„Für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren ein $n \in \mathbb{Z}$ und ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq x < n$.“

bzw. „Für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren ein $m \in \mathbb{Z}$ und ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq x < n$.“

Die Aussagen sind natürlich wahr.

(b) **Achtung:** In der Aussage „$\forall\ x \in \mathbb{R} : \exists\ y \in \mathbb{R} : \forall\ n \in \mathbb{N} : x - n \leq y$“ darf man **nicht** die beiden $\forall$ vertauschen, denn diese stehen nicht hintereinander. Betrachten wir zuächst die Aussage selber:

„Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x - n \leq y$ gilt.“

Die Aussage ist wahr, denn zu $x \in \mathbb{R}$ wählt man einfach $y := x$ und dann gilt $x - n \leq x = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Aussage „$\forall\ n \in \mathbb{N} : \exists\ y \in \mathbb{R} : \forall\ x \in \mathbb{R} : x - n \leq y$“ (in der die beiden $\forall$ vertauscht wurden) ist dagegen falsch. Sie lautet in Worten:

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x - n \leq y$ gilt.“

Dass die Aussage falsch ist sieht man an dem folgenden Gegenbeispiel: Für $n = 1$ und jedes fest gewählte $y \in \mathbb{R}$ gibt es immer ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x - n = x - 1 > y$ (z.B. wähle man $x := y + 2$).

Erklärung: Wenn die Aussage falsch ist, so ist ihre Negation wahr. Die Negation lautet: „Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $x - n > y$.“ (Bei der Negation wird aus „für alle“ ein „es existiert“ und aus „es existiert“ ein „für alle“.) Dass Gegenbeispiel zeigt, dass die Negation wahr ist.

2.4 Beweistechniken

In diesem Teilkapitel rekapitulieren wir die verschiedenen Beweisstrategien, welche wir bereits in den vorigen Teilkapiteln in verschiedenen Beispielen und in einigen Übungsaufgaben kennengelernt und angewendet haben.

Beweistechnik 2.41. (direkter Beweis)
Beweist man eine Implikation „$A \Rightarrow B$“ mit einem ***direkten Beweis****, so führt man einige Beweisschritte/Implikationen nacheinander aus, bis man von A nach B kommt: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$. Dabei stellen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Aussagen dar, die als Zwischenergebnisse nach den einzelnen Beweisschritten erreicht werden.*

Betrachten wir noch einmal ein Beispiel.

Beispiel 2.42. (direkter Beweis)
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\quad a\,b \leq \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2)$.

Direkter Beweis: Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq (a-b)^2,$$

weil Quadrate immer ≥ 0 sind. Nach der zweiten binomischen Formel gilt

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2,$$

und wir führen nun weitere Umformungen durch:

$$\begin{aligned} & & 0 \leq a^2 - 2\,a\,b + b^2 \quad & \Big|\, + 2\,a\,b \\ \iff & & 2\,a\,b \leq a^2 + b^2 \quad & \Big|\, \cdot \frac{1}{2} \\ \iff & & a\,b \leq \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2), & \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

Wie kommt man aber auf einen solchen Beweis?

Wir starten mit der zu zeigenden Ungleichung und fangen an diese umformen:

$$a\,b \leq \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2) \;\Big|\, \cdot 2 \qquad \iff \qquad 2\,a\,b \leq a^2 + b^2.$$

Bei einer quadratischen Gleichung (hier in a bzw. in b) ist es oft eine gute Idee alles auf eine Seite zu bringen:

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2\,a\,b = a^2 - 2\,a\,b + b^2.$$

Nun nutzen wir auf der rechten Seite die zweite binomische Formel und erhalten

$$0 \leq (a-b)^2,$$

und diese Gleichung ist wahr, weil Quadrate immer ≥ 0 sind.

Damit haben wir alle Ideen und Schritte für den Beweis zur Verfügung. Die obigen Überlegungen sind noch kein Beweis, denn wir haben mit der zu zeigenden Gleichung (von der wir ja gar nicht wussten, dass sie stimmt) angefangen und daraus eine wahre Aussage hergeleitet. Da unsere Rechenschritte alle Äquivalenzen waren, dürfen wir nun aber die Argumentationskette umdrehen, d.h. wir starten mit der wahren Aussage $0 \leq (a-b)^2$ und führen die Schritte in umgekehrter Reihenfolge durch, bis wir die zu zeigende Aussage erhalten. Damit haben wir eine vollständigen Beweis.

Der Prozess der „Beweisfindung“ in dem obigen Beispiel ist exemplarisch für viele Beweise. Dieses ist in der nächsten Bemerkung erläutert.

Bemerkung 2.43. (Beweise herleiten und aufschreiben)

(1) **Man macht sich zunächst klar, was die Aussage bedeutet:** Für Implikationen „$A \Rightarrow B$“ bedeutet dieses, dass man identifiziert, was die **generellen Voraussetzungen** sind (falls es solche gibt), was die **Voraussetzung** (Aussage A) und was die **Behauptung** (Aussage B) ist. – In einem direkten Beweis muss man mit den generellen Voraussetzungen und der Voraussetzung (Aussage A) starten und daraus mit einer Kette von Schlussfolgerungen die Behauptung (Aussage B) herleiten.

(2) **Man „spielt” mit der Voraussetzung und der Behauptung „herum“ und sammelt Ideen:** Manchmal ist auch die generelle Vorgehensweise klar, aber man muss sich noch einige spezielle Details überlegen. – Ist einem die zu beweisende Aussage unklar, so hilft es, einige Beispiele zu betrachten bzw. Zahlen in die Formel einzusetzen. – Diese Überlegungen finden alle auf einem „Schmierzettel“ statt.

(3) **Hat man alle Ideen zusammen, so fertigt man eine saubere „Reinschrift“ des Beweises an**, bei der man die einzelnen Schritte nun in der richtigen Reihenfolge sortiert. Dabei sollten **alle Schritte erklärt sein**.

(4) **Anschließend liest man den Beweis in „Reinschrift“ noch einmal durch und überdenkt jeden Schritt genau:**

- Ist der Beweis richtig? Wenn nicht, wo sind die Fehler, und wie beheben Sie diese? Wenn das Beheben von Fehlern gar nicht klappt, dann war Ihre Beweisidee vielleicht falsch, und Sie müssen eventuell noch einmal zu Schritt (2) zurückgehen.
- Ist jeder Schritt erklärt, oder gibt es Schritte, die noch begründet werden müssen? (Seien Sie hier sehr kritisch!) Ergänzen Sie die fehlenden Begründungen.
- Wenn Sie einen Beweis wie im vorigen Beispiel ausgehend von der zu zeigenden Aussage hergeleitet haben, prüfen Sie ganz pingelig, dass auch tatsächlich jeder Schritt in die andere Richtung zulässig ist, denn nicht alle Umformungen sind Äquiavlenzumformungen! Eine Implikation, die keine Äquivalenz ist, können Sie nicht umdrehen.

(5) Wenn Sie beim kritischen Überprüfen des Beweises alle notwendigen Nachbesserungen erfolgreich durchgeführt haben, **dann ist Ihr Beweis fertig.** Falls Sie zu viel nachbessern mussten, sollten Sie den Beweis aber noch einmal neu sauber aufschreiben.

Und wie liest man bereits vorhandene Beweise in Textbüchern, Skripten und Musterlösungen?

Bemerkung 2.44. (Beweise lesen und verstehen)

(1) Zunächst muss man wissen, das es nicht den (einen) richtigen Beweis einer mathematischen Aussage gibt, **sondern es gibt meist viele richtige Beweise**, aber manche Beweise sind schöner, eleganter, kürzer oder instruktiver als andere. So kann es sein, dass Sie für dieselbe Aussage in zwei verschiedenen Textbüchern unterschiedliche Beweise finden. – Das bedeutet auch, das Sie und Ihre Mitstudierenden ganz unterschiedliche Beweise als Lösung einer Übungsaufgabe haben können, die alle richtig sind.

(2) **In den meisten Textbüchern finden Sie immer nur die „Reinschrift“ der Beweise, und häufig stehen nicht alle Erklärungen dabei, die man braucht!** – Daher muss man sich beim Lesen von Beweisen in Textbüchern häufig hinsetzen und Zwischenschritte ergänzen. Man sollte sich also einen Block neben das Textbuch legen, damit man fehlende Überlegungen aufschreiben kann. Oft muss man auch die Idee des Beweises ermitteln, denn der Autor hat nicht erklärt, warum der

Beweis so funktioniert (d.h. was er sich vorher überlegt hat, als er den Beweis konstruiert hat). – Das klingt mühselig (und ist es am Anfang auch), aber es ist ein **wesentlicher Bestandteil des Lernens von Mathematik**. Das Lesen und Verstehen von Beweisen wird nur dann einfacher, wenn man es aktiv übt!

Statt eines direkten Beweises der Implikation „$A \Rightarrow B$" kann man auch einen Beweis durch Kontraposition geben, indem man die zu „$A \Rightarrow B$" äquivalente Aussage „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" (die Kontraposition von „$A \Rightarrow B$") beweist (vgl. Hilfssatz 2.27).

Beweistechnik 2.45. (Beweis durch Kontraposition)
*Beim **Beweis durch Kontraposition** zeigt man nicht mit einem direkten Beweis, dass die Implikation „$A \Rightarrow B$" wahr ist, sondern man zeigt, dass ihre Kontraposition „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" wahr ist. Da nach Hilfssatz 2.27 „$A \Rightarrow B$" und „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" logisch gleichwertig und damit äquivalent sind, ist dann auch „$A \Rightarrow B$" bewiesen.*

Warum sollte man statt eines direkten Beweises einen Beweis durch Kontraposition anwenden? Es gibt Aussagen „$A \Rightarrow B$", **deren Kontraposition „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$" sehr viel einfacher zu beweisen** ist.

Betrachten ein Beispiel zum Beweis durch Kontraposition.

Beispiel 2.46. (Beweis durch Kontraposition)
Wir wollen mit einem Beweis durch Kontraposition zeigen, dass gilt:

„Ist die Summe zweier ganzer Zahlen gerade, so sind beide ganze Zahlen gerade oder beide ganze Zahlen sind ungerade."

Wir schreiben uns die Aussage zunächst klarer hin:

„Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $\quad n + m$ ist gerade.

$$\Longrightarrow \quad \big(\, (n \text{ und } m \text{ sind gerade.}) \vee (n \text{ und } m \text{ sind ungerade.}) \,\big)\text{“}$$

Die Kontraposition dieser Aussage ist (wobei wir $\neg\,(A \vee B) = (\neg\, A) \wedge (\neg\, B)$ genutzt haben):

„Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$\Big((\neg\,(n \text{ und } m \text{ sind gerade.})) \wedge (\neg\,(n \text{ und } m \text{ sind ungerade.})) \Big)$

$\Longrightarrow \quad n+m$ ist ungerade.“

Wegen $\neg\,(A\ \wedge B) = (\neg\,A) \vee (\neg\,B)$ gilt:

„$\neg\,(n$ und m sind gerade)“ = „n oder m ist ungerade“

„$\neg\,(n$ und m sind ungerade)“ = „n oder m ist gerade“

Also ist die Kontraposition:

„Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$\underbrace{\big((n \text{ oder } m \text{ ist ungerade}) \wedge (n \text{ oder } m \text{ ist gerade})\big)}_{=(n \text{ ist gerade und } m \text{ ist ungerade}) \vee (n \text{ ist ungerade und } m \text{ ist gerade})} \Longrightarrow n+m$ ist ungerade.“

Beweis durch Kontraposition: Sei n gerade und m ungerade. Dann gelten $n = 2k$ und $m = 2\ell + 1$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$n + m = 2k + (2\ell + 1) = 2k + 2\ell + 1 = 2\underbrace{(k+\ell)}_{\in\mathbb{Z}} + 1,$$

d.h. $n+m$ ist ungerade.

Den Fall, dass n ungerade und m gerade ist, behandelt man analog. $\square$

Eine häufig nützliche Beweistechnik ist der Beweis durch Widerspruch, den wir als Nächstes kennenlernen. In manchen Situationen ist der **Beweis durch Widerspruch sehr viel einfacher zu führen** als ein direkter Beweis oder als ein Beweis durch Kontraposition.

Beweistechnik 2.47. (Beweis durch Widerspruch)
Es sei eine Aussage „$A \Rightarrow B$“ gegeben, welche wir beweisen wollen. (Liegt uns „nur eine“ mathematische Aussage vor, so ist diese als B aufzufassen, wobei A dann die Voraussetzungen der Aussage B sind.)

Beim ***Beweis durch Widerspruch*** *(auch* ***Widerspruchsbeweis*** *genannt) macht man die* ***Annahme:***

„Es gelten die Aussage A und die Aussage $\neg B$.“

Dann folgert man aus der Aussage $\neg B$ (und der Aussage A) solange weitere Aussagen, bis man eine Aussage erhält, die im Widerspruch zu A oder zu *einer bekannten wahren Aussage steht. Daraus folgt dann dass „$A \Rightarrow B$“ gilt.*

Erklärung: *Ein Widerspruch darf in einer vernünftigen mathematischen Theorie nicht auftreten, und somit muss die Annahme „$A \wedge (\neg B)$“ falsch sein. Da A wahr ist, muss $\neg B$ falsch sein, und folglich ist B wahr. Sind A und B wahr, so ist auch „$A \Rightarrow B$“ wahr.*

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 2.48. (Beweis durch Widerspruch)
Betrachten wir die Aussage:

„Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: Ist n ungerade, so ist n^2 ungerade.“

Wir wollen diese mit einem Beweis durch Widerspruch beweisen:

Beweis: Wir setzen also voraus, dass $n \in \mathbb{Z}$ ungerade ist, und wir nehmen an, dass $n^2 \in \mathbb{Z}$ nicht ungerade ist, also, dass n^2 gerade ist. Dann ist n^2 durch 2 teilbar. Dann ist auch n ist durch 2 teilbar. (Begründung: Wäre n nicht durch 2 teilbar, so wäre n^2 auch nicht durch 2 teilbar. Hier nutzen wir, dass 2 Primzahl ist. Wir wissen aber bereits, dass n^2 durch 2 teilbar ist. $\lightning$ Also haben wir einen Widerspruch und n muss ebenfalls durch 2 teilbar sein.) Dann ist n gerade, und dieses steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass n ungerade ist. $\lightning$ Also war unsere Annahme, dass n^2 gerade ist, falsch, und wir haben bewiesen, dass gilt: „Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: Ist n ungerade, so ist n^2 ungerade.“ $\square$

Wenn Sie genau hinschauen, dann sehen Sie, dass wir in der Begründung, warum aus „2 teilt n^2“ auch „2 teilt n“ folgt, einen zweiten kleinen Widerspruchsbeweis verwendet haben. – Das **Blitz-Symbol** $\lightning$ schreibt man oft im Beweis an die Stelle, an welcher der Widerspruch auftritt.

Die Beweistechniken Beweis durch Widerspruch und Beweis durch Kontraposition sind **unterschiedlich**. Dieses wird in der nächsten Bemerkung diskutiert.

Bemerkung 2.49. (Unterschied zwischen einem Beweis durch Widerspruch und einem Beweis durch Kontraposition)
Das Konzept eines Beweises durch Widerspruch ist **nicht** dasselbe wie das Konzept eines Beweises durch Kontraposition!

Dieses macht man sich sofort am folgenden *Beispiel* klar:

Seien $A =$ „Es regnet." und $B =$ „Die Straße ist nass.".

- Angenommen wir wollen „$A \Rightarrow B$" durch Kontraposition beweisen, dann lautet die zu beweisende Kontraposition „$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$": „Ist die Straße ist nicht nass, so regnet es nicht."
- Beim Beweis durch Widerspruch müssten wir aber „$A \wedge (\neg B)$", also „Es regnet, und die Straße ist nicht nass." zu einem Widerspruch führen. Im Beispiel ist dieser Widerspruch offensichtlich. Wir setzen also voraus, dass A gilt, und nehmen an, dass $\neg B$ gelte. Daraus leiten wir dann einen Widerspruch her.

Betrachten wir nun noch einen etwas aufwendigeren Beweis durch Widerspruch, den Sie vielleicht schon in der Schule gesehen haben.

Beispiel 2.50. (Beweis durch Widerspruch)
Wir wollen die folgende Aussage beweisen:

„Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht in $\mathbb{Q}$."

Wir formulieren diese zunächst mathematisch klarer als:

„Sei x die nicht-negative Zahl in $\mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$. Dann ist x nicht in $\mathbb{Q}$."

Hierbei haben wir benutzt, das die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ gerade als die nicht-negative Zahl x in $\mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$ definiert ist.

Hier ist die Voraussetzung (Aussage A) „Sei x die nicht-negative Zahl in $\mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$.", und die Behauptung (Aussage B) ist „x ist nicht in $\mathbb{Q}$.". Beim Beweis durch Widerspruch nehmen wir also an, dass $A \wedge (\neg B)$ gelten, d.h. dass x die nicht-negative Zahl in $\mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$ ist und dass $x \in \mathbb{Q}$ ist. Hieraus müssen wir nun einen Widerspruch herleiten.

Beweis durch Widerspruch: Sei x die nicht-negative Zahl in $\mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$. Wegen $0^2 = 0 \neq 2$ wissen wir, dass $x > 0$ gelten muss. Wir nehmen an, dass x in $\mathbb{Q}$ liegt. Dann gibt es Zahlen $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit

$$x = \frac{p}{q}\,. \tag{2.3}$$

Wir dürfen annehmen, dass wir in dem Bruch $x = p/q$ den Zähler p und Nenner q nicht mehr kürzen können, also dass p und q keine gemeinsamen Teiler haben.

Durch Quadrieren auf beiden Seiten vom (2.3) erhalten wir

$$\underbrace{x^2}_{=2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 = \frac{p^2}{q^2} \;\Big|\cdot q^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\,q^2 = p^2.$$

Aus $p^2 = 2\,q^2$ folgt, dass p^2 durch 2 teilbar ist, denn $p^2/2 = (2\,q^2)/2 = q^2 \in \mathbb{N}$. Dann ist auch p ist durch 2 teilbar. (Begründung: Wäre p nicht durch 2 teilbar, so wäre p^2 auch nicht durch 2 teilbar. Hier nutzen wir, dass 2 Primzahl ist. Wir wissen aber bereits, dass p^2 durch 2 teilbar ist. $\lightning$ Also haben wir einen Widerspruch und p muss ebenfalls durch 2 teilbar sein.) Also gilt $p/2 = m$ mit $m \in \mathbb{N}$, d.h. $p = 2\,m$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Einsetzen von $p = 2\,m$ in $p^2 = 2\,q^2$ liefert nun

$$(2\,m)^2 = 2\,q^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\,m^2 = 2\,q^2 \;\Big|: 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,m^2 = q^2 \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = 2\,m^2.$$

Also ist q^2 ebenfalls durch 2 teilbar und (mit der gleichen Argumentation wie oben) folgt dass auch q durch 2 teilbar ist. Also gilt $q/2 = n$ mit $n \in \mathbb{N}$, d.h. $q = 2\,n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben also gefunden, dass sowohl p also auch q durch 2 teilbar sind, also $p = 2\,m$ und $q = 2\,n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Damit finden wir

$$x = \frac{p}{q} = \frac{2\,m}{2\,n} = \frac{m}{n},$$

und dieses steht im **Widerspruch** zu unserer Annahme, dass der Zähler p und Nenner q in $x = p/q$ keine gemeinsamen Teiler hatten. $\lightning$

Da wir einen Widerspruch hergeleitet haben, war unsere Annahme $x \in \mathbb{Q}$ falsch. Also haben wir gezeigt, dass $x \notin \mathbb{Q}$ gilt. □

Im Fokus der beiden letzten in diesem Teilkapitel zu besprechenden Beweistechniken stehen Beispiele bzw. Gegenbeispiele.

Beweistechnik 2.51. (Beweis einer Existenzaussage durch die Konstruktion eines Beispiels)
Besagt eine Aussage, dass es (mindestens) ein Objekt mit gewissen Eigenschaften gibt, so kann man die Aussage beweisen, indem man ***ein Beispiel für ein solches Objekt*** *mit den gewissen Eigenschaften* ***konstruiert****.*

Betrachten wir dazu zwei Beispiele.

Beispiel 2.52. (Beweis einer Existenzaussage)
„Es gibt quadratische Gleichungen, die keine reellen Lösungen haben.“

Beweis: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reellen Lösungen, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 + 1 \geq 1$, weil Quadrate reeller Zahlen nicht-negativ sind.

Beispiel 2.53. (Beweis einer Existenzaussage)
Wir wollen die folgende Aussage beweisen:

„Es gibt unendlich viele gerade Quadratzahlen, die durch die Zahlen 3, 5 und 7 teilbar sind.“

(Erinnerung: Eine Quadratzahl ist eine Zahl der Form n^2 mit $n \in \mathbb{N}$.)

Beweis: Wir konstruieren unendlich viele Zahlen mit den in der Aussage angegebenen Eigenschaften:

$m := 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist durch 3, 5 und 7 teilbar.

$p := 2\,m = 2 \cdot 105 = 210$ ist gerade und durch 3, 5 und 7 teilbar.

Alle natürlichzahligen Vielfachen von $p = 210$, also $k \cdot p = k \cdot 210$ mit $k \in \mathbb{N}$, sind durch $p = 210$ und damit durch 3, 5, 7 und 2 (weil 210 gerade ist) teilbar.

$(k \cdot p)^2 = (k^2 \cdot p) \cdot p$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl und ist durch $p = 210$ und damit durch 3, 5, 7 und 2 teilbar. Weil diese Quadratzahlen durch 2 teilbar sind, sind sie auch gerade. $\square$

(*Anmerkung:* Hier muss man „unendlich viele“ Beispiele konstruieren, weil die Aussage sagt, dass es unendlich viele Quadratzahlen mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Ob man mit den konstruierten unendlich vielen Beispielen alle solchen Quadratzahlen erfasst hat oder nicht, spielt dabei keine Rolle.)

Beweistechnik 2.54. (Widerlegen einer Allaussage durch die Konstruktion eines Gegenbeispiels)
Will man eine Allaussage A der Gestalt „Für alle x aus der Menge M gilt die Eigenschaft E.“ ***widerlegen*** *(d.h. zeigen, dass die Aussage falsch ist), so reicht es* ***ein Gegenbeispiel für die Aussage zu finden****, also ein $x \in M$, das nicht Eigenschaft E hat.*

Erklärung: *Die Negation von A = „Für alle x aus der Menge M gilt die Eigenschaft E.“ ist $\neg A$ = „Es gibt ein $x \in M$, für welches die Eigenschaft E nicht gilt.“ Wenn man ein solches x angeben kann, ist die Aussage $\neg A$*

wahr. Die Aussage A muss dann falsch sein.

Beispiel 2.55. (Widerlegen einer Allaussage durch ein Gegenbeispiel) Wir wollen zeigen, dass die Aussage „Alle Schafe in England sind weiß.“ falsch ist. Dazu reicht es, wenn wir ein Schaf in England finden, das nicht weiß (sondern beispielsweise braun, schwarz oder gescheckt) ist.

Beispiel 2.56. (Widerlegen einer Allaussage durch ein Gegenbeispiel) Dass die Aussage $A =$ „Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \implies a^2 < b^2$.“ falsch ist, zeigt man mit dem folgenden *Gegenbeispiel*:

Seien $a = -4$ und $b = 2$. Dann gilt $-4 = a < b = 2$, aber $16 = (-4)^2 = a^2 > b^2 = 2^2 = 4$. Also ist die Aussage A falsch. $\square$

Es sei noch eine **Warnung zu Beispielen** gegeben: Will man eine (mathematische) Aussage über gewisse (mathematische) Objekte beweisen, so **reicht es nicht**, wenn man die Aussage für ein (oder mehrere) Beispiel(e) dieser Objekte überprüft! Letzteres zeigt nur, dass die Aussage für diese Beispiele wahr ist.

Wir halten abschließend fest: Will man einen langen Beweis führen, in dem viele Implikationen zu zeigen sind, so kann man natürlich für jede einzelne Implikation eine andere Beweismethode wählen.

Im nächsten Teilkapitel lernen wir schließlich noch eine weitere Beweismethode kennen, nämlich das Prinzip der vollständigen Induktion.

2.5 Beweis durch vollständige Induktion

Wir formulieren das Prinzip der vollständigen Induktion mit Aussageformen (vgl. Definition 2.34), die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ mit einem (festen) $n_0 \in \mathbb{Z}$ definiert sind.

Beweistechnik 2.57. (vollständige Induktion – Version I) *Seien $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $A := \big\{A(n) \;:\; n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq n_0\big\}$ eine Aussageform. Angenommen man kann die folgenden beiden Dinge beweisen:*

(i) $A(n_0)$ ist wahr.

(ii) Die Implikation „Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr." ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr (d.h. die Aussageform A ist allgemeingültig).

Praktische Umsetzung: In der Praxis geht man bei der Anwendung des Beweisprinzips der vollständigen Induktion wie folgt vor: Nachdem man $A(n)$ und n_0 identifiziert hat, führt man den Beweis in den folgenden zwei Schritten durch:

(i) **Induktionsanfang (IA):** Die Aussage $A(n)$ wird für $n = n_0$ bewiesen (oft durch eine direkte Rechnung).

(ii) **Induktionsschritt (IS):** Für beliebiges $n \geq n_0$ wird unter Benutzung der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ bewiesen. $A(n)$ wird dabei als **Induktionsvoraussetzung (IV)** bezeichnet. Die Stelle im Beweis, an der diese eingeht, wird sollte mit „(IV)" gekennzeichnet sein (um darauf hinzuweisen, dass hier die Induktionsvoraussetzung genutzt wurde).

Für das Induktionsverfahren ist es **unerlässlich**, dass Sie **sowohl den Induktionsanfang als auch den Induktionsschritt** beweisen. Allein sagt keiner dieser Beweisschritte etwas über die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ aus.

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel, an dem wir das Prinzip der vollständigen Induktion anwenden.

Beispiel 2.58. (Der kleine Gauß)

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:} \qquad 1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\,. \tag{2.4}$$

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 1$ und die Aussage

$$A(n): \qquad 1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA) $n = 1$: $A(1)$ ist wahr, denn $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \curvearrowright n+1$*:* Wir müssen zeigen:

$$A(n+1): \quad 1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2.5}$$

Dazu starten wir mit der linken Seite von (2.5) und formen diese unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung (IV) so lange geeignet um, bis wir die rechte Seite von (2.5) erhalten:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= \underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}_{=\frac{n(n+1)}{2} \text{ nach (IV)}} + (n+1) \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

oder mit Summenschreibweise

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\substack{=\frac{n(n+1)}{2} \\ \text{nach (IV)}}} + (n+1) \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung 2.59. (Warum funktioniert das Induktionsprinzip?)

- Wir beweisen, dass $A(n_0)$ wahr ist (Induktionsanfang).

- Dann beweisen wir im Induktionsschritt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass aus „$A(n)$ ist wahr." folgt „$A(n+1)$ ist wahr.".
- Mit dem Induktionsschritt können wir für $n = n_0$ aus der Gültigkeit von $A(n_0)$ (Induktionsanfang) die Gültigkeit von $A(n_0 + 1)$ schlussfolgern. Anschließend können wir mit dem Induktionsschritt aus der Gültigkeit von $A(n_0 + 1)$ die Gültigkeit von $A(n_0 + 2)$ schlussfolgern, usw.. So erhalten wir die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

Wir formulieren eine zweite Variante des Induktionsprinzips, die natürlich zu der ersten Variante äquivalent ist.

Beweistechnik 2.60. (vollständige Induktion – Version II)
Seien $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $A := \big\{A(n) \; : \; n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq n_0\big\}$ eine Aussageform. Angenommen man kann die folgenden beiden Dinge beweisen:

(i) $A(n_0)$ ist wahr.

(ii) Die Implikation „Wenn $A(k)$ für alle $k = n_0, n_0 + 1, \ldots, n$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr." ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr (d.h. die Aussageform A ist allgemeingültig).

Gelegentlich ist diese zweite Variante, der vollständigen Induktion nützlich, weil man im Induktionsschritt die Gültigkeit der Aussage $A(k)$ nicht nur für $k = n$ sondern auch für $k = n - 1$ (und gegebenenfalls weitere $k \leq n$) nutzen möchte.

Bemerkung 2.61. (Varianten des Induktionsprinzips)

Alternativ hätten wir auch den folgenden Induktionsschritt (IS) durchführen können, der zum selben Ergebnis führt:

- Version I: (ii) Die Implikation „Wenn $A(n-1)$ wahr ist, dann ist auch $A(n)$ wahr." ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > n_0$ wahr.
- Version II: (ii) Die Implikation „Wenn $A(k)$ für alle $k = n_0, n_0{+}1, \ldots, n{-}1$ wahr ist, dann ist auch $A(n)$ wahr." ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > n_0$ wahr.

Man beachte in beiden Fällen die **echte** Größerrelation $n > n_0$ **statt** $n \geq n_0$.

Beweise durch vollständige Induktion gehören zu den grundlegenden Techniken, die ein Mathematiker beherrschen muss. Später im Studium werden einfache Induktionsbeweise in der Vorlesung häufig aus Zeitgründen ausgelassen, und man muss sich diese selber überlegen. Auch in Lehrbüchern werden Aussagen, die man mit vollständiger Induktion zeigen kann, oft ohne Nachweis oder Begründung verwendet.

Das Prinzip der vollständigen Induktion gibt uns leider keine Hilfsmittel, um gültige Sätze zu formulieren. Um das Induktionsprinzip zu nutzen, müssen Sie bereits wissen, was Sie beweisen wollen!

Betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel 2.62. (Summe ungerader natürlicher Zahlen)

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:} \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2. \tag{2.6}$$

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 1$ und die Aussage

$$A(n): \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Induktionsanfang (IA) $n = 1$: $A(1)$ ist wahr, denn

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \curvearrowright n+1$: Wir müssen zeigen:

$$A(n+1): \quad 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2, \tag{2.7}$$

wobei wir auf der linken Seite genutzt haben, dass $2(n+1) - 1 = 2n + 1$ ist.

Wir starten mit der linken Seite in (2.7) und formen diese unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung um, bis wir die rechte Seite von (2.7) erhalten:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = \underbrace{\big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\big)}_{= n^2 \text{ nach (IV)}} + (2n+1)$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{(IV)}}{=} n^2 + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

oder mit Summenschreibweise

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=\,n^2 \text{ nach (IV)}} + \big(2(n+1)-1\big) \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} n^2 + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Damit haben wir $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 2.63. (typische Probleme bei Induktionsbeweisen)
Beim Erlernen von Induktionsbeweisen treten oft die folgenden **Probleme** auf, bzw. die folgenden Dinge wurden **nicht** beachtet:

- Anfangs ist es oft ein Problem, herauszufinden, was Sie im Induktionsschritt eigentlich zeigen wollen. Es hilft, sich die im Induktionsschritt zu beweisende Aussage als Erinnerung hinzuschreiben („zu zeigen: …“).
- Wird die im Induktionsschritt zu zeigende Aussage $A(n+1)$ notiert, erhält man diese aus $A(n)$, indem man in $A(n)$ **überall** n durch $n+1$ ersetzt. (Ersetzt man in $A(n)$ nicht überall sondern nur an einigen Stellen n durch $n+1$, so erhält man nicht $A(n+1)$ sondern eine andere (meistens falsche) Aussage.)
- Beachten Sie, dass Sie im Induktionsschritt (IS) $n \curvearrowright n+1$ **nicht** zeigen müssen, dass die Aussage $A(n)$ für n gilt. Dieses ist die Induktionsvoraussetzung (IV). Es hilft, wann man sich diese gesondert notiert.

Betrachten wir noch ein Beispiel, in dem eine Ungleichung mit vollständiger Induktion bewiesen wird. In diesem Beispiel kommen Fakultäten vor:

n-**Fakultät**, in Zeichen $n!$, ist für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$0! := 1; \qquad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt also

$$1! = 1, \qquad 2! = 2, \qquad 3! = 6, \qquad 4! = 24, \qquad 5! = 120, \qquad \ldots .$$

Beispiel 2.64. (Ungleichung)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt: $\quad n! > 2^n$

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 4$ und die Aussage

$$A(n) : \qquad n! > 2^n$$

Induktionsanfang (IA) $n = 4$: $A(4)$ ist wahr, denn $4! = 24 > 16 = 2^4$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \curvearrowright n+1$: Wir müssen zeigen: $(n+1)! > 2^{n+1}$

Dazu starten wir auf der linken Seite von $(n+1)! > 2^{n+1}$ und formen um bzw. schätzen nach unten ab, bis wir die rechte Seite von $(n+1)! > 2^{n+1}$ erhalten:

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots n}_{= n!} \cdot (n+1) = \underbrace{n!}_{> 2^n} (n+1) \overset{\text{(IV)}}{>} 2^n \underbrace{(n+1)}_{> 2 \text{ weil } n \geq 4} > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Damit haben wir $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$. $\square$

Als Letztes beweisen wir eine Teilbarkeitsaussage mit vollständiger Induktion.

Beispiel 2.65. (Teilbarkeitsaussage)
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n^3 + 3\,n^2 + 2\,n$ durch 6 teilbar.

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 0$ und die Aussage

$$A(n) : \qquad n^3 + 3\,n^2 + 2\,n \text{ ist durch 6 teilbar.}$$

Induktionsanfang (IA) $n = 0$: $A(0)$ ist wahr, denn $0^3 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ ist durch 6 teilbar.

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 0$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \curvearrowright n+1$:

Wir müssen zeigen: $(n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1)$ ist durch 6 teilbar.

Dazu formen wir $(n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1)$ geeignet um und nutzen die Induktionsvoraussetzung aus:

$$\begin{aligned}
&(n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1) \\
&\qquad = (n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1) + 3\,(n^2 + 2\,n + 1) + 2\,(n+1) \\
&\qquad = (n^3 + 3\,n^2 + 2\,n) + 3\,n^2 + 9\,n + 6 \\
&\qquad = (n^3 + 3\,n^2 + 2\,n) + 3\,(n^2 + 3\,n + 2) \\
&\qquad = (n^3 + 3\,n^2 + 2\,n) + 3\,(n+1)\,(n+2),
\end{aligned}$$

wobei man die Faktorisierung $n^2 + 3\,n + 2 = (n+1)\,(n+2)$ mit dem Satz von Viéta direkt ablesen kann oder diese alternativ mit quadratischer Ergänzung und den binomischen Formeln berechnen kann:

$$\begin{aligned}
n^2 + 3\,n + 2 &= n^2 + 3\,n + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = (n+1)\,(n+2).
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$(n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1) = (n^3 + 3\,n^2 + 2\,n) + 3\,(n+1)\,(n+2).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung (IV) ist $n^3 + 3\,n^2 + 2\,n$ durch 6 teilbar.

$3\,(n+1)(n+2)$ ist durch 3 teilbar. Weil $n+1$ und $n+2$ zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, muss eine der beiden Zahlen gerade und somit durch 2 teilbar sein. Also ist $3\,(n+1)(n+2)$ auch durch 2 teilbar. Daraus folgt, dass $3\,(n+1)(n+2)$ durch 2 und 3 und somit durch 6 teilbar ist.

Als Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen ist $(n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1)$ durch 6 teilbar. Damit haben wir $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

KAPITEL 3

Funktionen

In diesem Kapitel lernen wir den wichtigen Begriff einer Funktion (oder Abbildung) kennen. Nach den grundlegenden Begriffen und diversen Beispielen für Funktionen (siehe Teilkapitel 3.1) werden wir in Teilkapitel 3.2 monotone Funktionen untersuchen. Der Begriff der Monotonie, d.h. „(streng) monoton wachsend/steigend" bzw. „(streng) monoton fallend", wird dabei jeweils ohne die Verwendung der Ableitung der Funktion (falls diese überhaupt eine Ableitung besitzt) definiert. In Teilkapitel 3.3 lernen wir schließlich die wichtigen aus der Schule in der Regel nicht bekannten Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv kennen und führen die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion ein.

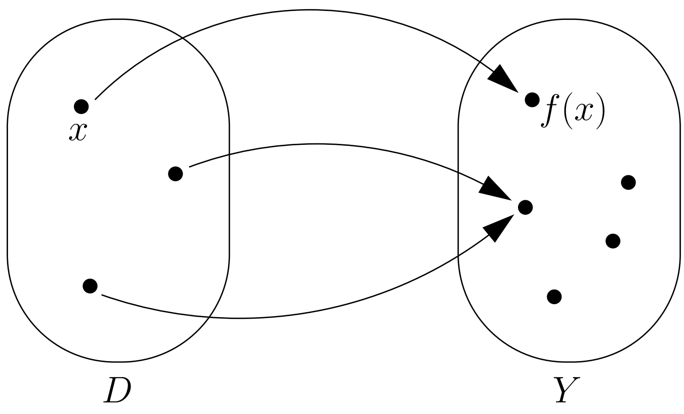
3.1 Funktionen: Definition und Beispiele

Wir beginnen mit der Definition einer Funktion. Obwohl Ihnen Funktionen aus der Schule vertraut sind, werden Sie möglicherweise feststellen, dass nicht alle der Begriffe in der nachfolgenden Definition in der Schule sauber thematisiert worden sind.

Definition 3.1. (Funktion/Abbildung)
Seien D und Y nichtleere Mengen. Eine ***Funktion*** *(oder* ***Abbildung****) f von D nach (oder in) Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$* ***genau ein***

$f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben in Zeichen:

$$f : D \to Y, \qquad x \mapsto f(x) := \text{„}\textit{Zuordnungsvorschrift}\text{“}.$$



Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

- *D heißt die **Definitionsmenge** oder der **Definitionsbereich** von f.*
- *Y heißt die **Zielmenge** oder der **Zielbereich** von f.*
- *$x \mapsto f(x) :=$ „Zuordnungsvorschrift“ heißt die **Funktionsvorschrift**. (Das „$x \mapsto$“ wird dabei häufig weggelassen.)*
- *x heißt die **Variable** der Funktion f.*
- *$f(x)$ heißt der **Funktionswert von f an der Stelle** x (oder das **Bild von** x unter f).*
- *Ist $y \in Y$ und $f(x) = y$, so heißt x ein **Urbild von** y unter f.*
- *Sind $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir f eine **reelle Funktion**.*

Betrachten wir einige Beispiele für Funktionen.

Beispiel 3.2. (Funktionen)

(a) Ordnet man jedem Buch der Unibibliothek diejenigen Nutzer zu, die dieses Buch mindestens einmal ausgeliehen haben, dann erhält man **keine** Funktion.

Begründung: Erstens gibt es Bücher, die niemand ausgeliehen hat. Für diese Bücher hätten wir keinen Funktionswert. Zweitens gibt es Bücher, die von mehreren Nutzern ausgeliehen wurden. Diesen Büchern hätten wir nicht genau einen sondern mehrere Nutzer der Unibibliothek zugewiesen.

(b) Beispiele für Funktionen sind:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$
- $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x^2$
- $w : [0, \infty[\to [0, \infty[, \quad w(t) := \sqrt{t}$
- $d : \mathbb{N} \to \{0, 1\}, \quad d(n) := \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$
- $h : \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad h(x) := \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Betrachten wir die Funktion h noch einmal genauer: h hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ und die Zielmenge $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktionsvorschrift ist $h(x) := \frac{1}{x^2-1}$. In der Definitionsmenge müssen die Punkte $x = -1$ und $x = 1$ fehlen, weil der Nenner der Funktionsvorschrift dort null wird. Die Zielmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist passend gewählt, weil 0 als Funktionswert nicht auftritt.

(c) Ordnet man jedem Punkt auf dem Äquator (beschrieben durch den Längengrad $\phi \in [0, 360°[$ am Schnittpunkt mit dem Äquator) zu jedem Zeitpunkt t aus einem Zeitintervall I, die Temperatur T in Grad Celsius zu, so bekommt man eine Funktion mit zwei Variablen:

$$T : [0, 360°[\times I \to \mathbb{R}, \qquad T(\phi, t) := \begin{cases} \text{„Temperatur am Ort} \\ \text{mit Längengrad } \phi \text{ auf} \\ \text{dem Äquator zur Zeit } t\text{“.} \end{cases}$$

(d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(m, n) := \dfrac{m}{n}$

Diese Funktion ordnet dem geordneten Paar $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ der Bruch mit Zähler m und Nenner n zu.

In der Schule wird manchmal nur die Funktionsvorschrift angegeben und diese dann als Funktion bezeichnet. Das kommt daher, dass dort fast nur reelle Funktionen betrachtet werden, d.h. die Zielmenge ist $\mathbb{R}$, und die Definitionsmenge ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist die Definitionsmenge nicht angegeben, so wählt man diese als eine so groß wie mögliche Teilmenge von $\mathbb{R}$. Für die vollständige Beschreibung einer Funktion muss aber neben der Funktionsvorschrift auch die Definitionsmenge und die Zielmenge angegeben werden. Deshalb schreiben wir in der Vorlesung immer die Definitionsmenge und die Zielmenge dazu.

Bemerkung 3.3. (gleiche Funktionen)
Zwei Funktionen $f : D_f \to Y_f$ und $g : D_g \to Y_g$ sind **gleich**, wenn die folgenden drei Bedingungen **alle** gelten:

(i) $D_f = D_g$ (gleiche Definitionsmenge),

(ii) $Y_f = Y_g$ (gleiche Zielmenge),

(iii) $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_f$ (gleiche Funktionsvorschrift).

Beispiel 3.4. (Gleichheit von Funktionen)

(a) Die Funktionen

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(t) := \sqrt{t},$$
$$g : \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x^{1/2},$$

sind gleich, denn es gelten (i) $[0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$, (ii) $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} = g(x)$ für alle $x \in [0, \infty[$. (Die Tatsache, dass die Variable von f mit t bezeichnet ist, wogegen die Variable von g mit x bezeichnet ist, spielt hierbei keine Rolle. Die Namen von Variablen sind austauschbar.)

(b) Die Funktionen

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x^2,$$

sind **nicht** gleich, obwohl sie dieselbe Funktionsvorschrift und dieselbe Zielmenge haben, denn ihre Definitionsmengen sind unterschiedlich.

(c) Die Funktionen

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sqrt{x},$$
$$g : [0, \infty[\to [0, \infty[, \quad g(x) := \sqrt{x},$$

sind **nicht** gleich, obwohl sie dieselbe Funktionsvorschrift und dieselbe Definitionsmenge haben, denn ihre Zielmengen sind unterschiedlich.

Wir führen nun den Begriff des Graphen einer Funktion ein, mit dem wir reelle Funktionen dann geometrisch veranschaulichen können.

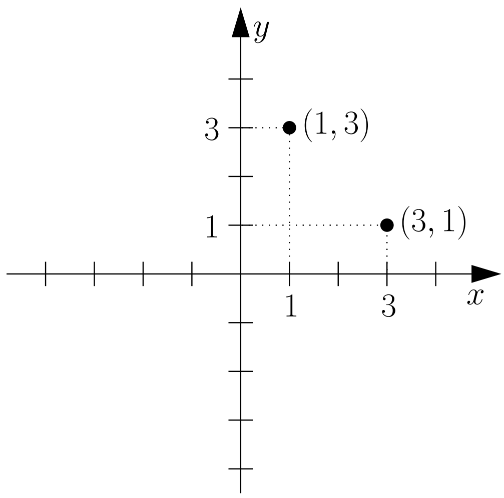
Definition 3.5. (Graph)
Seien D und Y nichtleere Mengen. Ist $f : D \to Y$, $x \mapsto f(x)$, eine Funktion, so heißt die Menge $\Gamma(f) := \big\{\big(x, f(x)\big) \ : \ x \in D\big\}$ *der* ***Graph*** *von f.*

Der Symbol „Γ“ ist ein großer griechischer Buchstabe, genannt „gamma“. Am Ende des Skripts finden Sie eine Liste aller griechischen Buchstaben.

Der Graph ist also eine Teilmenge des kartesischen Produkts $D \times Y$ der Definitionsmenge D und der Zielmenge Y.

Sind $D, Y \subseteq \mathbb{R}$ (d.h. ist f eine reelle Funktion), so lässt sich der Graph von f als Schaubild in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen.

Im nebenstehenden Bild haben wir die geordneten Paare $(1, 3)$ und $(3, 1)$ als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.



Betrachten wir ein Beispiel für den Graph einer Funktion.

Beispiel 3.6. (Graph einer Funktion)

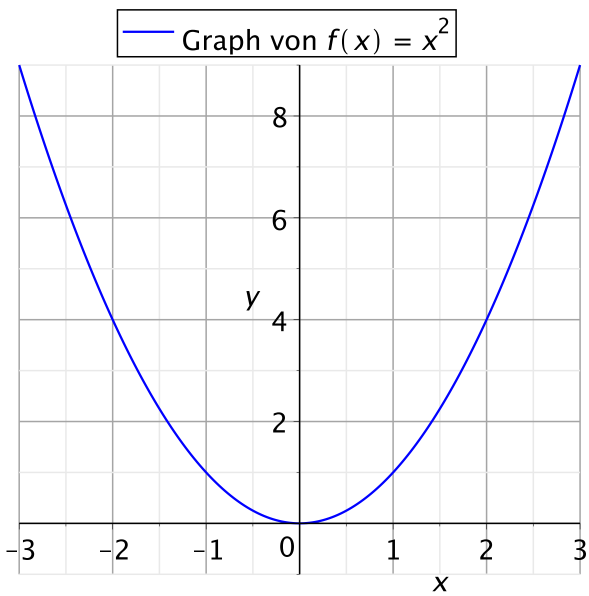
Die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2,$$

hat den Graph

$$\Gamma(f) = \big\{(x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dieses ist im Bild rechts veranschaulicht.

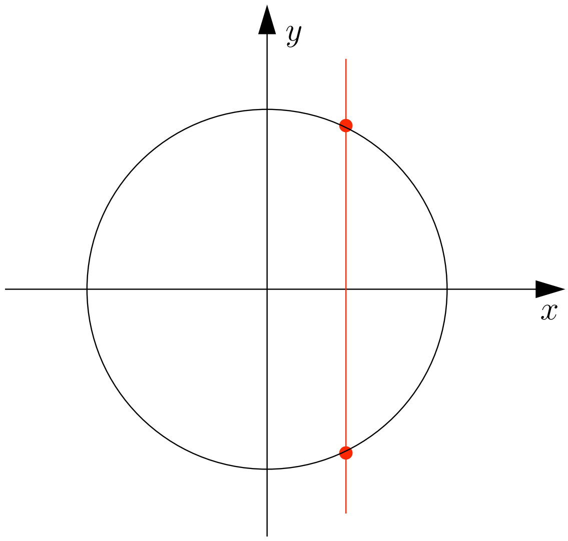


Bemerkung 3.7. (Kurven und Graphen von Funktionen)

Wann ist ein Schaubild einer Kurve die Darstellung des Graphen einer Funktion?

Genau dann, wenn die Kurve mit jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einen Schnittpunkt hat.

Beispiel: Eine Kreislinie (vgl. das Bild rechts) ist also kein Graph einer Funktion.



3.2 Monotone Funktionen

Wir interessieren uns nun für das **Wachstumsverhalten** von Funktionen $f : D \to Y$ mit $D, Y \subseteq \mathbb{R}$: Was passiert, wenn wir $x \in D$ immer größer machen? Wird dann $f(x)$ auch immer größer oder immer kleiner oder keines von beidem?

Definition 3.8. (monotone Funktion)
Seien $D, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to Y$ eine Funktion.

(1) f heißt ***monoton wachsend****, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2).$$

(2) f heißt ***monoton fallend****, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \geq f(x_2).$$

(3) f heißt ***streng monoton wachsend****, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

(4) f heißt ***streng monoton fallend****, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

> (5) *f heißt **monoton** (bzw. **streng monoton**), falls f monoton wachsend oder monoton fallend (bzw. streng monoton wachsend oder streng monoton fallend) ist*

Alternative Bezeichnung: Statt „(streng) monoton wachsend“ kann man auch „(streng) monoton steigend“ sagen.

Anschauung: Die Begriffe „(streng) monoton wachsend“ und „(streng) monoton fallend“ sind in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

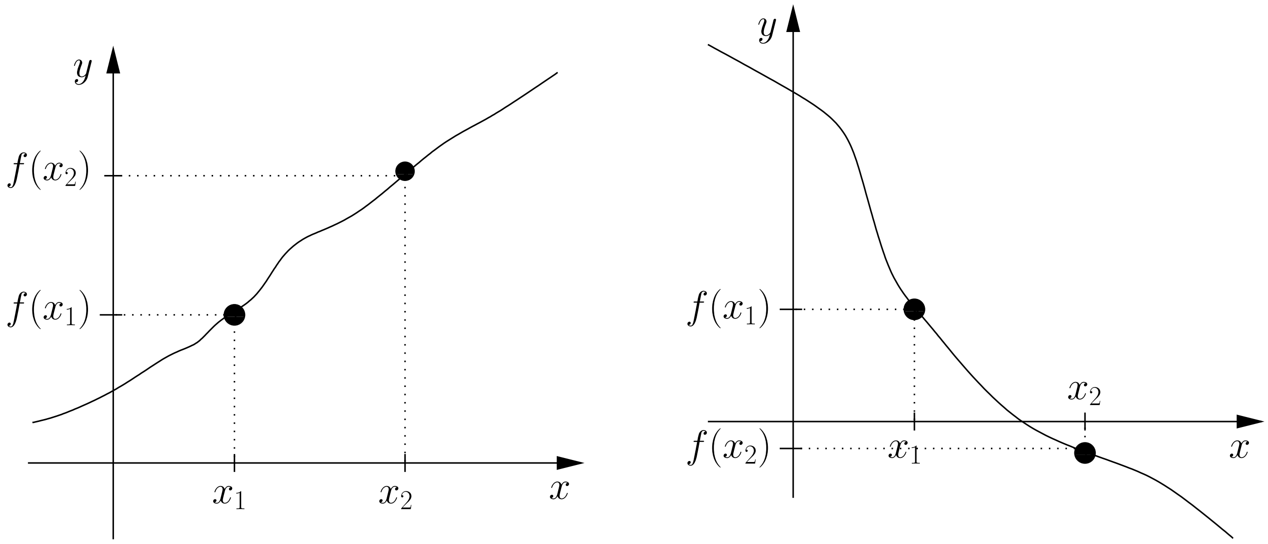


Abbildung 3.1: Die Funktion im linken Bild ist streng monoton wachsend, und die Funktion im rechten Bild ist streng monoton fallend.

Betrachten wir einige Beispiele, um uns die Begriffe (streng) monoton wachsend und (streng) monoton fallend besser vertraut zu machen.

Beispiel 3.9. (lineare Funktion)
Die (affin) lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a\,x + c$, ist:

- monoton wachsend und monoton fallend, wenn $a = 0$ ist,
- streng monoton wachsend, wenn $a > 0$ ist,
- streng monoton fallend, wenn $a < 0$ ist.

Dieses sieht man von der geometrischen Anschauung her direkt an dem Graphen der jeweiligen Funktion (vgl. Abbildung 3.2). Formal weist man es wie folgt

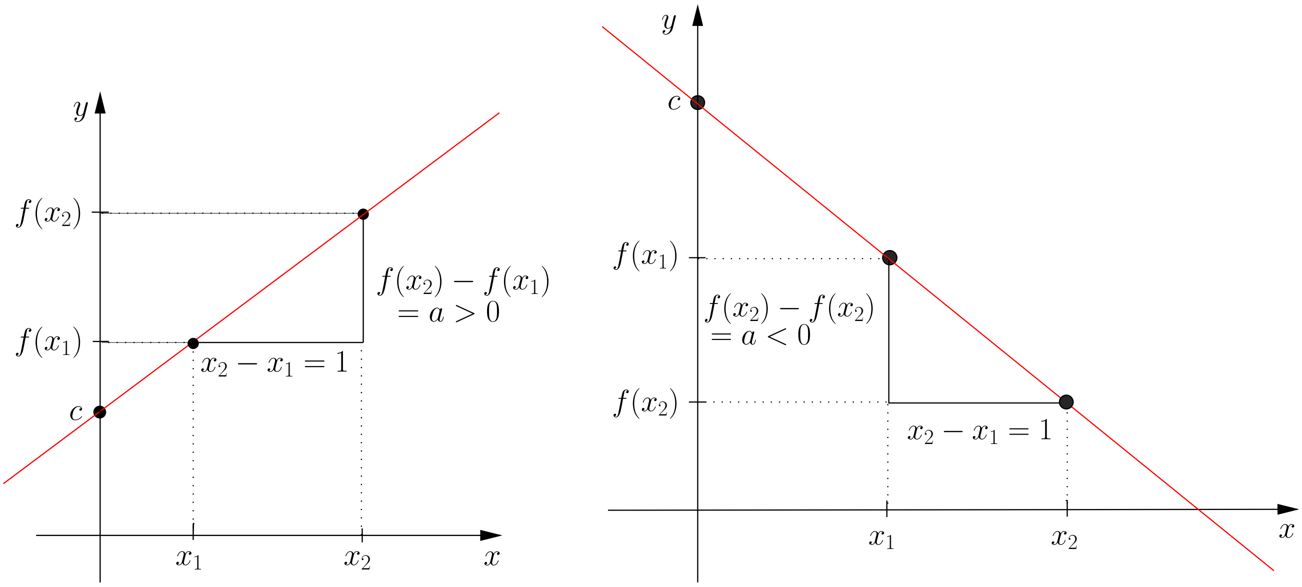


Abbildung 3.2: Der Graph der (affin) linearen Funktion $f(x) = a\,x + c$ mit $a > 0$ (links) und $a < 0$ (rechts).

nach: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$f(x_1) = \begin{cases} a\,x_1 + c < a\,x_2 + c = f(x_2), & \text{falls} \quad a > 0, \\ 0\,x_1 + c = c = 0\,x_2 + c = f(x_2), & \text{falls} \quad a = 0, \\ a\,x_1 + c > a\,x_2 + c = f(x_2), & \text{falls} \quad a < 0, \end{cases}$$

wobei wir benutzt haben, dass aus $x_1 < x_2$ für $a > 0$ folgt, dass $a\,x_1 < a\,x_2$ ist, und dass aus $x_1 < x_2$ für $a < 0$ folgt, dass $a\,x_1 > a\,x_2$ ist (bei Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt sich das Ungleichheitszeichen um).

Beispiel 3.10. (Standardparabel)
Die Standardparabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nicht (streng) monoton wachsend und ist auch nicht (streng) monoton fallend, denn es gilt

$$\begin{array}{lll} & f(-2) = (-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2 = f(-1) & \text{mit} \quad -2 < -1, \\ \text{aber} & f(1) = 1^2 = 1 < 4 = 2^2 = f(2) & \text{mit} \quad 1 < 2. \end{array}$$

3.3 Die Umkehrfunktion

Wir führen zunächst die wichtigen neuen Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv ein. Mit diesen können wir dann anschließend die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion einführen.

Definition 3.11. (injektiv, surjektiv und bijektiv)
Seien D und Y nichtleere Mengen. Eine Funktion $f : D \to Y$ heißt:

(1) ***injektiv**, wenn es zu jedem $y \in Y$ **höchstens ein** Urbild $x \in D$ gibt, d.h. wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ **höchstens eine** Lösung in D hat.*

(2) ***surjektiv**, wenn es zu jedem $y \in Y$ **mindestens ein** Urbild $x \in D$ gibt, d.h. wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ **mindestens eine** Lösung in D hat.*

(3) ***bijektiv**, wenn es zu jedem $y \in Y$ **genau ein** Urbild $x \in D$ gibt, d.h. wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ **genau eine** Lösung in D hat.*

(Also: f ist bijektiv genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist.)

Die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv sind in Abbildung 3.3 illustriert.

Bevor wir Beispiele betrachten, führen wir noch die Begriffe der Bildmenge und der Urbildmenge ein.

Definition 3.12. (Bildmenge und Urbildmenge)
Seien D und Y nichtleere Mengen. Sei $f : D \to Y$ eine Funktion.

(1) Die Menge

$$B_f := f(D) := \{f(x) \ : \ x \in D\}$$

*heißt die **Bildmenge** von f.*

(2) Für jede Menge $A \subseteq D$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \ : \ x \in A\}$$

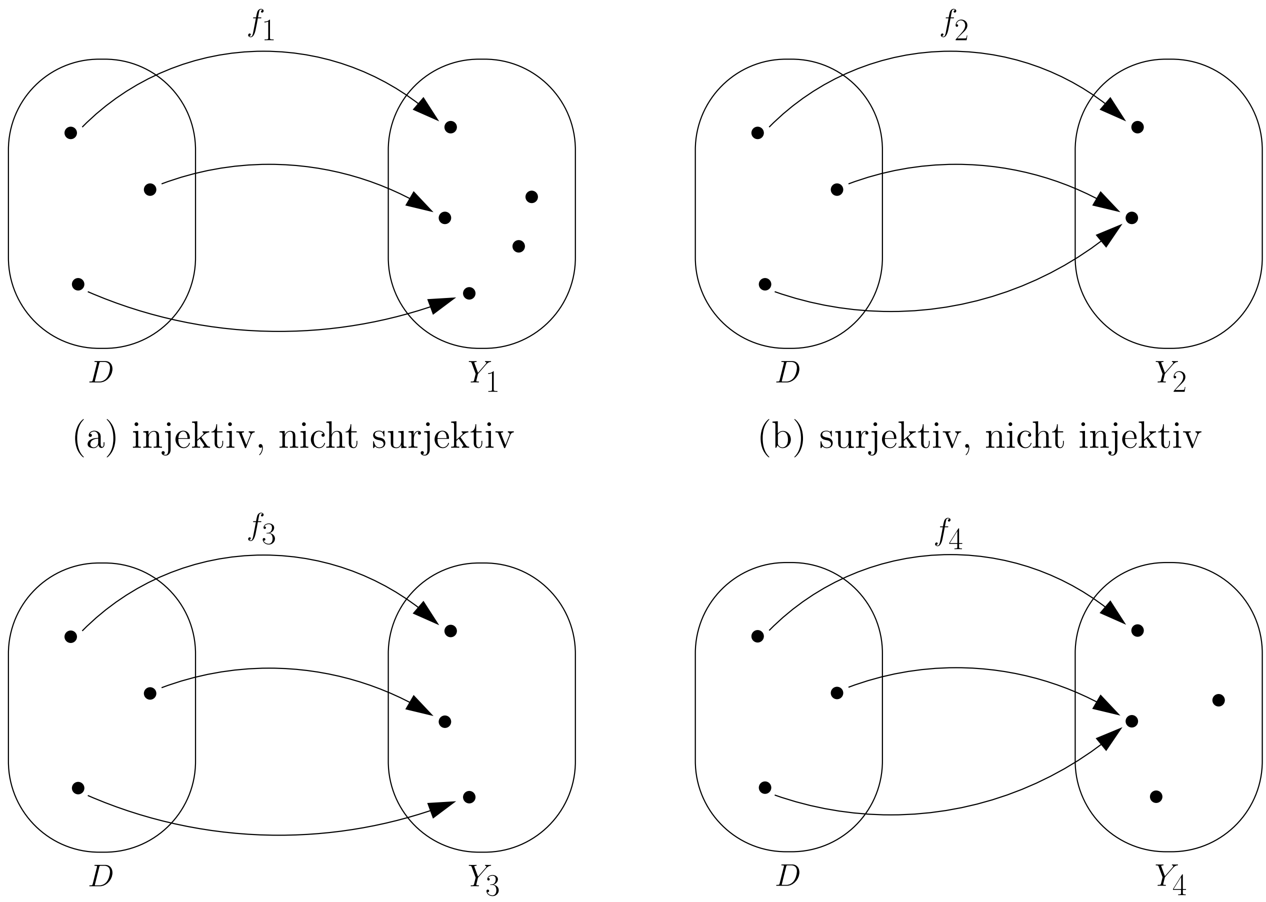
*die **Bildmenge von** A (unter f).*

(3) Für jede Menge $U \subseteq Y$ heißt

$$f^{-1}(U) := \big\{x \in D \ : \ f(x) \in U\big\}$$

*die **Urbildmenge von** U (unter f).*

In Definition 3.12 (3) ist zu beachten, dass die Umkehrfunktion f^{-1} (siehe



(a) injektiv, nicht surjektiv

(b) surjektiv, nicht injektiv

(c) bijektiv

(d) nicht injektiv, nicht surjektiv

Abbildung 3.3: Veranschaulichung der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv.

Definition 3.17 weiter hinten) nicht existieren muss, damit man die Urbildmenge $f^{-1}(U)$ von $U \subseteq Y$ bilden kann.

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen der Eigenschaft „surjektiv“ und der Bildmenge und der Zielmenge. Darum geht es in der nächsten Bemerkung.

Bemerkung 3.13. (Bildmenge, Zielmenge und surjektiv)

(1) Die Bildmenge B_f ist eine Teilmenge von Y und besteht aus allen Funktionswerten der Funktion $f : D \to Y$, also aus allen $y \in Y$, für die Gleichung $f(x) = y$ lösbar ist.

(2) $f : D \to Y$ ist **surjektiv** genau dann, wenn $B_f = Y$ ist.

(3) Ist $f : D \to Y$ **nicht surjektiv**, so kann man f „surjektiv machen“, indem man die Zielmenge Y einfach durch die Bildmenge B_f ersetzt. Dabei ändert sich die Funktion.

Untersuchen wir nun einige Beispiele hinsichtlich dieser für uns neuen Eigenschaften von Funktionen.

Beispiel 3.14. (injektiv, surjektiv und bijektiv)

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$, ist injektiv aber nicht surjektiv. Die Bildmenge B_f ist die Menge der Quadratzahlen.

Begründung: Für $y \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ betrachten wir die Gleichung $x^2 = y$ und suchen Lösungen in $\mathbb{N}$.

- Fall 1 : y ist Quadratzahl, d.h. $y \in \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\} = \{1, 4, 9, \ldots\}$. Dann hat $x^2 = y$ die eindeutige Lösung $x = \sqrt{y} \in \mathbb{N}$.
- Fall 2: $y \in \mathbb{N}$, aber y ist keine Quadratzahl. Dann hat $x^2 = y$ keine Lösung in $\mathbb{N}$.

Also hat $x^2 = y$ für $y \in \mathbb{N}$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{N}$, d.h. f ist injektiv. Da $B_f = \{n^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\} \neq \mathbb{N}$ ist, ist f aber nicht surjektiv.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nicht injektiv und nicht surjektiv. Die Bildmenge ist $B_f = [0, \infty[$.

Begründung: Für $y \in \mathbb{R}$ suchen wir reelle Lösungen von $x^2 = y$.

- Fall 1: $y < 0$. Dann ist $x^2 = y$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$ (weil Quadrate immer ≥ 0 sind). Also ist f nicht surjektiv.
- Fall 2: $y = 0$. Dann hat $x^2 = 0$ genau die eine Lösung $x = 0$.
- Fall 3: $y > 0$. Dann hat $x^2 = y$ zwei reelle Lösungen nämlich $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$. Also ist f nicht injektiv.

Aus Fall 1 bis 3 folgt, dass $B_f = [0, \infty[$ ist.

(c) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[\,$, $f(x) := x^2$, ist nicht injektiv aber surjektiv.

Begründung: Für $y \in [0, \infty[$ suchen wir reelle Lösungen von $x^2 = y$.

- Fall 1: $y = 0$. Dann hat $x^2 = 0$ genau die eine Lösung $x = 0$.
- Fall 2: $y > 0$. Dann hat $x^2 = y$ zwei reelle Lösungen nämlich $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$.

Also hat f für jedes $y \in [0, \infty[$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 = y$, d.h. f ist surjektiv. Da es für $y > 0$ aber zwei Lösungen zu $x^2 = y$ gibt, ist f aber nicht injektiv.

(d) $f : [0, \infty[\,\to [0, \infty[\,$, $f(x) := x^2$, ist bijektiv.

Begründung: Für $y \in [0, \infty[$ suchen wir jetzt nicht-negative reelle Lösungen x der Gleichung $x^2 = y$. Für jedes $y \geq 0$ gibt es genau eine solche Lösung nämlich $x = \sqrt{y}$. Also ist f bijektiv.

Bemerkung 3.15. (Untersuchung auf injektiv oder surjektiv)
In unserem vorigen Beispiel konnten wir durch Auflösen von $y = f(x)$ nach x untersuchen, ob $f : D \to Y$ injektiv oder surjektiv ist. Dieses geht nicht immer. **Wie geht man allgemein vor?**

(1) Um zu prüfen, ob $f : D \to Y$ **injektiv** ist, betrachtet man $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = f(x_2) = y$ für ein beliebiges $y \in f(D)$. Folgt aus $f(x_1) = f(x_2) = y$, dass $x_1 = x_2$ ist, so ist f injektiv.

(2) Findet man für eine Abbildung $f : D \to Y$ dagegen zwei $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt, dass f **nicht injektiv** ist.

(3) Um zu zeigen, dass $f : D \to Y$ **surjektiv** ist, muss man zu jedem $y \in Y$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ finden. Häufig kann man $x \in D$ finden, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst.

(4) Um dagegen zu zeigen, dass $f : D \to Y$ **nicht surjektiv** ist, reicht es, ein $y \in Y$ zu finden, zu dem es kein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt. (Man muss natürlich nachweisen, dass es zu diesem $y \in Y$ auch wirklich kein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt.)

Betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel 3.16. (injektiv, surjektiv und bijektiv)
Ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{17}{x+1} & \text{für } x \neq -1, \\ 0 & \text{für } x = -1, \end{cases}$$

injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv?

Wir unterschieden die beiden Fälle $y = 0$ und $y \neq 0$.

- Sei $y = 0$. Dann gilt $f(x) = 0$ nur für $x = -1$.
- Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt für $x \neq -1$

$$\frac{17}{x+1} = y \;\Big|\cdot \frac{x+1}{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{17}{y} = x + 1 \;\Big| -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{17}{y} - 1 = x.$$

Also finden wir für jedes $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ genau ein $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ mit $f(x) = y$, nämlich $x = \frac{17}{y} - 1$.

Damit haben wir gezeigt, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ existiert. Also ist f injektiv, surjektiv und bijektiv.

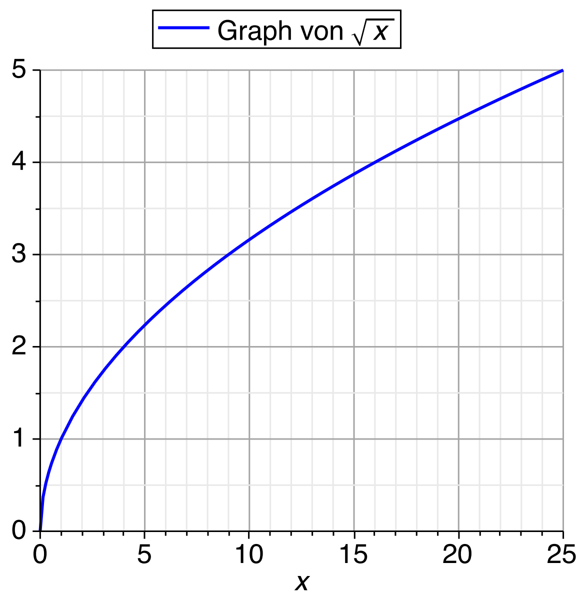
Nun können wir den Begriff der Umkehrfunktion einführen.

Definition 3.17. (Umkehrfunktion)
Ist $f : D \to Y$ ***bijektiv****, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau eine Lösung $x \in D$ von $f(x) = y$. Damit können wir eine neue Funktion definieren, die* ***Umkehrfunktion*** *(oder* ***inverse Funktion****) f^{-1} von f:*

$$f^{-1} : Y \to D, \qquad f^{-1}(y) := \text{„eindeutige Lösung } x \text{ von } f(x) = y \text{ in } D\text{“}.$$

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 3.18. (Umkehrfunktion)



Die Funktion $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist nach Beispiel 3.14 (d) bijektiv. Für $y \geq 0$ ist $x = \sqrt{y}$ die eindeutige nicht-negative Lösung von $x^2 = y$. Also ist

$$f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[, \quad f^{-1}(y) := \sqrt{y},$$

die Umkehrfunktion von f.

Beispiel 3.19. (Umkehrfunktion)
Die (affin) lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\,x + 1$, ist bijektiv, denn die Gleichung

$$y = 2\,x + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y - 1 = 2\,x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y-1}{2} = x$$

hat für jedes $y \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}$, nämlich $x = (y-1)/2$. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}.$$

Wir beobachten, dass die Umkehrfunktion ebenfalls (affin) linear ist.

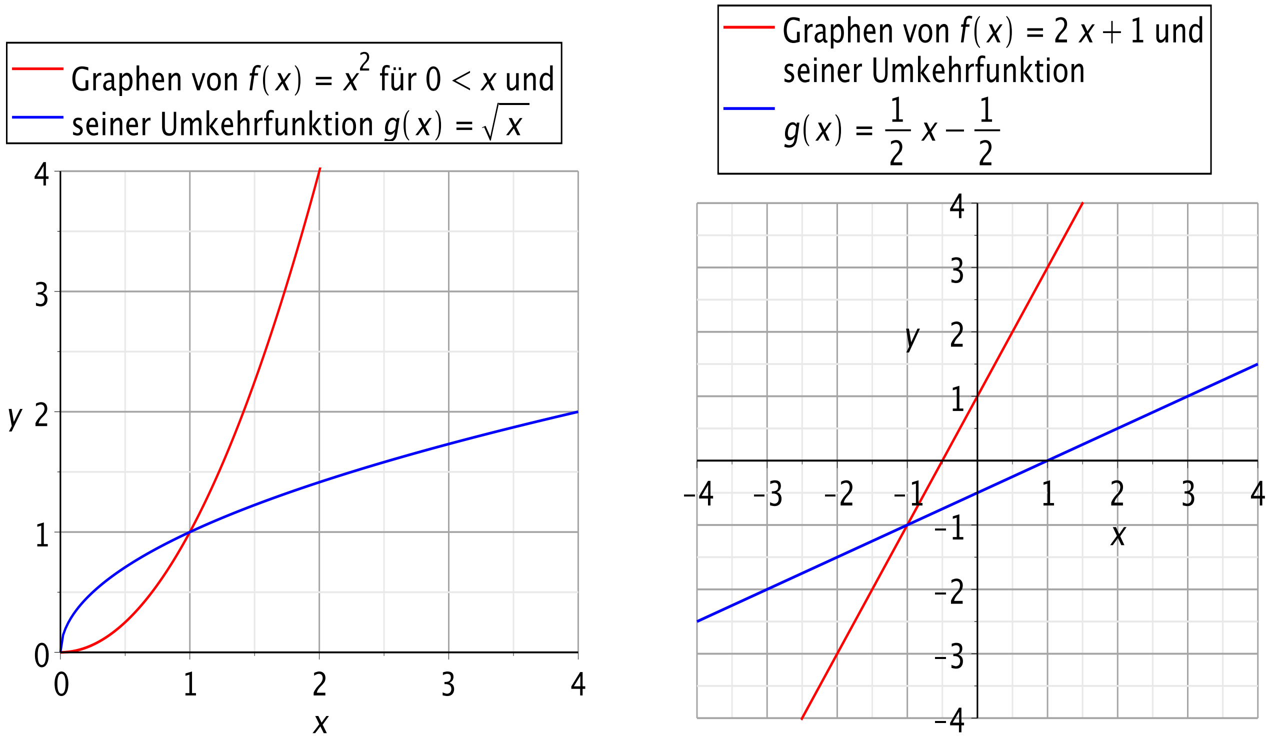


Abbildung 3.4: Veranschaulichung des Graphen von $f : [0,\infty[\, \to [0,\infty[\,,\ f(x) := x^2$, (links) bzw. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\,x + 1$, (rechts), jeweils zusammen mit dem Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.

Bemerkung 3.20. (Graph der Umkehrfunktion)
Ist eine reelle Funktion f bijektiv, so ergibt sich der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an Geraden $y = x$. Falls die Achsen des Koordinatensystems nicht gleich skaliert sind, so muss man die Achsen (einschließlich Beschriftung) mitspiegeln. Dieses ist in Abbildung 3.4 illustriert.

Begründung: Mathematisch zeigt man dieses wie folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma(f^{-1}) &= \big\{ \big(y, f^{-1}(y)\big) \ : \ y \in Y \big\} \\ &= \big\{ \big(f(x), f^{-1}(f(x))\big) \ : \ x \in D \big\} \\ &= \big\{ \big(f(x), x\big) \ : \ x \in D \big\}, \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt genutzt haben, dass sich jedes $y \in Y$ eindeutig als $y = f(x)$ mit genau einem $x \in D$ darstellen lässt, da f bijektiv ist. Im letzten Schritt nutzen wir, dass aus der Definition der Umkehrfunktion $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ für alle $x \in D$ folgt.

Bemerkung 3.21. (Eigenschaften der Umkehrfunktion)
Sei $f : D \to Y$ bijektiv. Dann gelten:

(1) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to D$ ist bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

(2) $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ für alle $x \in D$.
$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ für alle $y \in Y$.

Der nachfolgende Hilfssatz liefert ein nützliches hinreichendes (aber nicht notwendiges) Kriterium, für die Injektivität einer Funktion.

Hilfssatz 3.22. (streng monoton ⇒ injektiv)
Seien $D, Y \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Sei $f : D \to Y$ ***streng monoton wachsend*** *oder* ***streng monoton fallend*** *ist. Dann ist f* ***injektiv****.*

Beweis (durch Widerspruch) von Hilfssatz 3.22: Wir betrachten nur den Fall, dass f streng monoton wachsend ist. Der Fall, dass f streng monoton fallend ist, geht analog.

Sei also f streng monoton wachsend, d.h. für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

Angenommen, f wäre nicht injektiv. Dann gäbe es (mindestens) ein $y \in Y$, für das die Gleichung $f(x) = y$ (mindestens) zwei Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) = y$ hat. Da f streng monoton wachsend ist, folgt nun aber $f(x_1) < f(x_2)$. $\lightning$ Das ist ein Widerspruch zu $f(x_1) = f(x_2) = y$. Da unsere Annahme, dass f nicht injektiv sei, zu einem Widerspruch geführt hat, muss diese Annahme falsch sein. Also ist f injektiv. $\square$

KAPITEL 4

Relationen

In Teilkapitel 4.1 lernen wir zunächst den Begriff einer Relation von einer Menge A nach einer Menge B kennen. Dieser ist eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Funktion, den wir nun als Sonderfall einer Relation charakterisieren können. Weiter lernen wir drei grundlegende Eigenschaften kennen, die eine Relation auf einer Menge A (also eine Relation von A nach A) erfüllen kann, aber nicht muss: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Wir werden an Beispielen von Relationen sehen, dass diese Eigenschaften gar nicht, alleine oder in beliebigen Kombinationen auftreten können.

In Teilkapitel 4.2 betrachten wir den wichtigen Spezialfall der Relation „Kongruenz modulo m" auf $\mathbb{Z}$ (mit $m \in \mathbb{N}$) und lernen für diesen weitere wichtige Konzepte kennen.

In Teilkapitel 4.3 lernen wir dann Äquivalenzrelationen, also reflexive, symmetrische und transitive Relationen auf einer Menge A kennen. Die Relation „Kongruenz modulo m" (mit $m \in \mathbb{N}$) ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, und wir werden fast alle Konzepte, die wir bereits für „Kongruenz modulo m" kennengelernt haben, nun auf beliebige Äquivalenzrelationen übertragen.

In Teilkapitel 4.4 interessieren wir uns genauer für die Quotientenmenge (also die Menge der Äquivalenzklassen) einer Äquivalenzrelation auf einer Menge A und werden sehen, dass diese eine Partition von A ist. Schließlich werden wir eine bijektive Funktion einführen, die die Menge aller Äquivalenzrelationen einer nichtleeren Menge A auf die Menge aller Partitionen von A abbildet.

Dieses Kapitel folgt im Wesentlichen Blochs Buch „Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics" (siehe [3, Chapter 5]).

4.1 Relation: Definition, Beispiele und grundlegende Eigenschaften

Wir lernen zunächst den wichtigen neuen Begriff einer Relation kennen. Dazu benötigen wir das **kartesische Produkt** $A \times B$ zweier Mengen A und B (vgl. Definition 1.20), also

$$A \times B := \big\{(a,b) \ : \ a \in A,\, b \in B\big\}.$$

Definition 4.1. (Relationen)
Seien A und B Mengen.

*(1) Eine **Relation von A nach B** ist eine Teilmenge R des kartesischen Produkts $A \times B$ (d.h. $R \subseteq A \times B$). Gilt für $a \in A$ und $b \in B$, dass $(a,b) \in R$, so sagen wir „a **steht in Relation zu** b“ und schreiben auch $a\,R\,b$. Gilt $(a,b) \notin R$, so schreiben wir auch $a \not\!R\, b$.*

*(2) Eine **Relation auf** A ist eine Relation von A nach A, also eine Teilmenge von $A \times A$.*

*(3) Zwei Relation R und $\widetilde{R}$ von A nach B sind **gleich**, wenn sie beide als dieselbe Teilmenge von $A \times B$ definiert sind.*

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 4.2. (Relation)

(a) Seien $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{4,5,6\}$. Dann ist eine Relation von A nach B beispielsweise $R = \big\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,6)\big\}$. Es gelten dann $1\,R\,4$, $1\,R\,5$, $1\,R\,6$ und $2\,R\,6$, aber z.B. steht 3 nicht in Relation zu 4, also $3 \not\!R\, 4$ (da $(3,4) \notin R$).

(b) Seien B die Menge aller Bücher in der Universitätsbibliothek der Universität Paderborn und S die Menge aller Studierenden der Universität Paderborn. Wir definieren eine Relation $R \subseteq B \times S$ wie folgt: Es gilt $(b,s) \in R$, also $b\,R\,s$, genau dann, wenn das Buch b vom Studierenden s mindestens einmal ausgeliehen wurde.

(c) Das Symbol $\leq$ (**„kleiner (als) oder gleich“**) stellt eine Relation auf den reeller Zahlen $\mathbb{R}$ her:

$$R_{\leq} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x \leq y\big\}.$$

Gilt $(x, y) \in R_\leq$, so schreiben wir weiterhin $x \leq y$ statt $x\, R_\leq\, y$.

Analog definieren die Symbole $<$ („kleiner"), $\geq$ („größer (als) oder gleich") und $>$ („größer") jeweils eine Relation auf $\mathbb{R}$.

(d) Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A, also

$$\mathcal{P}(A) := \big\{X \ : \ X \subseteq A\big\}.$$

Die **Teilmengenbeziehung** „$\subseteq$" stellt eine Relation $R_\subseteq$ auf $\mathcal{P}(A)$ dar: $X \in \mathcal{P}(A)$ steht in der Relation $R_\subseteq$ zu $Y \in \mathcal{P}(A)$, wenn gilt $X \subseteq Y$. Hier schreiben wir direkt $X \subseteq Y$ statt $X\, R_\subseteq\, Y$. Dann ist

$$R_\subseteq = \big\{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \ : \ X \subseteq Y\big\}.$$

(e) Seien D, Y nichtleere Mengen und $f : D \to Y$ eine **Funktion**. Dann definiert f auch eine Relation von D nach Y:

$$R_f := \Gamma(f) = \big\{\big(x, y\big) \in D \times Y \ : \ x \in D,\ y = f(x)\big\}.$$

Achtung: Jede Funktion $f : D \to Y$ definiert eine Relation von D nach Y, aber **nicht jede** Relation $R \subseteq D \times Y$ definiert auch eine Funktion $f : D \to Y$. Wir untersuchen dieses in einer Übungsaufgabe näher.

Wir führen nun noch einen weiteren Begriff für Relationen ein.

Definition 4.3. (Relationklasse)
*Seien A und B nichtleere Mengen und R eine Relation von A nach B. Sei $x \in A$. Die **Relationklasse** $R[x]$ **von** x ist die Menge*

$$R[x] := \big\{y \in B \ : \ x\, R\, y\big\}.$$

(Wenn die Relation klar ist, schreibt man häufig auch nur $[x]$ statt $R[x]$.)

Betrachten wir die Relationklassen in den Beispielen aus Beispiel 4.2.

Beispiel 4.4. (Relationklassen)

(a) Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$. Die Relation

$$R = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 6)\}$$

hat die folgenden Relationklassen

$$[1] = \{4, 5, 6\}, \qquad [2] = \{6\}, \qquad [3] = \emptyset.$$

(b) Seien B die Menge aller Bücher in der Universitätsbibliothek der Universität Paderborn und S die Menge aller Studierenden der Universität Paderborn. Wir definieren eine Relation $R \subseteq B \times S$ wie folgt: Es gilt $(b, s) \in R$, also $b\,R\,s$, genau dann, wenn das Buch b vom Studierenden s mindestens einmal ausgeliehen wurde. Dann ist die Relationklasse des Buches b

$$[b] = \begin{array}{l}\text{„Menge aller Studierenden, die das Buch}\\ \text{mindestens einmal ausgeliehen haben“.}\end{array}$$

(c) Das Symbol $\leq$ (**„kleiner (als) oder gleich“**) stellt eine Relation auf den reeller Zahlen $\mathbb{R}$ her, wobei $x\,R_{\leq}\,y :\Longleftrightarrow x \leq y$. Die Relationklasse von $x \in \mathbb{R}$ ist

$$[x] = \big\{y \in \mathbb{R} \ : \ x \leq y\big\} = [x, \infty[\,.$$

(Das „$:\Longleftrightarrow$ “ in „$x\,R_{\leq}\,y :\Longleftrightarrow x \leq y$“ bedeutet dabei, dass $x\,R_{\leq}\,y$ per Definition äquivalent zu $x \leq y$ ist.)

(d) Die **Teilmengenbeziehung** „$\subseteq$“ stellt eine Relation auf der **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A) := \big\{X \ : \ X \subseteq A\big\}$ einer nichtleeren Menge A dar, wobei $X\,R_{\subseteq}\,Y :\Longleftrightarrow X \subseteq Y$. Die Relationklasse eine Teilmenge $X \in \mathcal{P}(A)$ von A ist

$$[X] = \big\{Y \in \mathcal{P}(A) \ : \ X \subseteq Y\big\},$$

d.h. $[X]$ ist die Menge aller Obermengen in $\mathcal{P}(A)$ von X.

(e) Seien D, Y nichtleere Mengen und $f : D \to Y$ eine **Funktion**. Dann definiert f auch eine Relation von D nach Y:

$$R_f := \Gamma(f) = \big\{\big(x, y\big) \in D \times Y \ : \ x \in D,\ y = f(x)\big\}.$$

Die Relationklasse $[x]$ von $x \in D$ ist $[x] = \big\{y \in Y : y = f(x)\big\} = \{f(x)\}$.

Wir lernen nun spezielle Eigenschaften kennen, die manche Relationen auf einer Menge A erfüllen.

Definition 4.5. (reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv)
Seien A ein nichtleere Menge und R eine Relation auf A.

*(1) Die Relation R heißt **reflexiv**, wenn für **jedes** $x \in A$ gilt $x\,R\,x$.*

*(2) Die Relation R heißt **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $x\,R\,y \implies y\,R\,x$.*

*(3) Die Relation R heißt **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt: $x\,R\,y$ und $y\,R\,z \implies x\,R\,z$.*

Die nachfolgenden Beispiele zeigen, dass diese drei Eigenschaften von Relationen auf einer Menge A in beliebiger Kombination auftreten können.

Beispiel 4.6. (reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv)

(a) Die Kongruenz von Dreiecken stellt eine Relation dar: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie durch eine Kongruenzabbildung ineinander überführt werden können. (*Zur Erinnerung:* Kongruenzabbildungen sind Parallelverschiebung, Drehung, Spiegelung und die Hintereinanderausführung solcher Abbildungen.) Genauer betrachten wir hier also die Menge aller Dreiecke M. Die Relation Kongruenz von Dreiecken ist also dann die folgende Teilmenge von $M \times M$:

$$R := \big\{(D_1, D_2) \ : \ D_1, D_2 \in M, \text{ so dass } D_1 \text{ kongruent zu } D_2 \text{ ist}\big\}.$$

Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv: (Die Details der unten stehenden Erklärungen seien dem Leser überlassen.)

- Jedes Dreieck $D \in M$ ist zu sich selbst kongruent, also $D\,R\,D$. Daher ist die Relation Kongruenz reflexiv. Die verwendete Kongruenzabbildung ist hier die Identitätsabbildung.
- Ist ein Dreieck D_1 zu einem Dreieck D_2 kongruent, so ist auch D_2 zu D_1 kongruent, also: $D_1\,R\,D_2 \Longrightarrow D_2\,R\,D_1$. Daher ist die Relation Kongruenz reflexiv. Um $D_2\,R\,D_1$ zu erhalten, werden die Umkehrabbildungen der in $D_1\,R\,D_2$ verwendeten Kongruenzabbildungen (diese sind ebenfalls Kongruenzabbildungen) in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt.
- Ist ein Dreieck D_1 zu einem Dreieck D_2 kongruent und ist das Dreieck D_2 wieder zu einem Dreieck D_3 kongruent, so ist D_1 auch zu D_3 kongruent. Also gilt: $D_1\,R\,D_2$ und $D_2\,R\,D_3 \implies D_1\,R\,D_3$, d.h. die Relation Kongruenz ist transitiv. Um D_1 in D_3 zu überführen werden zuerst die Kongruenzabbildungen zum Überführen von D_1 in D_2 und danach die Kongruenzabbildungen zum Überführen von D_2 in D_3 hintereinander auf D_1 angewendet.

Insgesamt sehen wir, dass die Kongruenz von Dreiecken eine **reflexive, symmetrische und transitive** Relation ist.

(b) Wir betrachten die folgende Relation R auf $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R}$ steht in Relation zu $y \in \mathbb{R}$, wenn gilt $|x - y| \leq 10$, also wenn der Abstand (ohne Vorzeichen) von x und y höchstens 10 beträgt. Also ist

$$R := \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ |x - y| \leq 10\big\}$$

Diese Relation ist **reflexiv und symmetrisch**, aber sie ist **nicht transitiv**, denn:

- Jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $|x - x| = 0 \leq 10$, d.h. es gilt $x\,R\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist R reflexiv.
- Gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, dass $|x - y| \leq 10$ ist (also $x\,R\,y$), so folgt $|y - x| \leq 10$, also $y\,R\,x$. Also ist R symmetrisch.
- Dass R nicht transitiv ist zeigt das folgende Gegenbeispiel: Die Zahlen $x = 10, y = 17$ und $z = 14$ erfüllen $|x - y| = |10 - 17| = 7 \leq 10$ und $|y - z| = |17 - 24| = 7 \leq 10$, aber $|x - z| = |10 - 24| = 14 > 10$. Also kann R nicht transitiv sein.

(c) Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist **reflexiv, transitiv**, aber **nicht symmetrisch**, denn:

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$, d.h. $x\ R_{\leq}\, x$. Also ist $\leq$ reflexiv.
- Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und damit auch $x \leq y$ gilt niemals $y \leq x$ (denn dieses steht im Widerspruch zu $x < y$). Also ist $\leq$ nicht symmetrisch.
- Gilt für $x, y, z \in \mathbb{R}$, dass $x \leq y$ und $y \leq z$ so folgt immer $x \leq y \leq z$, also $x \leq z$. Also ist $\leq$ transitiv.

(d) Sei R die Relation auf $M := \{-1, 0, 1\}$, die durch die folgende Teilmenge von $M \times M$ definiert ist:

$$R := \big\{(0,0), (1,1), (1,0), (0,1)\big\}$$

Dann ist die Relation **nicht reflexiv**, aber **symmetrisch und transitiv**, denn:

- Da für $-1 \in M$ gilt $(-1,-1) \notin R$, ist $(-1)\not R\,(-1)$. Also ist R nicht reflexiv.
- Um zu überprüfen, dass R symmetrisch ist, brauchen wir nur (x, y) in R mit $x \neq y$ betrachten. Hier gibt es nur $(0,1)$ und $(1,0)$, und da beide zu R gehören gilt jeweils:

$$\begin{aligned} 0\,R\,1 \ \ (\text{da } (0,1) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 1\,R\,0 \ \ (\text{da } (1,0) \in R),\\ 1\,R\,0 \ \ (\text{da } (1,0) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 0\,R\,1 \ \ (\text{da } (0,1) \in R). \end{aligned}$$

  Also ist R symmetrisch.
- Um zu zeigen, dass R transitiv ist, überprüft man alle möglichen nicht-trivialen Kombinationen, die in der Transitivitätsbedingung auftreten können: (Triviale Kombinationen, also hier „$1\,R\,1$ und $1\,R\,1 \Longrightarrow 1\,R\,1$“ und „$0\,R\,0$ und $0\,R\,0 \Longrightarrow 0\,R\,0$“, lassen wir dabei weg.)

$$\begin{aligned} 0\,R\,0 \text{ und } 0\,R\,1 \ (\text{da } (0,0),(0,1) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 0\,R\,1 \ (\text{da } (0,1) \in R),\\ 1\,R\,1 \text{ und } 1\,R\,0 \ (\text{da } (1,1),(1,0) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 1\,R\,0 \ (\text{da } (1,0) \in R), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1\,R\,0 \text{ und } 0\,R\,1 \text{ (da } (1,0),(0,1) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 1\,R\,1 \text{ (da } (1,1) \in R),\\
1\,R\,0 \text{ und } 0\,R\,0 \text{ (da } (1,0),(0,0) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 1\,R\,0 \text{ (da } (1,0) \in R),\\
0\,R\,1 \text{ und } 1\,R\,0 \text{ (da } (0,1),(1,0) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 0\,R\,0 \text{ (da } (0,0) \in R),\\
0\,R\,1 \text{ und } 1\,R\,1 \text{ (da } (0,1),(1,1) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 0\,R\,1 \text{ (da } (0,1) \in R).
\end{aligned}$$

Also ist R transitiv.

(e) Sei R die Relation auf $M := \{1,2,3\}$, die durch die folgende Teilmenge von $M \times M$ definiert ist:

$$R := \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\big\}$$

Dann ist R **reflexiv**, aber **nicht symmetrisch** und **nicht transitiv**.

- Die Relation R ist reflexiv, denn für jedes $x \in \{1,2,3\}$ gilt $x\,R\,x$, da $(1,1),(2,2),(3,3) \in R$.
- Die Relation R ist nicht symmetrisch, denn es gilt $1\,R\,2$ (da $(1,2) \in R$), aber $2 \not\!R\, 1$ (da $(2,1) \notin R$).
- Die Relation R ist nicht transitiv, denn aus $1\,R\,2$ und $2\,R\,3$ (da $(1,2),(2,3) \in R$ folgt nicht $1\,R\,3$ (da $(1,3) \notin R$).

(f) Sei R die Relation auf $M := \{1,2,3\}$, die durch die folgende Teilmenge von $M \times M$ definiert ist:

$$R := \big\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\big\}$$

Dann ist R **symmetrisch**, aber **nicht reflexiv** und **nicht transitiv**.

- Die Relation R ist nicht reflexiv, denn für $1 \in M$ gilt nicht $1\,R\,1$ (da $(1,1) \notin R$).
- Die Relation R ist symmetrisch, denn es gilt

$$\begin{aligned}
1\,R\,2 \;\text{ (da } (1,2) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 2\,R\,1 \;\text{ (da } (2,1) \in R),\\
2\,R\,1 \;\text{ (da } (2,1) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 1\,R\,2 \;\text{ (da } (1,2) \in R),\\
2\,R\,3 \;\text{ (da } (2,3) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 3\,R\,2 \;\text{ (da } (3,2) \in R),\\
3\,R\,2 \;\text{ (da } (3,2) \in R) \quad &\Longrightarrow \quad 2\,R\,3 \;\text{ (da } (2,3) \in R).
\end{aligned}$$

- Die Relation R ist nicht transitiv, denn aus $1\,R\,2$ und $2\,R\,3$ (da $(1,2),(2,3) \in R$) folgt nicht $1\,R\,3$ (da $(1,3) \notin R$).

(g) Die Relation $<$ („kleiner“) auf $\mathbb{R}$ ist **transitiv**, aber **nicht reflexiv** und **nicht symmetrisch**.

- Für keine reelle Zahl x gilt $x < x$, d.h. es gilt $x \not\!R\, x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $<$ nicht reflexiv.

- Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt nach den Anordnungsaxiomen (vgl. Anhang D) $x < y$ oder $y < x$ aber nicht beides. Also folgt aus $x < y$ nicht $y < x$, d.h. $<$ ist nicht symmetrisch.
- Nach den Anordnungsaxiomen (vgl. Anhang D) folgt für $x, y, z \in \mathbb{R}$ aus $x < y$ und $y < z$, dass auch $x < z$ ist. Also ist $<$ transitiv.

(h) Sei M die Menge aller Personen auf der Erde. Die Relation auf R, dass eine Person x die Tochter einer anderen Person y ist, ist **nicht reflexiv, nicht symmetrisch** und **nicht transitiv**.

- Da keine Person x Tochter von sich selbst ist, ist die Relation R nicht reflexiv.
- Ist Person x eine Tochter von Person y, so ist Person y keine Tochter von Person x. Also ist R nicht symmetrisch.
- Ist Person x eine Tochter von Person y und ist Person y eine Tochter von Person z, so folgt daraus nicht, dass Person x eine Tochter von Person z ist. Also ist R nicht transitiv.

4.2 Kongruenz modulo m

Als Vorbereitung auf den Begriff der Kongruenz modulo m betrachten wir die Uhr mit dem 24-Stundensystem.

Angenommen aktuell ist es 8:00 Uhr morgens. Wir wollen nun wissen, wie spät es in 12 Stunden ist. Dazu addieren wir einfach $8 + 12 = 20$ und erhalten, dass es dann 20:00 Uhr ist. Wie spät ist es aber in 30 Stunden? $8 + 30 = 38$, aber wir müssen noch 24 subtrahieren, um die korrekte Uhrzeit am nächsten Tag zu erhalten, also $38 - 24 = 14$. Also ist es in 30 Stunden 14:00 Uhr (am nächsten Tag). Wie spät ist es in 76 Stunden? $8+76 = 84$ und $84-3\cdot 24 = 84-72 = 12$, also ist es in 72 Stunden 12:00 Uhr (drei Tage später).

Wir ziehen also von der Stundenzahl immer solange ein ganzzahliges Vielfaches von 24 ab, bis wir eine eine Uhrzeit von 0:00 bis 23:59 Uhr erhalten. Hierbei haben bereits im der Kongruenz modulo 24 gearbeitet.

Definition 4.7. (kongruent modulo m)
*Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen „a ist **kongruent zu** b **modulo** m“, in Zeichen „$a \equiv b \mod m$“, wenn gilt $a - b = k\,m$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Ist a **nicht** kongruent zu b modulo m, so schreiben wie „$a \not\equiv b \mod m$“*

Mittels

$$a - b = k\,m \quad \text{mit } k \in Z \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b + k\,m \quad \text{mit } k \in Z$$

sieht man, dass sich a von b (und b von a) additiv nur um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheidet.

Beispiel 4.8. (kongruent modulo m)

(a) $21 = 0 \bmod 3$, da $21 - 0 = 21 = 7 \cdot 3$ ist.
$17 \equiv 2 \bmod 3$, da $17 - 2 = 15 = 5 \cdot 3$ ist.
$17 \equiv -1 \bmod 3$, da $17 - (-1) = 18 = 6 \cdot 3$ ist.
$8 \equiv 17 \bmod 3$, da $8 - 17 = -9 = (-3) \cdot 3$ ist.
$17 \equiv -7 \bmod 3$, da $17 - (-7) = 24 = 8 \cdot 3$ ist.

(b) $-7 \equiv 1 \bmod 4$, da $-7 - 1 = -8 = (-2) \cdot 4$ ist.
$1 \equiv -7 \bmod 4$, da $1 - (-7) = 8 = 2 \cdot 4$ ist.
$-1 \equiv 7 \bmod 4$, da $-1 - 7 = -8 = (-2) \cdot 4$ ist.
$0 \equiv 4 \bmod 4$, da $0 - 4 = -4 = (-1) \cdot 4$ ist.
$-13 \equiv -1 \bmod 4$, da $-13 - (-1) = -12 = (-3) \cdot 4$ ist.

Kongruenz modulo m ist eine **Relation** $R_{\text{mod } m} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **auf** $\mathbb{Z}$:

$$(a, b) \in R_{\text{mod } m} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \bmod m.$$

Der nächste Hilfssatz hält fest, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Hilfssatz 4.9. (Kongruenz modulo m ist reflexiv, symmetrisch und transitiv)
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann gelten:

(1) $a \equiv a \bmod m$

(2) Aus $a \equiv b \bmod m$ *folgt* $b \equiv a \bmod m$.

(3) Aus $a \equiv b \bmod m$ *und* $b \equiv c \bmod m$ *folgt* $a \equiv c \bmod m$.

Die Relationklassen $[a]_m := \big\{b \in \mathbb{Z} \ : \ a \equiv b \bmod m\big\}$ *(für $a \in \mathbb{Z}$) bzgl. der Kongruenz modulo m werden als **Restklassen** bezeichnet.*

Beweis von Hilfssatz 4.9:

(1) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a \equiv a \bmod m$, da $a - a = 0 = 0 \cdot m$.

(2) Aus $a \equiv b \bmod m$ folgt per Definition $a - b = k\,m$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $b - a = (-k)\,m$ mit $-k \in \mathbb{Z}$. Also gilt $b \equiv a \bmod m$.

(3) Es gelte $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m$. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = k\,m$ und $b - c = \ell\,m$. Addieren der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{array}{c} a - b = k\,m \\ b - c = \ell\,m \\ \hline a - c = (k + \ell)\,m \end{array}$$

mit $k + \ell \in \mathbb{Z}$. Also gilt $a \equiv c \bmod m$. □

Bei unserem 24-Stundensystem ist es selbstverständlich, dass wir jeder Stunde (ab einem gewissen Referenzzeitpunkt) eine Stunde von $0, 1, 2, \ldots, 23$ zuweisen können. Eine analoge Aussage gilt auch allgemein bei der Kongruenz modulo m.

Satz 4.10. **(**$a \equiv r \bmod m$ **mit eindeutigem** $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$**)**
*Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine **eindeutig bestimmte** Zahl $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $a \equiv r \bmod m$.*

Der Beweis nutzt die Division mit Rest.

Satz 4.11. (Division mit Rest)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$, so dass

$$a = q\,b + r \qquad \text{und} \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Beweis von Satz 4.11: Wir zeigen zunächst die *Existenz von q und r*. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Ist $a = k\,b$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, so gilt $a = q\,b + r$ mit $q := k$ und $r := 0$, und es ist nichts weiter zu zeigen.

Fall 2: Sei $a \neq k\,q$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten nun

$$M := \big\{a - k\,b \;:\; a - k\,b \geq 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}\big\} \subseteq \mathbb{N}.$$

(Wir wissen per Annahme, dass $a - k\,b \neq 0$, so dass 0 nicht zu M gehören kann.) Als Teilmenge der natürlichen Zahlen hat M ein kleinstes Element r. Dieses trete für ein $q \in \mathbb{Z}$ auf, also $r = a - q\,b$. Dann gilt $a = q\,b + r$, und per Definition ist $r > 0$. Wenn wir zeigen können, dass $r < |b|$ ist, so sind wir fertig. Wir zeigen dieses mit einem Widerspruchsbeweis.

Angenommen, es gelte $r \geq |b|$. Dann ist $r - |b| \geq 0$ und

$$\begin{aligned} a &= q\,b + r = q\,b + |b| + (r - |b|) \\ &= \begin{cases} q\,b + b + (r - |b|) = (q+1)\,b + (r - |b|) & \text{für } b > 0, \\ q\,b + (-b) + (r - |b|) = (q-1)\,b + (r - |b|) & \text{für } b < 0 \end{cases} \\ \Longrightarrow &\qquad \begin{cases} a - (q+1)\,b = (r - |b|) & \text{für } b > 0, \\ a - (q-1)\,b = (r - |b|) & \text{für } b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Also finden wir mit $\ell := q + 1$ für $b > 0$ und mit $\ell := q - 1$ für $b < 0$, dass

$$0 < a - \ell\,b = \underbrace{r - |b|}_{\geq 0} < r = \min(M),$$

und $a - \ell\,b \in M$. ↯ Dieses ist ein Widerspruch zur Konstruktion von r als Minimum der Menge M. Da wir einen Widerspruch erhalten, war unsere Annahme falsch, und es folgt $0 < r < |b|$.

Nun zeigen wir die *Eindeutigkeit von q und r*. Angenommen es gäbe q_1, q_2, r_1, r_2 mit $r_1 < r_2$ und $0 \leq r_1 < |b|$ und $0 \leq r_2 < |b|$, so dass

$$a = q_1\,b + r_1 \qquad \text{und} \qquad a = q_2\,b + r_2.$$

(*Anmerkung:* Wäre $r_1 = r_2$, so würde $a - r_1 = a - r_2$ und damit $q_1\,b = q_2\,b \iff (q_1 - q_2)\,b = 0$ folgen. Wegen $b \neq 0$ folgt dann $q_1 = q_2$. Also ist nur der Fall $r_1 \neq r_2$ interessant.) Dann folgt durch Subtrahieren der beiden Gleichungen

$$0 = (q_1 - q_2)\,b + (r_1 - r_2) \qquad \iff \qquad r_2 - r_1 = (q_1 - q_2)\,b. \tag{4.1}$$

Wäre $q_1 \neq q_2$ so folgt

$$|r_2 - r_1| = \underbrace{|q_1 - q_2|}_{\geq 1}\,|b| \geq |b|,$$

aber dieses ist ein Widerspruch zu $|r_2 - r_1| < |b|$. Dabei gilt $|r_2 - r_1| < |b|$, weil

$$-|b| < -r_1 \leq r_2 - r_1 \leq r_2 < |b|.$$

Also folgt $q_1 = q_2$ und damit aus (4.1) auch $r_2 - r_1 = 0$, also $r_1 = r_2$. Also sind $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q\,b + r$ und $0 \leq r < |b|$ eindeutig bestimmt. $\square$

Nun können wir Satz 4.10 beweisen.

Beweis von Satz 4.10: Sei $a \in \mathbb{Z}$. Nach Satz 4.11 gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q\,m + r$ und $0 \leq r < |b|$. Daraus folgt

$$a - r = q\,m \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \equiv r \bmod m.$$

Damit sind die *Existenz* und die *Eindeutigkeit* eines $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $a \equiv r \bmod m$ gezeigt. $\square$

Als Nächstes ziehen wir einige Schlussfolgerungen aus Satz 4.10.

Folgerung 4.12. (aus Satz 4.10)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

(1) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt ***genau eine*** *der folgenden Gleichungen: $a = k\,m$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, oder $a = k\,m + 1$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, oder $a = k\,m + 2$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, oder $\ldots$, oder $a = k\,m + (m-1)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$.*

(2) Jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist ein Element von ***genau einer*** *der Restklassen $[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m$ der Kongruenz modulo m.*

Beweis von Folgerung 4.12:

(1) Nach Satz 4.10 gilt für jedes $a \in \mathbb{Z}$ die Relation $a \equiv r \bmod m$ mit einem eindeutigen $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Dieses bedeutet $a - r = k\,m \iff a = k\,m + r$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Nach Satz 4.10 gilt für jedes $a \in \mathbb{Z}$ die Relation $a \equiv r \bmod m$ mit einem eindeutigen $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Wegen der Symmetrie der Kongruenz modulo m gilt auch $r \equiv a \bmod m$, also $a \in [r]_m$.

Wir zeigen nun, dass $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $a \in [r]_m$ eindeutig bestimmt ist: Angenommen, es würde gelten $a \in [r]_m$ und $a \in [s]_m$ mit

$r, s \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Dann gilt $r \equiv a \bmod m$ und $s \equiv a \bmod m$. Wegen der Symmetrie folgt auch $a \equiv s \bmod m$. Wegen der Transitivität folgt aus $r \equiv a \bmod m$ und $a \equiv s \bmod m$, dass $r \equiv s \bmod m$ gilt, und

$$r \equiv s \bmod m \qquad \Longleftrightarrow \qquad r - s = k\, m \text{ mit einem } k \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Wegen $0 \leq r \leq m-1$ und $0 \leq s \leq m-1 \iff -(m-1) \leq -s \leq 0$ folgt

$$-(m-1) \leq -s \leq r - s \leq r \leq m-1,$$

d.h. es gilt $|r - s| \leq m - 1$. Daraus folgt, dass in (4.2) $k = 0$ gelten muss. Also ist $r - s = 0 \iff r = s$, d.h. $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $a \in [r]_m$ ist eindeutig bestimmt. □

Wir bemerken, dass aus Folgerung 4.12 (1) insbesondere für $m = 2$ folgt, dass für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a = 2k$ oder $a = 2k + 1$ mit einem (eindeutig bestimmten) $k \in \mathbb{Z}$, d.h. jede ganze Zahl ist gerade oder ungerade.

Machen wir uns an einem Beispiel klar, wie die Restklassen, also die Relationklassen der Kongruenz modulo m, aussehen.

Beispiel 4.13. (Restklassen der Kongruenz modulo 5**)**
Bestimmen wir die Restklassen bzgl. der Relation „kongruent modulo 5“.

Allgemein gilt für die Restklassen bzgl. der Relation „kongruent modulo m“

$$\begin{aligned} [a]_m &= \big\{ b \in \mathbb{Z} \;:\; a \equiv b \bmod m \big\} \\ &= \big\{ b \in \mathbb{Z} \;:\; a - b = k\, m \text{ mit einem } k \in \mathbb{Z} \big\} \\ &= \big\{ b \in \mathbb{Z} \;:\; b = a + (-k)\, m \text{ mit einem } k \in \mathbb{Z} \big\} \\ &= \big\{ b \in \mathbb{Z} \;:\; b = a + \ell\, m \text{ mit einem } \ell \in \mathbb{Z} \big\}. \end{aligned}$$

Konkret finden wir also für $m = 5$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ [0]_5 &= \big\{ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots \big\}, \\ [1]_5 &= \big\{ \ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots \big\}, \\ [2]_5 &= \big\{ \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots \big\}, \\ [3]_5 &= \big\{ \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots \big\}, \\ [4]_5 &= \big\{ \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots \big\}, \\ [5]_5 &= \big\{ \ldots, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots \big\}, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

und wir sehen, dass sich die Restklassen der Kongruenz modulo 5 nach fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen wiederholen:

$$\begin{aligned}
\ldots = [-5] = [0] = [5] = [10] = \ldots,\\
\ldots = [-4] = [1] = [6] = [11] = \ldots,\\
\ldots = [-3] = [2] = [7] = [12] = \ldots,\\
\ldots = [-2] = [3] = [8] = [13] = \ldots,\\
\ldots = [-1] = [4] = [9] = [14] = \ldots.
\end{aligned}$$

Ein analoges Phänomen wie im vorigen Beispiel tritt für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ auf.

Satz 4.14. (Eigenschaften der Restklassen der Kongruenz mod. m)
Sei $m \in \mathbb{N}$.

(1) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gelten:

   (i) $a \equiv b \bmod m \iff [a]_m = [b]_m$

   (ii) $a \not\equiv b \bmod m \iff [a]_m \cap [b]_m = \emptyset$

(2) Es gilt $[0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m = \mathbb{Z}$,

   *und die Restklassen $[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m$ sind **paarweise disjunkt**.*

Bezeichnung: Man nennt die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **paarweise disjunkt**, wenn gilt: $A_j \cap A_k = \emptyset$ für alle $j, k = 1, 2, \ldots, n$ mit $j \neq k$.

Beweis von Satz 4.14:

(1) (i) *Beweis von $\Longrightarrow$:* Es gelte $a \equiv b \bmod m$. Dann gilt wegen der Symmetrie der Kongruenz modulo m auch $b \equiv a \bmod m$.
Sei nun $x \in [a]_m$. Dann gilt $a \equiv x \bmod m$. Wegen der Transitivität der Kongruenz modulo m folgt aus $b \equiv a \bmod m$ und $a \equiv x \bmod m$ auch $b \equiv x \bmod m$, d.h. $x \in [b]_m$. Also gilt $[a]_m \subseteq [b]_m$.
Mit einem analogen Argument zeigt man, dass $[b]_m \subseteq [a]_m$.
Aus $[a]_m \subseteq [b]_m$ und $[b]_m \subseteq [a]_m$ folgt $[a]_m = [b]_m$.
Beweis von $\Longleftarrow$: Es gelte $[a]_m = [b]_m$. Wegen der Reflexivität der Kongruenz modulo m gilt $b \in [b]_m$ und damit auch $b \in [a]_m$. Daraus folgt direkt, dass $a \equiv b \bmod m$.

(ii) *Beweis von* $\Longrightarrow$: Es gelte $a \not\equiv b \bmod m$. Wir zeigen $[a]_m \cap [b]_m = \emptyset$ mit einem *Beweis durch Widerspruch*: Angenommen $[a]_m \cap [b]_m \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $y \in [a]_m \cap [b]_m$, und für diese y gilt $a \equiv y \bmod m$ und $b \equiv y \bmod m$. Aus $b \equiv y \bmod m$ folgt wegen der Symmetrie der Kongruenz modulo m, dass $y \equiv b \bmod m$. Aus $a \equiv y \bmod m$ und $y \equiv b \bmod m$ folgt wegen der Transitivität der Kongruenz modulo m, dass $a \equiv b \bmod m$. $\lightning$ Dieses ist ein Widerspruch zu $a \not\equiv b \bmod m$. – Also war die Annahme $[a]_m \cap [b]_m \neq \emptyset$ falsch; es folgt $[a]_m \cap [b]_m = \emptyset$.

Beweis von $\Longleftarrow$: Es gelte $[a]_m \cap [b]_m \equiv \emptyset$. Wegen der Reflexivität der Kongruenz modulo m folgt $b \in [b]_m$ und somit $b \notin [a]_m$. Also gilt $a \not\equiv b \bmod m$.

(2) Per Definition gilt $[a]_m \subseteq \mathbb{Z}$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$. Somit gilt auch

$$[0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m \subseteq Z.$$

Sei nun $x \in \mathbb{Z}$. Nach Satz 4.10 existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $x \equiv r \bmod m$. Wegen der Symmetrie der Kongruenz modulo m gilt dann auch $r \equiv x \bmod m$, d.h. $x \in [r]_m$. Wegen $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ folgt somit $x \in [0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m$. Also gilt auch $\mathbb{Z} \subseteq [0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m$.

Aus beiden Teilmengenbeziehungen zusammen folgt

$$\mathbb{Z} = [0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m. \tag{4.3}$$

Für $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $r_1 \neq r_2$ gelten $r_1 \equiv r_1 \bmod m$ bzw. $r_2 \equiv r_2 \bmod m$, und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung $a \equiv r \bmod m$ mit $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ folgt $r_1 \not\equiv r_2 \bmod m$. Nach Satz 4.14 (1) (ii) folgt daraus $[r_1] \cap [r_2] = \emptyset$, d.h. die Mengen $[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m$ sind paarweise disjunkt. $\square$

Wir führen nun eine Bezeichnung für die Menge der Restklassen modulo m ein.

Definition 4.15. ($\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und Repräsentant einer Restklasse)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Menge der (verschiedenen) Restklassen bzgl. der Kongruenz modulo m wird als ***Quotientenmenge $\mathbb{Z}_m$ bzgl. der Kongruenz modulo m*** *bezeichnet. In Formeln:*

$$\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \big\{[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m\big\}.$$

Man nennt jedes $b \in [a]_m$ einen ***Repräsentanten der Restklasse*** *$[a]_m$. (Anmerkung: Die Bezeichnung „Repräsentant der Restklasse“ macht Sinn, denn es gilt $b \in [a]_m \iff a \equiv b \bmod m \iff [a]_m = [b]_m$.)*

Beispiel 4.16. (24**-Stunden-Arithmetik)**

Kommen wir nun noch einmal auf unser motivierendes Beispiel mit der Zeitangabe der Stunde eines jedes Tagen im 24-Stundensystem zurück. Die Menge der Restklassen modulo 24 ist

$$\mathbb{Z}_{24} = \big\{[0]_{24}, [1]_{24}, [2]_{24}, \ldots, [22]_{24}, [23]_{24}\big\} = \big\{[a]_{24} \ : \ a = 0, 1, \ldots, 23\big\}.$$

Jede Stundenangabe gehört also genau einer der Restklassen $[a]_{24}$ mit a aus $\{0, 1, 2, \ldots, 22, 23\}$ an und wird an ihrem Tag durch Angabe der Stunde a dargestellt. So ist die Stunde mit der Nummer 173 nach 7:00 Uhr gerade die Stunde $173 + 7 = 180 = 7 \cdot 24 + 12$ also 12:00 Uhr und $180 \in [12]_{24}$ und damit auch $[180]_{24} = [12]_{24}$.

Wir wollen nun eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}_m$ mit $m \in \mathbb{N}$ definieren. Als Vorbereitung brauchen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 4.17. (Kongruenz modulo m bleibt unter Addition und Multiplikation erhalten)
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Es gelten $a \equiv c \bmod m$ und $b \equiv d \bmod m$. Dann folgen $a + b \equiv c + d \bmod m$ und $a\,b \equiv c\,d \bmod m$.

Beweis von Hilfssatz 4.17: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Aus $a \equiv c \bmod m$ und $b \equiv d \bmod m$ folgt per Definition

$$\begin{aligned} a - c &= k\,m \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} &\iff&& a &= c + k\,m \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}, \\ b - d &= \ell\,m \quad \text{mit } \ell \in \mathbb{Z} &\iff&& b &= d + \ell\,m \quad \text{mit } \ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Daraus folgen direkt

$$\begin{aligned} a + b &= c + d + \underbrace{(k + \ell)}_{\in \mathbb{Z}}\, m &\iff&& a + b &\equiv c + d \bmod m, \\ a\,b &= c\,d + \underbrace{(d\,k + c\,\ell + k\,\ell\,m)}_{\in \mathbb{Z}}\, m &\iff&& a\,b &\equiv c\,d \bmod m, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Aus Hilfssatz 4.17 können wir direkt ein wichtige Folgerung ziehen.

Folgerung 4.18. (Restklassen bleiben unter Addition und Multiplikation der Repräsentanten erhalten)
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $[a]_m, [b]_m, [c]_m, [d]_m \in \mathbb{Z}_m$. Es gelten $[a]_m = [c]_m$ und $[b]_n = [d]_m$. Dann folgen $[a+b]_m = [c+d]_m$und $[a\,b]_m = [c\,d]_m$.

Beweis von Folgerung 4.18: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $[a]_m, [b]_m, [c]_m, [d]_m \in \mathbb{Z}_m$. Es gelten $[a]_m = [c]_m$ und $[b]_n = [d]_m$. Nach Satz 4.14 (1) (i) sind diese Aussagen jeweils äquivalent zu $a \equiv c \bmod m$ und $b \equiv d \bmod m$. Nach Hilfssatz 4.17 folgen dann $a + b \equiv c + d \bmod m$ und $a\,b \equiv c\,d \bmod m$. Nach Satz 4.14 (1) (i) sind diese Aussagen jeweils äquivalent zu $[a+b]_m = [c+d]_m$ bzw. $[a\,b]_m \equiv [c\,d]_m$. □

Mit Folgerung 4.18 ist nun die nachfolgende Definition sinnvoll.

Definition 4.19. (Addition und Multiplikation für Restklassen)
*Sei $m \in \mathbb{Z}$. Durch $[a]_m + [b]_m := [a+b]_m$ und $[a]_m \cdot [b]_m := [a\,b]_m$ für alle $[a]_m, [b]_m \in \mathbb{Z}_m$ werden eine **Addition** und eine **Multiplikation** auf $\mathbb{Z}_m$ definiert.*

Beispiel 4.20. (Rechnen mit Restklassen modulo m)

(a) In $\mathbb{Z}_{11}$ gilt $[10]_{11} + [5]_{11} = [15]_{11} = [4]_{11}$.

In $\mathbb{Z}_5$ gilt $[10]_5 + [5]_5 = [15]_5 = [0]_5$.

Es gilt auch $[5]_5 = [0]_5$ und $[10]_5 = [0]_5$. Also hätte man auch wie folgt rechnen können: $[10]_5 + [5]_5 = [0]_5 + [0]_5 = [0]_5$.

(b) In $\mathbb{Z}_7$ gilt $[5]_7 + [6]_7 = [11]_7 = [4]_7$.

In $\mathbb{Z}_9$ gilt $[5]_9 + [6]_9 = [11]_9 = [2]_9$.

An diesem Beispiel und dem in (a) sehen wir bereits, dass das Ergebnis der Addition zweier Restklassen davon abhängt, in welchem $\mathbb{Z}_m$ man sich befindet.

(c) In $\mathbb{Z}_{11}$ gilt $[10]_{11} \cdot [5]_{11} = [50]_{11} = [6]_{11}$.

In $\mathbb{Z}_5$ gilt $[10]_5 \cdot [5]_5 = [50]_5 = [0]_5$. Man hätte auch wie folgt rechnen können: $[10]_5 \cdot [5]_5 = [0]_5 \cdot [0]_5 = [0]_5$.

In $\mathbb{Z}_7$ gilt $[5]_7 \cdot [6]_7 = [30]_7 = [2]_7$.

In $\mathbb{Z}_9$ gilt $[5]_9 \cdot [6]_9 = [30]_9 = [3]_9$.

In $\mathbb{Z}_6$ gilt $[4]_6 \cdot [3]_6 = [12]_6 = [0]_6$.

Wir beobachten an dem letzten Beispiel, dass es vorkommen kann, das das Produkt zweier von $[0]_m$ verschiedener Restklassen in $\mathbb{Z}_m$ (im Beispiel $[3]_6$ und $[4]_6$) die Restklasse $[0]_m$ (also im Beispiel $[0]_6$) ergibt.

(d) Die Restklassenaddition und die Restklassenmultiplikation lassen sich jeweils bequem mit einer **Additions-** bzw. einer **Multiplikationstabelle** darstellen. Dieses ist hier für das Beispiel von $\mathbb{Z}_6$ illustriert:

$+$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[1]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$
$[5]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$

$\cdot$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$
$[1]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[2]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$
$[4]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$
$[5]_6$	$[0]_6$	$[5]_6$	$[4]_6$	$[3]_6$	$[2]_6$	$[1]_6$

(e) Als Letztes interessieren wir uns für das Lösen von Gleichungen in $\mathbb{Z}_m$:

Additive Gleichungen der Form

$$[a]_m + x = x + [a]_m = [b]_m$$

für vorgegebenes $[a]_m, [b]_m \in \mathbb{Z}_m$ haben immer eine eindeutige Lösung. Wir zeigen dieses auf einem Übungszettel.

Wie aber sieht es mit multiplikativen Gleichungen der Form

$$[a]_m \cdot x = x \cdot [a]_m = [b]_m$$

für vorgegebenes $[a]_m, [b]_m \in \mathbb{Z}_m$ aus?

Hat $[4]_7 \cdot x = [3]_7$ in $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung? Ja, nämlich $x = [6]_7$, denn $[4]_7 \cdot [6]_7 = [24]_7 = [3]_7$ (weil $24 = 3 \cdot 7 + 3$). Man überzeugt sich durch Ausprobieren leicht, dass $x = [6]_7$ auch die einzige Lösung in $\mathbb{Z}_7$ von $[4]_7 \cdot x = [3]_7$ ist.

Hat $[4]_6 = x \cdot [3]_6$ in $\mathbb{Z}_6$ eine Lösung? Nein. Wir lesen dieses direkt an der Multiplikationstabelle in Teil (d) dieses Beispiels ab: Dort kommt in der Spalte (bzw. Zeile) von $[3]_6$ niemals $[4]_6$ vor.

Die Gleichung $[3]_6 \cdot x = [0]_6$ hat in $\mathbb{Z}_6$ sogar drei Lösungen, wie man an der Zeile für $[3]_6$ abliest, nämlich $[0]_6$, $[2]_6$ und $[4]_6$. Hier gibt es zwei Restklassen ungleich $[0]_6$, z.B. $[3]_6$ und $[2]_6$, deren Produkt $[3]_6 \cdot [2]_6$ die Restklasse $[0]_6$ der Zahl 0 ergibt. – Dieses steht im Gegensatz zu den reellen Zahlen, wo das Produkt zweier reeller Zahlen immer genau dann null ist, wenn mindestens eine der beiden Zahlen null ist.

Als Letztes lernen wir die kanonische Abbildung, sowie mit der kanonischen Abbildung verträgliche Funktionen kennen.

Definition 4.21. (kanonische Abbildung der Kongruenz modulo m)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Die ***kanonische Abbildung*** *der Kongruenz modulo m ist die Funktion $\gamma_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$, definiert durch $\gamma_m(a) := [a]_m$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.*

Wir lernen nun noch zwei Resultate über die kanonische Abbildung kennen, von denen sich aber nur das erste verallgemeinern lässt.

Hilfssatz 4.22. (mit Kongruenz mod. m verträgliche Funktion)
Seien $m \in \mathbb{N}$, Y eine Menge und $f : \mathbb{Z} \to Y$ eine Funktion. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \mod m$ gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert eine ***eindeutig bestimmte*** *Funktion $g : \mathbb{Z}_m \to Y$ so, dass $f(x) = g\big(\gamma_m(x)\big)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt, wobei $\gamma_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ die kanonische Abbildung der Kongruenz modulo m ist.*

Beweis von Hilfssatz 4.22: Wir beweisen diesen Hilfssatz auf einem Übungszettel. □

Die Aussage von Hilfssatz 4.22 kann mit dem nachfolgenden **kommutativen Diagramm** veranschaulicht werden.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma m"'] & Y \\ \mathbb{Z}_m \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Hilfssatz 4.23. (Eigenschaften der kanonischen Abbildung der Kongruenz modulo m)
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\gamma_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ die kanonische Abbildung der Kongruenz modulo m. Dann gelten für alle $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma_m(a+b) = \gamma_m(a) + \gamma_m(b) \qquad \textit{und} \qquad \gamma_m(a\,b) = \gamma_m(a) \cdot \gamma_m(b).$$

Beweis von Hilfssatz 4.23: Wir beweisen diesen Hilfssatz auf einem Übungszettel. □

4.3 Äquivalenzrelationen

Die Kongruenz modulo m (mit $m \in \mathbb{N}$) ist nach Hilfssatz 4.9 reflexiv, symmetrisch und transitiv. Wir wollen nun viele Resultate aus dem vorherigen Teilkapitel auf alle Relationen (auf einer nichtleeren Mengen A), die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, übertragen.

Definition 4.24. (Äquivalenzrelation und Äquivalenzklassen)
Seien A eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Relation auf A.

(1) *Die Relation $\sim$ ist eine* ***Äquivalenzrelation auf*** *A, wenn $\sim$* ***reflexiv***, ***symmetrisch*** *und* ***transitiv*** *ist.*

(2) *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so nennen wir die zugehörigen Relationklassen auch* ***Äquivalenzklassen***.

Notation: Bei Äquivalenzrelationen auf einer Menge A ist es üblich, diese nicht mit R (wie bei beliebigen Relationen) sondern mit $\sim$ zu schreiben. Wir sagen für $x \sim y$ dann entsprechend „x ist äquivalent zu y“. Analog bedeutet $x \not\sim y$ dann „x ist nicht äquivalent zu y“. Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ wird in der Regel nur mit $[a]$ statt mit $R[a]$ bezeichnet. Wir schließen uns diesen Konvention an.

Beispiel 4.25. (Äquivalenzrelationen)

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$. In Hilfssatz 4.9 haben wir gelernt, dass Kongruenz modulo m eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf $\mathbb{Z}$ ist. Also ist Kongruenz modulo m eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$:

$$a \sim b \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \bmod m.$$

Die Restklassen der Kongruenz modulo m sind die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation:

$$[a]_m = \big\{ b \in \mathbb{Z} \;:\; a \equiv b \bmod m \big\} = \big\{ a + k\,m \;:\; k \in \mathbb{Z} \big\}.$$

(b) Sei $A := \{-1, 0, 1\}$. Dann ist die Relation

$$R := \big\{ (-1,-1), (0,0), (1,1) \big\}$$

eine Äquivalenzrelation, denn sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Der Nachweis dieser Eigenschaften erfolgt analog zu den Beispielen in Beispiel 4.6 und ist dem Leser überlassen.) Die Äquivalenzklassen sind hier $[-1] = \{-1\}$, $[0] = \{0\}$ und $[1] = \{1\}$.

(c) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Dann ist die Relation

$$R := \big\{ (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (3,5), (5,3) \big\}$$

eine Äquivalenzrelation, denn sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Der Nachweis dieser Eigenschaften erfolgt analog zu den Beispielen in

Beispiel 4.6 und ist dem Leser überlassen.) Die Äquivalenzklassen sind hier

$$[3] = \{3,4,5\}, \qquad [4] = \{3,4,5\}, \qquad [5] = \{3,4,5\}.$$

(d) Sei $A := \{3,4,5\}$. Dann ist die Relation

$$R := \big\{(3,3),(4,4),(5,5),(3,4),(4,3)\big\}$$

eine Äquivalenzrelation, denn sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Der Nachweis dieser Eigenschaften erfolgt analog zu den Beispielen in Beispiel 4.6 und ist dem Leser überlassen.) Die Äquivalenzklassen sind hier

$$[3] = \{3,4\}, \qquad [4] = \{3,4\}, \qquad [5] = \{5\}.$$

Äquivalenzklassen haben viel schönere Eigenschaften als die Relationklassen einer beliebigen Relation (die keine Äquivalenzrelation ist). Als Erstes lernen wir einen zu Satz 4.14 (1) analogen Satz für beliebige Äquivalenzrelationen kennen.

Satz 4.26. (Eigenschaften der Äquivalenzklassen)
Seien A eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A.

(1) Seien $x, y \in A$. Dann gelten:
   (i) $x \sim y \iff [x] = [y]$
   (ii) $x \not\sim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$

(2) Es gilt $\displaystyle\bigcup_{x \in A} [x] = A$.

Dabei ist $\bigcup_{x \in A} [x] = A$ so zu lesen, dass die Vereinigung über die Äquivalenzklassen $[x]$ alle Elemente x in A gebildet wird. Zu beachten ist, dass Satz 4.26 (2) eine schwächere Aussage ist als Satz 4.14 (2).

Beweis von Satz 4.26: Der Beweis ist im Wesentlichen analog zu Satz 4.14 und wird auf einem Übungszettel durchgeführt. $\square$

Betrachten wir noch einmal die Beispiele aus Beispiel 4.25 im Hinblick auf Satz 4.26 (2).

Beispiel 4.27. (Äquivalenzklassen)

(a) Für die Äquivalenzrelation „Kongruenz modulo m“

$$a \sim b \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \bmod m$$

sind die Äquivalenzklassen die Restklassen:

$$[a]_m = \big\{ b \in \mathbb{Z} \ : \ a \equiv b \bmod m \big\} = \big\{ a + k\, m \ : \ k \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Nach Satz 4.26 (2) gilt

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} [a]_m = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \big\{ a + k\, m \ : \ k \in \mathbb{Z} \big\} = \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Satz 4.14 (2) liefert dagegen eine viel stärkere Aussage, nämlich:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{a=0}^{m-1} [a]_m = [0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m,$$

und die vereinigten Restklassen sind paarweise disjunkt. In (4.4) haben wir viel Redundanz, da $[a]_m = [a + \ell\, m]_m$ für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in \mathbb{Z}$.

(*Anmerkung:* „Redundanz“ bedeutet hier das „Vorhandensein von weglassbaren Elementen“. In der Vereinigung in (4.4) wird jede Restklasse mehrfach aufgenommen.)

(b) Sei $A := \{-1, 0, 1\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{ (-1,-1), (0,0), (1,1) \big\}$$

auf A hat die Äquivalenzklassen $[-1] = \{-1\}$, $[0] = \{0\}$ und $[1] = \{1\}$. Nach Satz 4.26 (2) gilt

$$A = \bigcup_{x \in A} [x] = \bigcup_{x=-1}^{1} [x] = [-1] \cup [0] \cup [1] = \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\},$$

und hier liegt keine Redundanz vor, denn die Äquivalenzklassen sind alle paarweise disjunkt.

(c) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{ (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (3,5), (5,3) \big\}$$

auf A hat die Äquivalenzklassen

$$[3] = \{3, 4, 5\}, \qquad [4] = \{3, 4, 5\}, \qquad [5] = \{3, 4, 5\}.$$

Nach Satz 4.26 (2) gilt

$$A = \bigcup_{x \in A} [x] = \bigcup_{x=3}^{5} [x] = [3] \cup [4] \cup [5] = \{3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5\}.$$

Hier liegt viel Redundanz vor, da für jedes $x \in A$ bereits $[x] = A$ ist. Wir können A also als eine beliebige Äquivalenzklasse schreiben, z.B.

$$A = [3] = \{3, 4, 5\}.$$

(d) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 3)\big\}$$

hat die Äquivalenzklassen

$$[3] = \{3, 4\}, \qquad [4] = \{3, 4\}, \qquad [5] = \{5\}.$$

Nach Satz 4.26 (2) gilt

$$A = \bigcup_{x \in A} [x] = \bigcup_{x=3}^{5} [x] = [3] \cup [4] \cup [5] = \{3, 4\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}.$$

Auch hier liegt Redundanz vor, da $[3] = [4] = \{3, 4\}$ ist. Wir können A aber als Vereinigung der disjunkten verschiedenen Äquivalenzklassen $[3] = [4] = \{3, 4\}$ und $[5] = \{5\}$ schreiben, also

$$A = [3] \cup [5] = \{3, 4\} \cup \{5\}.$$

Nun führen wir analog zu Definition 4.15 die Quotientenmenge einer beliebigen Äquivalenzrelation als die Menge der Äquivalenzklassen ein.

Definition 4.28. (Quotientenmenge einer Äquivalenzrelation)
*Seien A eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Die Menge $A/\!\sim\; := \big\{[x] \;:\; x \in A\big\}$ der Äquivalenzklassen von $\sim$ wird als die **Quotientenmenge von A bzgl. der Äquivalenzrelation** $\sim$ bezeichnet. Für $x \in A$ nennt man jedes $y \in [x]$ einen **Repräsentanten von** $[x]$. (Letzteres macht Sinn, weil $y \in [x] \iff x \sim y \iff [x] = [y]$ gilt.)*

Wie viele Elemente hat die Quotientenmenge einer Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge A? – Naiv möchte man antworten, dass diese so viele Elemente hat wie A, aber dieses stimmt nicht, denn in einer Menge werden mehrfach aufgelistete Elemente nur einmal gezählt. Nach Satz 4.26 (1) (i) gilt für $x, y \in A$, dass $x \sim y \iff [x] = [y]$, d.h. äquivalente Elemente haben dieselbe Äquivalenzklasse. Also werden bei den meisten Äquivalenzrelationen auf einer Menge A weniger verschiedene Äquivalenzklassen als Elemente in A auftreten. Nach Satz 4.26 (1) (ii) gilt $x \not\sim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$, d.h. nicht äquivalente Elemente haben disjunkte Restklassen. – Machen wir uns dieses an den Beispielen für Äquivalenzrelationen aus Beispielen 4.25 und 4.27 klar.

Beispiel 4.29. (Quotientenmenge einer Äquivalenzrelation)

(a) Für die Äquivalenzrelation „Kongruenz modulo m“

$$a \sim b \qquad :\iff \qquad a \equiv b \bmod m$$

sind die Äquivalenzklassen die Restklassen:

$$[a]_m = \big\{b \in \mathbb{Z} \;:\; a \equiv b \bmod m\big\} = \big\{a + k\,m \;:\; k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Die Quotientenmenge ist hier gerade (vgl. auch Definition 4.15 und Satz 4.14 (2))

$$\mathbb{Z}_m := \big\{[a]_m \;:\; a \in \mathbb{Z}\big\} = \big\{[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m\big\}$$

und enthält die m disjunkten Restklassen $[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m$.

(b) Sei $A := \{-1, 0, 1\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(-1,-1), (0,0), (1,1)\big\}$$

auf A hat die Äquivalenzklassen $[-1] = \{-1\}$, $[0] = \{0\}$ und $[1] = \{1\}$. Die Quotientenmenge ist hier

$$A/\!\sim \;= \big\{[x] \;:\; x \in A\big\} = \big\{[-1], [0], [1]\big\},$$

und diese enthält genau so viele verschiedene Äquivalenzklassen, wie Elemente in A sind, nämlich die drei paarweise disjunkten Äquivalenzklassen $[-1], [0], [1]$.

(c) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (3,5), (5,3)\big\}$$

auf A hat die Äquivalenzklassen

$$[3] = \{3,4,5\}, \qquad [4] = \{3,4,5\}, \qquad [5] = \{3,4,5\}.$$

Die Quotientenmenge ist hier

$$A/\sim \; = \big\{[x] \;:\; x \in A\big\} = \big\{[3]\big\} = \big\{[4]\big\} = \big\{[5]\big\},$$

und diese enthält nur eine (verschiedene) Äquivalenzklasse (im Gegensatz zu drei verschiedenen Elementen in A).

(d) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3)\big\}$$

hat die Äquivalenzklassen

$$[3] = \{3,4\}, \qquad [4] = \{3,4\}, \qquad [5] = \{5\}.$$

Die Quotientenmenge ist hier

$$A/\sim \; = \big\{[x] \;:\; x \in A\big\} = \big\{[3],[5]\big\} = \big\{[4],[5]\big\},$$

und diese enthält nur zwei verschiedene, paarweise disjunkte Äquivalenzklassen (im Gegensatz zu drei verschiedenen Elementen in A), nämlich $[3] = [4]$ und $[5]$.

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel.

Beispiel 4.30. (Äquivalenzrelation, Äquivalenzklassen und Quotientenmenge)

Sei P die Menge aller Personen, die am 01.01.2017 am Leben waren. Sei $\sim$ die Relation auf P, die durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad y \text{ war am 01.01.2017 genauso alt (in Lebensjahren) wie } x.$$

definiert ist. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, denn

- $\sim$ ist reflexiv, denn für jede Person $x \in P$ gilt, dass sie am 01.01.2017 genauso alt wie sie selbst war.
- $\sim$ ist symmetrisch, denn gilt für zwei Personen $x, y \in P$, dass y am 01.01.2017 genauso alt wie x war (also $x \sim y$), so folgt, dass x am 01.01.2017 genauso alt wie y war (also $y \sim x$).
- $\sim$ ist transitiv, denn: Seien x, y, z Personen mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann war y am 01.01.2017 genauso alt wie x, und z war am 01.01.2017 genauso alt wie y. Also war z am 01.01.2017 auch genauso alt wie x, d.h. es gilt $x \sim z$.

Was sind die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$?

$$[x] := \big\{y \in P \ : \ y \text{ war am 01.01.2017 genauso alt wie } x\big\}, \qquad x \in P.$$

Da alle Personen mit dem gleichen Lebensalter am 01.01.2017 in einer Äquivalenzklasse sind, erhalten wir für jedes Lebensalter in Jahren genau eine Äquivalenzklasse, nämlich die aller Personen, die am 01.01.2107 dieses Lebensalter hatten. Bis jetzt ist noch kein Mensch 125 Jahre alt oder älter geworden. Also gibt es höchstens 125 nichtleere verschiedene Äquivalenzklassen, die den Lebensaltern in Jahren (also $0, 1, 2, \ldots, 124$) entsprechen. Die Quotientenmenge $P/\!\sim$ enthält enthält also höchstens 125 verschiedene Elemente.

Wir verallgemeinern nun die kanonische Abbildung (vgl. Definition 4.21) auf den Fall beliebiger Äquivalenzrelationen.

Definition 4.31. (kanonische Abbildung einer Äquivalenzrelation)
Seien A eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Die ***kanonische Abbildung für** A **und*** $\sim$ *ist die Funktion $\gamma : A \to A/\!\sim$, definiert durch $\gamma(x) := [x]$ für alle $x \in A$.*

Betrachten wie noch einmal die Äquivalenzrelation aus Beispielen 4.25, 4.27 und 4.29.

Beispiel 4.32. (kanonische Abbildung einer Äquivalenzrelation)

(a) Für die Äquivalenzrelation „Kongruenz modulo m“

$$a \sim b \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \bmod m$$

sind die Äquivalenzklassen bzw. die Quotientenmenge jeweils:

$$\begin{aligned} [a]_m &= \big\{b \in \mathbb{Z} \ : \ a \equiv b \bmod m\big\} = \big\{a + k\,m \ : \ k \in \mathbb{Z}\big\}, \\ \mathbb{Z}_m &= \big\{[a]_m \ : \ a \in \mathbb{Z}\big\} = \big\{[0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots, [m-1]_m\big\}. \end{aligned}$$

Die kanonische Abbildung ist (vgl. auch Definition 4.21) ist

$$\gamma_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m, \qquad \gamma_m(a) := [a]_m = \big\{a + k\,m \ : \ k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

(b) Sei $A := \{-1, 0, 1\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(-1,-1), (0,0), (1,1)\big\}$$

hat die Äquivalenzklassen $[-1] = \{-1\}$, $[0] = \{0\}$ und $[1] = \{1\}$ und die Quotientenmenge

$$A/\sim \; = \big\{[x] \; : \; x \in A\big\} = \big\{[-1], [0], [1]\big\}.$$

Die kanonische Abbildung ist

$$\gamma : A \to A/\sim, \qquad \gamma(x) = [x] = \{x\}.$$

(c) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (3,5), (5,3)\big\}$$

hat die Äquivalenzklassen

$$[3] = \{3, 4, 5\}, \qquad [4] = \{3, 4, 5\}, \qquad [5] = \{3, 4, 5\}$$

und die Quotientenmenge

$$A/\sim \; = \big\{[x] \; : \; x \in A\big\} = \big\{[3]\big\} = \big\{[4]\big\} = \big\{[5]\big\}.$$

Die kanonische Abbildung ist hier

$$\gamma : A \to A/\sim, \qquad \gamma(x) = [x] = \{3, 4, 5\} = A.$$

Hier ist die kanonische Abbildung also „konstant“.

(d) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3)\big\}$$

hat die Äquivalenzklassen

$$[3] = \{3, 4\}, \qquad [4] = \{3, 4\}, \qquad [5] = \{5\}.$$

und die Quotientenmenge

$$A/\sim \; = \big\{[x] \; : \; x \in A\big\} = \big\{[3], [5]\big\} = \big\{[4], [5]\big\}.$$

Die kanonische Abbildung ist hier

$$\gamma : A \to A/\sim, \qquad \gamma(3) = \gamma(4) = \{3, 4\}, \quad \gamma(5) = \{5\}.$$

Als Nächstes verallgemeinern wir Hilfssatz 4.22.

Hilfssatz 4.33. (mit Äquivalenzrelation verträgliche Funktion)
Seien A und B nichtleere Mengen, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und $f : A \to B$ eine Funktion. Für alle $x, y \in A$ mit $x \sim y$ gelte $f(x) = f(y)$. Dann existiert eine ***eindeutig bestimmte*** *Funktion $g : A/{\sim} \to B$ so, dass $f(x) = g\big(\gamma(x)\big)$ für alle $x \in A$ gilt, wobei $\gamma : A \to A/{\sim}$ die kanonische Abbildung für A und $\sim$ ist.*

Man kann sich eine mit einer Äquivalenzrelation verträgliche Funktion an dem unten stehenden **kommutativen Diagramm** veranschaulichen.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\
A/{\sim} \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis von Satz 4.33: Der Beweis geht analog zum Beweis von Hilfssatz 4.22 und ist eine Übungsaufgabe. $\square$

Betrachten wie noch einmal die Äquivalenzrelation aus Beispiel 4.30.

Beispiel 4.34. (kanonische Abbildung einer Äquivalenzrelation; mit der Äquivalenzrelation verträgliche Funktion)
Sei P die Menge aller Personen, die am 01.01.2017 am Leben waren, mit der Äquivalenzrelation aus Beispiel 4.30:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad y \text{ war am 01.01.2017 genauso alt (in Lebensjahren) wie } x.$$

Die kanonische Abbildung $\gamma : P \to P/{\sim}$, $\gamma(x) = [x]$, ordnet jeder Person $x \in P$ die Äquivalenzklasse aller Personen mit den gleichen Alter am 01.01.2017 wie x zu. Sei

$$f : P \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{array}{l}\text{„durchschnittliche Knochendichte von Personen} \\ \text{mit dem Alter (in Jahren) von } x \text{ am 01.01.2017“.}\end{array}$$

Dann gilt für Personen x und y mit dem gleichen Alter in Jahren am 01.01.2017 (also $x \sim y$), dass $f(x) = f(y)$ ist. Also ist die Funktion f mit der Äquivalenzrelation $\sim$ auf P verträglich. Wir haben hier

$$g : P/\!\sim\, \to \mathbb{R}, \qquad g\big([x]\big) := \begin{array}{l}\text{„durchschnittliche Knochendichte von Personen}\\ \text{mit dem Alter (in Jahren) von } x \text{ am 01.01.2017“.}\end{array}$$

und es gilt offensichtlich $f(x) = g\big([x]\big) = g\big(\gamma(x)\big)$.

Zu beachten ist, dass Hilfssatz 4.23 keine Entsprechung für beliebige Äquivalenzrelationen und deren Äquivalenzklassen hat.

4.4 Partitionen und Äquivalenzrelationen

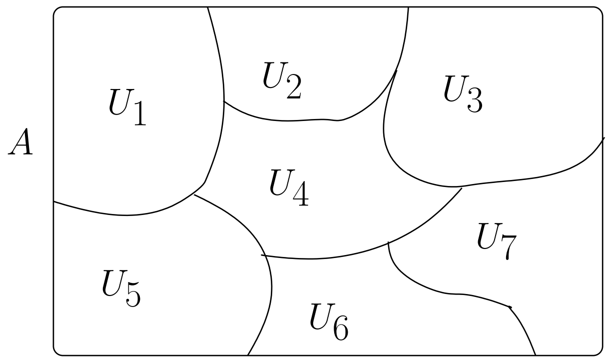
Nach Satz 4.26 (1) sind zwei verschiedene Äquivalenzklassen disjunkt, und wir haben in Beispiel 4.27 gesehen, dass wir für die Äquivalenzrelationen auf A in den Beispielen die Menge A immer als die Vereinigung paarweise disjunkter Äquivalenzklassen schreiben konnten. Dieses funktioniert für eine beliebige Äquivalenzrelation und lässt sich am besten mit dem Begriff einer Partition einer Menge beschreiben.

Definition 4.35. (Partition einer Menge)
Sei A eine nichtleere Menge. Eine ***Partition von*** *A ist eine Familie Ω nichtleerer Teilmengen von A mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Wenn $U, V \in \Omega$ und $U \neq V$ sind, dann gilt $U \cap V = \emptyset$, und

(ii) $\displaystyle\bigcup_{U \in \Omega} U = A$.

Eine Partition von A ist also eine **Menge von Teilmengen von A, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung A ergibt**. Man kann sich dieses leicht mit dem Euler-Venn-Diagramm unten veranschaulichen, wobei hier die Mengen notgedrungenermaßen nicht als „kreisförmige“ Gebilde gezeichnet wurden. Auf den Randlinien der Teilmengen muss dabei jeweils eindeutig geklärt sein, zu welcher der benachbarten Mengen die Elemente auf der Randlinie jeweils gehören.



Betrachten wir zunächst einige Beispiele für Partitionen.

Beispiel 4.36. (Partitionen einer Menge)

(a) Seien $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen und

$$U_1 := \{n \in \mathbb{N} \;:\; n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(Menge der geraden nat. Zahlen)},$$
$$U_2 := \{n \in \mathbb{N} \;:\; n = 2k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(Menge der unger. nat. Zahlen)}.$$

Dann gelten $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = \mathbb{N}$. Also ist $\Omega := \{U_1, U_2\}$ eine Partition von $\mathbb{N}$.

(b) Sei $\Omega := \{[n, n+1[\;:\; n \in \mathbb{Z}\}$.

Dann ist für $m \neq n$ entweder $m < n$ oder $n < m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $m < n$. Dann ist $m + 1 \leq n$, und somit erhalten wir $[n, n+1[\cap [m, m+1[= \emptyset$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$, also $x \in [n, n+1[$. Also folgt $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$.

Wegen $[n, n+1[\subseteq \mathbb{R}$ folgt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[\subseteq \mathbb{R}$.

Beide Teilmengenbeziehungen zusammen ergeben $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$.

Also ist Ω eine Partition von $\mathbb{R}$.

(c) Sei $\Omega := \{\,]n, n+1[\;:\; n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist Ω **keine** Partition von $\mathbb{R}$, denn es gilt $\mathbb{R} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$, da in $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ alle $n \in \mathbb{Z}$ fehlen.

(d) Sei $\Omega := \{[n, n+1] \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist Ω **keine** Partition von $\mathbb{R}$, denn es gilt zwar

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1],$$

aber die Teilmengen $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, sind nicht alle paarweise disjunkt. Beispielsweise ist $[n, n+1] \cap [n+1, n+2] = \{n+1\} \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Für die Äquivalenzrelation Kongruenz modulo m (mit $m \in \mathbb{N}$) auf $\mathbb{Z}$ haben wir in Beispiel 4.27 (a) (vgl. auch Satz 4.14 (2)) gesehen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{Z} = [0]_m \cup [1]_m \cup [2]_m \cup \ldots \cup [m-1]_m,$$

und wir wissen nach Satz 4.14 (1), dass

$$[a]_m \cap [b]_m = \emptyset \qquad \text{für } a, b = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \text{ mit } a \neq b$$

(weil dann $a \not\equiv b \bmod m$ ist). Also ist

$$\Omega := \big\{ [a]_m \ : \ a = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \big\}$$

eine Partition von $\mathbb{Z}$.

(f) Sei $A := \{-1, 0, 1\}$. Für die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{ (-1,-1), (0,0), (1,1) \big\}$$

auf A haben wir in Beispiel 4.27 (b) gesehen, das $[x] = \{x\}$ für jedes $x \in A$ und somit $[x] \cap [y] = \emptyset$ für $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Weiter gilt

$$A = [-1] \cup [0] \cup [1].$$

Also ist $\Omega := \big\{ [-1], [0], [1] \big\} = \big\{ [x] \ : \ x \in A \big\}$ eine Partition von A.

(g) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Für die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{ (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (3,5), (5,3) \big\}$$

auf A haben wir in Beispiel 4.27 (c) gesehen, dass $[x] = \{3, 4, 5\} = A$ für jedes $x \in A$. Also ist $\Omega := \big\{ [3] \big\}$ eine Partition von A. (Die Tatsache, dass hier die Partition von A aus nur einer Menge besteht stellt kein Problem dar, da in der Definition 4.35 einer Partition Ω nicht verlangt wurde, dass die Familie Ω mindestens zwei Elemente enthält. Die Familie Ω muss immer mindestens ein Element enthalten, da die Menge A in Definition 4.35 per Annahme nichtleer ist.)

(h) Sei $A := \{3, 4, 5\}$. Für die Äquivalenzrelation

$$R := \big\{ (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3) \big\}$$

auf A haben wir in Beispiel 4.27 (d) gesehen, dass $[3] = [4] = \{3, 4\}$ und $[5] = \{5\}$. Also ist $[3] \cap [5] = \emptyset$ und $A = [3] \cup [5]$. Also ist $\Omega := \big\{ [3], [5] \big\}$ eine Partition von A.

Was wir in bereits in Beispiel 4.36 (e) bis (h) gesehen haben, gilt allgemein.

Satz 4.37. (Quotientenmenge ist Partition)
Seien A eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann ist die Quotientenmenge $A/\!\sim\, = \big\{[x] \ : \ x \in A\big\}$ eine ***Partition von*** *A.*

Beweis von Satz 4.37: Nach Satz 4.26 (2) wissen wir, dass

$$A = \bigcup_{x \in A} [x]. \tag{4.5}$$

Nach Satz 4.26 (1) wissen wir, dass $[x] = [y]$ genau dann gilt, wenn $x \sim y$ ist, und dass $[x] \cap [y] = \emptyset$ genau dann gilt, wenn $x \not\sim y$ ist. Also müssen wir in der Vereinigung (4.5) nur noch alle „Duplikate“ bzw. „Kopien “ von Äquivalenzklassen aussortieren, um A als eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen zu erhalten. In $A/\!\sim\, = \big\{[x] \ : \ x \in A\big\}$ sind nach der Konvention über Mengen nur verschiedene (und damit paarweise disjunkte) Äquivalenzklassen (als verschiedene Elemente von $A/\!\sim$) vertreten. Also ist $A/\!\sim$ eine Partition von A. $\square$

Satz 4.37 stellt einen Zusammenhang zwischen Partitionen und (den Quotientenmengen von) Äquivalenzrelationen her: Die Quotientenmenge $A/\!\sim$ einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf A ist immer eine Partition von A. Aber gilt auch das Umgekehrte, d.h. **gibt es auch zu jeder Partition Ω einer Menge A eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A, so dass $\Omega = A/\!\sim$ gilt?** – Wir werden im Folgenden sehen, dass dieses der Fall ist. Genauer werden wir eine bijektive Abbildung von der Menge aller Äquivalenzrelationen auf A auf die Menge aller Partitionen von A definieren.

Definition 4.38. (Menge der Äquivalenzrelationen auf einer Menge; Menge der Partitionen einer Menge)
Sei A eine nichtleere Menge.

(1) Die Menge $\mathcal{E}(A)$ bezeichnet die ***Menge aller Äquivalenzrelationen auf*** *A.*

(2) Die Menge $\mathcal{T}(A)$ bezeichnet die ***Menge aller Partitionen von*** *A.*

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 4.39. (Menge der Äquivalenzrelationen auf einer Menge und Menge der Partitionen von einer Menge)
Sei $A = \{1,2,3\}$. Dann ist die Menge aller Partitionen von A die Menge

$$\mathcal{T}(A) = \big\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5\big\},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\},\\
\Omega_2 &:= \big\{\{1,2\},\{3\}\big\},\\
\Omega_3 &:= \big\{\{1,3\},\{2\}\big\},\\
\Omega_4 &:= \big\{\{2,3\},\{1\}\big\},\\
\Omega_5 &:= \big\{\{1,2,3\}\big\}.
\end{aligned}$$

(Man überzeugt sich leicht, dass es keine weiteren Partitionen gibt.)

Die Menge aller Äquivalenzrelationen von A ist

$$\mathcal{E}(A) = \big\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\big\},$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \big\{(1,1),(2,2),(3,3)\big\},\\
R_2 &:= \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\big\},\\
R_3 &:= \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\big\},\\
R_4 &:= \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\big\},\\
R_5 &:= \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\big\}.
\end{aligned}$$

Es ist eine einfache Übung nachzuweisen, dass diese Teilmengen von $A \times A$ in der Tat jeweils eine Äquivalenzrelation auf A definieren. Weiter überzeugt man sich durch theoretische Überlegungen (oder durch Ausprobieren), dass alle anderen Teilmengen von $A \times A$ keine Äquivalenzrelationen auf A sind.

Zur Unterscheidung der verschiedenen Äquivalenzrelationen in diesem Beispiel schreiben wir auch $\sim_{R_i}$ statt $\sim$ für die von R_i definierte Äquivalenzrelation. Wir beobachten, dass gerade gilt

$$A/R_i = A/{\sim_{R_i}} = \Omega_i, \qquad i = 1,2,3,4,5,$$

d.h. die Partition Ω_i ist gerade die Quotientenmenge $A/{\sim_{R_i}}$ der Äquivalenzrelation R_i, also $\sim_{R_i}$. (Den genauen Nachweis, dass $A/R_i = \Omega_i$ für $i = 1,2,3,4,5$

gilt, führen wir auf einem Übungszettel durch.) Hier kann man also jeder Äquivalenzrelation auf A genau eine Partition von A zuordnen und umgekehrt. Anders ausgedrückt: Die Funktion/Abbildung

$$\Phi : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A), \qquad \Phi(R_i) := \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

ist eine bijektive Funktion.

Definition 4.40. (Funktion von $\mathcal{E}(A)$ nach $\mathcal{T}(A)$ bzw. umgekehrt)
Sei A eine nichtleere Menge.

(1) Die Funktion $\Phi_A : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A)$ sei definiert durch $\Phi_A(\sim) := A/\sim$ (d.h. jede Äquivalenzrelation $\sim$ wird auf ihre Quotientenmenge $A/\sim$ abgebildet).

(2) Die Funktion $\Psi_A : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$ sei durch $\Psi_A(\Omega) := R_\Omega$ definiert, wobei R_Ω die Äquivalenzrelation auf A ist, die durch

$$x \, R_\Omega \, y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists \; U \in \Omega : x, y \in U$$

definiert ist.

Bemerkung 4.41. (Φ_A und Ψ_A sind wohldefiniert)

(1) Es ist nach unserem bisherigen Wissen klar, dass $\Phi_A : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A)$ wohldefiniert (d.h. mathematisch sinnvoll definiert) ist, weil $A/\sim$ nach Satz 4.37 immer eine Partition von A ist.

(2) Warum ist $\Psi_A : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$, $\Psi_A(\Omega) := R_\Omega$, ebenfalls wohldefiniert (d.h. mathematisch sinnvoll definiert)? – Dieses ist der Fall, wenn die Relation

$$x \, R_\Omega \, y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists \; U \in \Omega : x, y \in U$$

tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf A ist. Wir müssen also überprüfen, ob die Relation R_Ω reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dieses machen wir auf einem Übungszettel.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele, um uns klar zu machen, wie die Funktionen Φ_A und Ψ_A operieren.

Beispiel 4.42. (Funktionen Φ_A und Ψ_A)

(a) In Beispiel 4.39 haben wir alle Äquivalenzrelationen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 auf $A = \{1,2,3\}$ und alle Partitionen $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ von $A = \{1,2,3\}$ bestimmt. Wir haben weiter bereits gesehen, dass es eine bijektive Funktion

$$\Phi_A : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A), \qquad \mathcal{E}(R_i) := A/{\sim_{R_i}} = \Omega_i, \quad i = 1,2,3,4,5,$$

gibt, und dieses ist gerade die Funktion Φ_A aus Definition 4.40.

Wie sieht die Funktion $\Psi_A : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$ aus? Es gilt für die Partition Ω_i, dass $\Psi_A(\Omega_i) := R_{\Omega_i}$, wobei $x\, R_{\Omega_i}\, y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, U \in \Omega_i : x, y \in U$. Beispielsweise führt die Partition $\Omega_2 := \big\{\{1,2\},\{3\}\big\}$ auf die Äquivalenzrelation

$$R_{\Omega_2} := \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\big\},$$

und diese ist gleich R_2. Analog zeigt man, dass $\Psi_A(R_i) = \Omega_i$ für jedes $i = 1,2,3,4,5$ gilt. Wir sehen also, dass die Funktion $\Psi_A : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$ gerade die Umkehrfunktion $\Phi_A^{-1} : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$ der bijektiven Funktion $\Phi_A : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A)$ ist.

(b) Betrachten wir die folgende Relation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x,y) \sim (z,w) \quad :\Longleftrightarrow \quad y - x = w - z \qquad (\text{für } (x,y),(z,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Wir überprüfen zunächst, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist:

- Die Relation $\sim$ ist reflexiv, denn für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt $y - x = y - x$, also $(x,y) \sim (x,y)$.
- Die Relation $\sim$ ist symmetrisch, denn: Für $(x,y),(z,w) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gelte $(x,y) \sim (z,w)$, also $y - x = w - z$. Dann gilt auch $w - z = y - x$, also $(z,w) \sim (x,y)$.
- Für $(x,y),(z,w),(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gelte $(x,y) \sim (z,w)$ und $(z,w) \sim (u,v)$, also $y-x = w-z$ und $w-z = v-u$. Dann folgt $y-x = v-u$, d.h. $(x,y) \sim (u,v)$. Also ist die Relation $\sim$ auch transitiv.

Die der Äquivalenzrelation $\sim$ durch die Funktion $\Phi_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ zugeordnete Partition ist die Quotientenmenge

$$\Phi_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(\sim) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/{\sim} = \big\{[(x,y)] \;:\; (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big\}.$$

Bestimmen wir also die Äquivalenzklassen von $\sim$:

$$\begin{aligned}[(x,y)] &:= \big\{(z,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; (x,y) \sim (z,w)\big\} \\ &= \big\{(z,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; y - x = w - z \;\big\}\end{aligned}$$

$$= \big\{(z,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; w = z + (y-x)\big\}$$
$$= \big\{\big(z, z + (y-x)\big) \;:\; z \in \mathbb{R}\big\},$$

d.h. $[(x,y)]$ ist die Menge aller Punkte auf der Geraden mit Steigung 1 und Achsenabschnitt $(y-x)$. Also ist $\Phi_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(\sim) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\!\sim$ die Menge aller Geraden mit Steigung 1.

(c) Betrachten wir die Partition $\Omega := \big\{[n, n+1[\;:\; n \in \mathbb{Z}\big\}$ von $\mathbb{R}$. Wie sieht die Äquivalenzrelation $\Psi_{\mathbb{R}}(\Omega) := R_\Omega$ mit

$$x\, R_\Omega\, y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, U \in \Omega : x, y \in U$$

aus? Schreiben wir der Bequemlichkeit halber wieder $\sim$ statt R_Ω. Wir sehen, dass

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow\; x, y \in [n, n+1[\text{ für ein } n \in \mathbb{Z}.$$

Mit der Abrundungsfunktion

$$\lfloor x \rfloor := n, \qquad \text{wobei } n \in \mathbb{Z} \text{ so, dass } x \in [n, n+1[\text{ ist},$$

erhalten wir also $x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ und

$$[x] = \big\{y \in \mathbb{R} \;:\; x \sim y\big\} = \big[\,\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\big[.$$

Die Äquivalenzklasse $[x]$ von $x \in \mathbb{R}$ ist also gerade, dass Intervall $[n, n{+}1[$, welches x enthält.

Wir sehen also, dass wir die Partition Ω als Quotientenmenge $\mathbb{R}/\!\sim\, = \mathbb{R}/R_\Omega$ erhalten, d.h. $\Psi_{\mathbb{R}}(\Omega) = R_\Omega = \,\sim$ und $\Phi_{\mathbb{R}}(\sim) = \Phi_{\mathbb{R}}(R_\Omega) = \Omega$.

Nun können wir das allgemein beweisen, was wir an den Beispielen schon teilweise beobachtet bzw. vermutet haben, nämlich, dass Φ_A und Ψ_A beide bijektiv sind und dass $\Phi_A^{-1} = \Psi_A$ und $\Psi_A^{-1} = \Phi_A$ gelten.

Satz 4.43. **($\Phi_A^{-1} = \Psi_A$ und $\Psi_A^{-1} = \Phi_A$)**
Sei A eine nichtleere Menge. Die Funktionen $\Phi_A : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A)$ und $\Psi_A : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$ sind jeweils ***zueinander inverse Funktionen*** *(d.h. $\Phi_A^{-1} = \Psi_A$ und $\Psi_A^{-1} = \Phi_A$), und beide Funktionen sind damit insbesondere* ***bijektiv****.*

Beweis von Satz 4.43: Wenn wir zeigen können, dass

$$\Psi_A\big(\Phi_A(\sim)\big) = \sim \qquad \text{für alle } \sim \in \mathcal{E}(A), \qquad \text{und} \tag{4.6}$$

$$\Phi_A\big(\Psi_A(\Omega)\big) = \Omega \qquad \text{für alle } \Omega \in \mathcal{T}(A), \tag{4.7}$$

dann folgt, dass $\Phi_A : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{T}(A)$ und $\Psi_A : \mathcal{T}(A) \to \mathcal{E}(A)$ jeweils bijektiv sind und dass jede der beiden Funktionen die Inverse (oder Umkehrfunktion) zur jeweils anderen Funktion ist. (*Anmerkung:* Dass aus (4.6) und (4.7) bereits die Bijektivität von Φ_A und Ψ_A folgt, ist nicht offensichtlich. Wir zeigen dieses auf einem Übungszettel.)

Nachweis, dass $\Psi_A\big(\Phi_A(\sim)\big) = \sim$ *für alle* $\sim \in \mathcal{E}(A)$*:* Sei $\sim \in \mathcal{E}(A)$ eine Äquivalenzrelation auf A, und sei R die durch $R := \Psi_A\big(\Phi_A(\sim)\big)$ definierte Äquivalenzrelation. Wir müssen nun zeigen, dass $R = \sim$ ist. Sei $\Omega := \Phi_A(\sim) = A/\sim$ und somit $R = \Psi_A(\Omega)$.

Per Definition gilt $x\,R\,y$ genau dann, wenn es ein $U \in \Omega$ gibt mit $x, y \in U$. Nach Definition von $\Omega = A/\sim$ ist jedes U eine Äquivalenzklasse von $\sim$, also $U = [q]$ mit einem $q \in A$, wobei wir die Äquivalenzklassen von $\sim$ mit $[a]$, $a \in A$, bezeichnen. Also gilt $x\,R\,y$ genau dann, wenn $x, y \in [q]$ für ein $q \in A$. Damit gilt aber $q \sim x$ und $q \sim y$. Wegen der Symmetrie von $\sim$ folgt aus $q \sim x$ auch $x \sim q$. Aus $x \sim q$ und $q \sim y$ folgt wegen der Transitivität von $\sim$ aber $x \sim y$. Also folgt aus $x\,R\,y$, dass $x \sim y$.

Wir betrachten nun $x, y \in A$ mit $x \sim y$. Dann folgt nach Satz 4.26 (1), dass $[x] = [y]$. Wegen der Reflexivität von $\sim$ folgt daraus, dass $x, y \in [x] = [y]$. Also folgt aus $x \sim y$ auch $x\,R\,y$, da $x, y \in [x]$ und $[x] \in A/\sim = \Omega$ sind.

Also finden wir insgesamt, dass $x\,R\,y$ genau dann gilt, wenn $x \sim y$ gilt. Somit sind die Äquivalenzrelationen $R := \Psi_A\big(\Phi_A(\sim)\big)$ sind. und $\sim$ gleich.

Nachweis, dass $\Phi_A\big(\Psi_A(\Omega)\big) = \Omega$ *für alle* $\Omega \in \mathcal{T}(A)$*:* Sei Ω eine Partition von A, und sei $\sim := \Psi_A(\Omega)$ die durch $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $U \in \Omega$ mit $x, y \in \Omega$ gibt, definierte Äquivalenzrelation auf A. Sei $\widetilde{\Omega} := \Phi_A\big(\Psi_A(\Omega)\big) = \Phi_A(\sim) = A/\sim$. Wir müssen nun zeigen, dass die Partition $\widetilde{\Omega}$ und die Partition Ω identisch sind, also $\widetilde{\Omega} = \Omega$.

Sei $V \in \widetilde{\Omega} = A/\sim$. Dann ist V eine Äquivalenzklasse der Äquivalenzrelation $\sim$, also $V = [q] := \big\{x \in A \;:\; q \sim x\big\}$ für ein $q \in A$. Per Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ gilt aber $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $U \in \Omega$ gibt mit $x, y \in U$. Sei U_q die Menge in der Partition Ω, die q enthält. Dann gilt also für alle $x \in V = [q]$, dass $x \in U_q$. Damit folgt, dass $[q] \subseteq U_q$. Da für jedes $z \in U_q$ auch $q \sim z$ gilt, folgt auch $z \in [q]$ und somit $U_q \subseteq [q]$. Also gilt $[q] = U_q$, d.h. $V = [q]$ aus $\widetilde{\Omega}$ ist ein Element von Ω. Damit haben wir gezeigt, dass $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ gilt.

Sei nun umgekehrt $U \in \Omega$. Betrachte ein $q \in U$. Dann gilt nach der Definition von $\sim\ = \Psi_A(\Omega)$, dass $q \sim x$ für alle $x \in U$. Also folgt $U \subseteq [q]$. Sei nun $x \in [q]$, dann gilt $q \sim x$ und daraus folgt $x \in U$ (weil $q \in U$ ist und weil Ω eine Partition von A ist). Also gilt auch $[q] \subseteq U$. Insgesamt erhalten wir also $U = [q]$. Da $\widetilde{\Omega} = \Phi_A(\sim) = A/{\sim}$ ist, ist U also ein Element von $\widetilde{\Omega}$. Somit folgt $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$.

Aus $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ und $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ folgt $\widetilde{\Omega} = \Omega$. $\square$

KAPITEL 5

Komplexe Zahlen

Es ist unbefriedigend, dass quadratische Gleichungen der Form $x^2 + c = 0$ mit $c > 0$ keine reellen Lösungen haben. Daher führen wir in Teilkapitel 5.1 die komplexen Zahlen als Erweiterung des Zahlbereichs der reellen Zahlen ein und lernen die Grundrechenarten Addition, Multiplikation (und damit auch Division und Subtraktion) kennen. Wir entwickeln auch bereits eine geometrische Anschauung der komplexen Zahlen in der „Gaußschen Zahlenebene".

In Teilkapitel 5.2 werden wir sehen, dass nun alle quadratischen Gleichungen (mit Vielfachheit gezählt) genau zwei komplexe Lösungen haben, sogar diejenigen mit komplexen Koeffizienten.

In Teilkapitel 5.3 lernen wir als Exkurs und Vorbereitung für die Polardarstellung komplexer Zahlen den Sinus und den Cosinus als Kreisfunktionen kennen.

In Teilkapitel 5.4 führen wir dann die Polardarstellung der komplexen Zahlen ein. Wir lernen, wie man zwischen der „Normaldarstellung" (oder kartesischen Darstellung) komplexer Zahlen und der Polardarstellung hin und her wechselt. Mit Hilfe der sogenannten Euler-Formel können wir komplexe Zahlen in der Polardarstellung sehr bequem multiplizierten und dividieren. Beide Prozesse bekommen nun auch eine einfache geometrische Anschauung.

In Teilkapitel 5.5 betrachten wir beliebige komplexe Polynome vom Grad n und lernen, dass diese (mit Vielfachheit gezählt) immer jeweils n komplexe Nullstellen haben. Speziell werden wir Gleichungen der Form $z^n = w$ mit einer vorgegebenen komplexen Zahl w lösen. Dieses führt für $w = 1$ auf die n-ten Einheitswurzeln und für beliebiges n auf „gedrehte und skalierte Kopien" der n-ten Einheitswurzeln.

5.1 Einführung in die komplexen Zahlen

Motivation: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Es war eine geniale Idee von Carl Friedrich Gauß (1777–1855), einfach so zu tun, als gäbe es eine Lösung dieser Gleichung. Es ist klar, dass die Lösung keine reelle Zahl sein kann, sondern ein anderes Objekt sein muss. Wir nennen dieses Objekt die **imaginäre Einheit** und bezeichnen es mit i. Für i gilt also $i^2 = -1$.

Definition 5.1. (komplexe Zahlen)

*(1) Sei i die **imaginäre Einheit**, d.h. es gelte $i^2 = -1$. Dann heißt ein Objekt der Form*

$$a + b\,i \qquad \text{mit} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

*eine **komplexe Zahl**. Die **Menge der komplexen Zahlen** wird mit*

$$\mathbb{C} := \big\{a + b\,i \;:\; a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

bezeichnet.

(2) Sind $a + b\,i$ und $c + d\,i$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so gilt

$$a + b\,i = c + d\,i \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a = c \text{ und } b = d.$$

Bemerkung 5.2. ($\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$)
Die komplexen Zahlen enthalten die reellen Zahlen als Teilmenge, denn jede reelle Zahl a kann man als $a + 0 \cdot i = a + 0\,i$ schreiben. Also gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Man kann mit komplexen Zahlen wie mit reellen Zahlen rechnen, wenn man $i^2 = -1$ betrachtet. Betrachten wir dazu zunächst einige Beispiele.

Beispiel 5.3. (Rechnen mit komplexen Zahlen)

(a) $(1 + 2\,i) + (3 - i) = 1 + 3 + 2\,i - i = 4 + i$

(b) $(1 + 2\,i) \cdot (3 - i) = 3 - i + 6\,i - 2\,i^2 \underset{\substack{\uparrow \\ i^2 = -1}}{=} 3 + 5\,i + 2 = 5 + 5\,i$

(c) Um einen Bruch mit Nenner $3-i$ zu vereinfachen, erweitern wir den Bruch mit $3+i$ und vereinfachen:

$$\frac{1+2\,i}{3-i} = \frac{(1+2\,i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+6\,i+2\,i^2}{9-i^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ i^2=-1}}{=} \frac{3+7\,i-2}{9-(-1)} = \frac{1+7\,i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\,i.$$

Warum haben wir mit $3+i$ erweitert? Durch diesen „Trick" wurde der Nenner reell, nämlich 10. Die Division durch 10 können wir nun als Multiplikation mit $1/10$ auffassen.

Die von uns bereits intuitiv angewendeten Rechenregeln sind korrekt, und wir halten diese als Definition fest.

Definition 5.4. (Addition und Multiplikation komplexer Zahlen)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir:

(1) ***Addition in $\mathbb{C}$:*** $\quad (a+b\,i)+(c+d\,i) := (a+c)+(b+d)\,i$

(2) ***Multiplikation in $\mathbb{C}$:*** $\quad (a+b\,i)\cdot(c+d\,i) := (a\,c-b\,d)+(a\,d+b\,c)\,i$

Betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel 5.5. (Addition und Multiplikation komplexer Zahlen)

(a) $(5-6\,i)+(\pi+\sqrt{2}\,i) = (5+\pi)+(\sqrt{2}-6)\,i$

(b) $(-\sqrt{3}-3\,i)\cdot(2-\sqrt{3}\,i) = -2\sqrt{3}+3\,i-6\,i+3\sqrt{3}\,i^2$
$= -2\sqrt{3}-3\,i-3\sqrt{3} = -5\sqrt{3}-3\,i$

Wir führen noch einige Bezeichnungen ein.

Definition 5.6. (Realteil und Imaginärteil, Betrag und konjugiert komplexe Zahl)
Sei $z = a+b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Folgende Bezeichnungen sind üblich:

$\mathrm{Re}(z) := a$ *ist der* ***Realteil*** *von z,*

$\mathrm{Im}(z) := b$	*ist der **Imaginärteil** von z,*
$\lvert z\rvert := \sqrt{a^2 + b^2}$	*ist der **Betrag** von z,*
$\overline{z} := a - b\,i$	*ist die **zu z konjugiert komplexe Zahl**.*

Achtung: Der Imaginärteil von $z = a + b\,i$ ist $\mathrm{Im}(z) = b$ (und **nicht** $b\,i$).

Beispiel 5.7. (Real-, Imaginärteil, Betrag, konjugiert komplexe Zahl)
Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = 2 - 3\,i = 2 + (-3)\,i.$$

Dann sind der Realteil bzw. der Imaginärteil von z

$$\mathrm{Re}(z) = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{Im}(z) = -3,$$

und der Betrag und die zu z konjugiert komplexe Zahl sind

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{z} = 2 - (-3)\,i = 2 + 3\,i.$$

Die zu $\overline{z}$ konjugiert komplexe Zahl ist

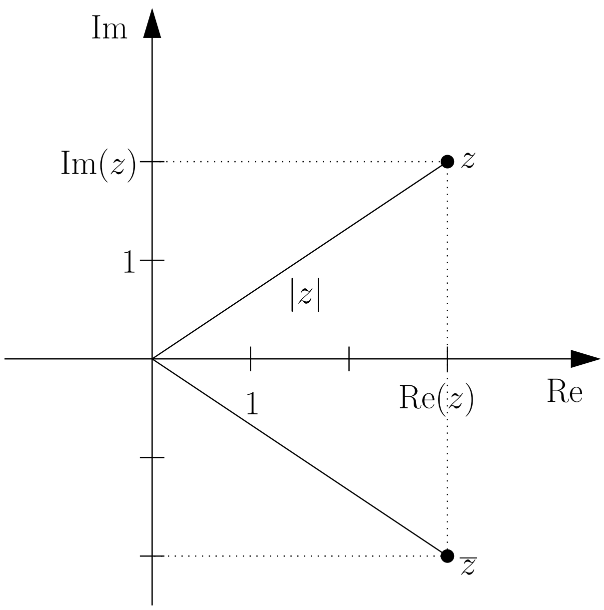
$$\overline{\overline{z}} = 2 - 3\,i = z.$$

Die komplexen Zahlen haben eine **geometrische Anschauung**.

Bemerkung 5.8. (Gaußsche Zahlenebene)

Jede komplexe Zahl $z = a + b\,i$ ist durch das geordnete Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Daher ist es sinnvoll, sich $z = a + b\,i$ als Punkt (a, b) in einem kartesischen Koordinatensystem, genannt die **Gaußsche Zahlenebene**, vorzustellen.

Die x-Achse nennt man die **reelle Achse** (beschriftet mit Re), weil auf ihr die reellen Zahlen liegen. Die y-Achse heißt die **imaginäre Achse** (beschriftet mit Im).



Der Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist der **Abstand von** $z = a + b\,i$ (also von dem Punkt (a, b)) **zum Nullpunkt**.

Die zu $z = a + b\,i$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = a - b\,i$ (also der Punkt $(a, -b)$) entsteht durch **Spiegelung von** $z = a + b\,i$ (also dem Punkt (a, b)) **an der reellen Achse**.

Bei der **Addition** zweier komplexer Zahlen $z = a + b\,i$ und $w = c + d\,i$, also der Punkte (a, b) und (c, d) erhalten wir die komplexe Zahl $z + w = (a + c) + (b + d)\,i$, also den Punkt $(a + c, b + d)$.

Beispiel: Wir haben die komplexe Zahl $z = 3 + 2\,i$ und ihre konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = 3 - 2\,i$ in der Skizze rechts oben in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht.

Wir halten einige Rechenregeln für komplexe Zahlen fest.

Hilfssatz 5.9. (Rechenregeln für komplexe Zahlen)
Für $w, z \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$

(2) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$

(3) $\overline{\overline{z}} = z$

(4) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}\,(z + \overline{z})$,

$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\,i}\,(z - \overline{z})$

(5) $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \overline{z}$

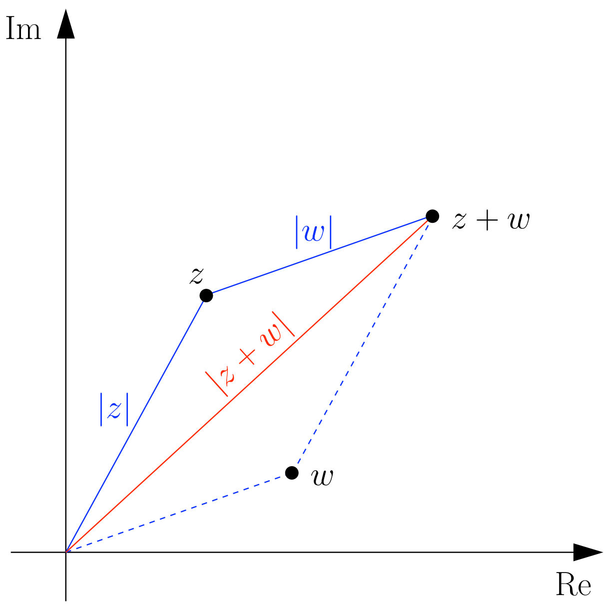
(6) $|\overline{z}| = |z|$

(7) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(8) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(9) ***Dreiecksungleichung:*** $|z + w| \le |z| + |w|$

(10) ***Untere Dreiecksungleichung:*** $\big|\,|z| - |w|\,\big| \le |z + w|$



Die **Dreiecksungleichung** ist in der Abbildung neben Hilfssatz 5.9 illustriert: Es ist anschaulich klar, dass die Länge $|z + w|$ einer Seite der Dreiecks immer kleiner als die (oder gleich der) Summe der Längen $|z|$ und $|w|$ der beiden anderen Seiten sein muss.

Beweis von Hilfssatz 5.9: Die Rechenregeln in Hilfssatz 5.9 zeigt man durch direktes Nachrechnen. Wir beweisen diese auf einem Übungsblatt. $\square$

Da im Hilfssatz 5.9 die komplexen Zahlen z und w auch reell sein dürfen (da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist), gelten alle Aussagen in Hilfssatz 5.9 auch für reelle Zahlen. Für $z \in \mathbb{R}$ ist $z = x + 0\,i$ und somit $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$, d.h. der Betrag von $z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist der aus der Schule bekannte (Absolut-)Betrag einer reellen Zahl. Also gelten insbesondere Eigenschaften (8), (9) und (10) in Hilfssatz 5.9 auch für den (Absolut-)Betrag reeller Zahlen.

Bemerkung 5.10. (Quotienten/Division komplexer Zahlen)
Aus Hilfssatz 5.9 (7) folgt für jedes $z \neq 0$ durch Erweitern mit $\overline{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Damit folgt für den Quotienten w/z zweier komplexer Zahlen w und z mit $z \neq 0$, dass

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{1}{|z|^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot w \cdot \overline{z}$$

gilt. Der Nenner ist nun reell, und wir können die Multiplikation der komplexen Zahlen im Zähler wie üblich mit Definition 5.4 (2) ausführen und erhalten eine Zahl in der „üblichen“ Darstellung $a + b\,i$ einer komplexen Zahl.

Wir sehen also: Um den Quotienten w/z zweier komplexer Zahlen in die übliche Form $a + b\,i$ zu bringen, erweitern wir mit der zum Nenner z konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$.

Betrachten wir noch zwei Beispiele für die Division komplexer Zahlen.

Beispiel 5.11. (Division komplexer Zahlen)

(a) Um $\frac{1}{i}$ zu berechnen erweitern wir mit $\overline{i} = -i$, also $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i\,(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

(b) Um den Quotienten
$$\frac{4+5\,i}{3-\,2\,i}$$
zu berechnen, erweitern wir mit $\overline{3-\,2\,i} = 3+2\,i$ und erhalten
$$\frac{4+5\,i}{3-\,2\,i} = \frac{(4+5\,i)\,(3+2\,i)}{(3-2\,i)\,(3+2\,i)} = \frac{12+15\,i+8\,i+10\,i^2}{3^2+(-2)^2}$$
$$= \frac{12+23\,i-10}{13} = \frac{2+23\,i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{23}{13}\,i.$$

Bemerkung 5.12. (Erweiterung des Zahlenkörpers)
Wir bemerken, dass die Einführung der komplexen Zahlen zur Erweiterung des Zahlenkörpers der reellen Zahlen eigentlich nicht so geheimnisvoll ist, denn wir haben solch eine Vorgehensweise bereits früher in der Schule kennengelernt:

(1) Da $x+1=0$ in $\mathbb{N}_0$ keine Lösung hatte, wurden die negativen Zahlen (und damit die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$) eingeführt.

(2) Da die Gleichung $2\,x = 1$ keine Lösung in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ hat, wurden die Brüche (also die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$) eingeführt.

(3) Da $x^2 = 2$ keine Lösung in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hat; wurden die irrationalen und damit die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eingeführt.

Wir sehen also, dass die Einführung der komplexen Zahlen nichts „Obskures“ sondern nur eine Weiterentwicklung unserer üblichen Vorgehensweise ist.

Achtung: Die komplexen Zahlen sind **nicht angeordnet**, d.h. es gibt (im Gegensatz zu den reellen Zahlen) keine Relation „$<$“ auf $\mathbb{C}$.

5.2 Das Lösen quadratischer Gleichungen

Wir kommen nun auf quadratische Gleichungen $x^2 + p\,x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ zurück und werden sehen, dass jede solche Gleichung mit Vielfachheit gezählt in $\mathbb{C}$ genau zwei komplexe Lösungen hat.

Danach betrachten wir denn Fall dass die Koeffizienten p und q auch komplex (und nicht-reell) sein dürfen. Wir werden sehen, dass aus hier mit Vielfachheit gezählt genau zwei komplexe Lösungen existieren. Allerdings muss zur Berechnung der Lösung die Gleichung $x^2 = w$ für beliebiges $w \in \mathbb{C}$ gelöst werden, was etwas rechenaufwendig ist. Im Teilkapitel 5.4 lernen wir die Polardarstellung kennen, mit deren Hilfe die zwei Lösungen von $x^2 = w$ für jedes $w \in \mathbb{C}$ viel einfacher zu berechnen sind.

Betrachten wir also eine beliebige quadratische Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \qquad \text{wobei } a \neq 0 \text{ ist.} \tag{5.1}$$

Dabei lassen wir für die Koeffizienten a, b, c beliebige komplexe Zahlen mit $a \neq 0$ zu. Wir dürfen auf beiden Seiten durch $a \neq 0$ teilen und erhalten somit

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{=:\,p}\, x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=:\,q} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + p\,x + q = 0 \tag{5.2}$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$. Es reicht also aus, Gleichungen der Form (5.2) zu betrachten.

Sind a, b, c in (5.1) reell, so sind auch p und q in (5.2) reell. Wir beschränken uns zunächst auf diesen Fall. Sei also

$$x^2 + p\,x + q = 0 \qquad \text{mit } p, q \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Mittels der quadratischen Ergänzung und der ersten binomischen Formel erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + p\,x + q \\ &= \left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}_{=:\,D}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

- **Fall $D = 0$:** Ist $D = 0$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

  $$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\frac{p}{2},$$

  und diese **einzige reelle** Lösung hat die **Vielfachheit** 2, weil der Faktor $x + \dfrac{p}{2}$ mit der Potenz 2 auftritt. Mit Vielfachheit gezählt haben wir also zwei reelle Lösungen.

- **Fall $D > 0$:** Mit der dritten binomischen Formel erhält man für den Fall, dass

  $$D = \frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

gilt, die Gleichung

$$0 = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

deren **zwei reelle** Lösungen die aus dem Schulunterricht bekannte **p-q-Formel** sind:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{5.5}$$

- **Fall $D < 0$:** Mit den komplexen Zahlen können wir nun auch den Fall

  $$D = \frac{p^2}{4} - q < 0$$

  behandeln. Dazu schreiben wir

  $$D = \frac{p^2}{4} - q = -\left(q - \frac{p^2}{4}\right) = i^2 \underbrace{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}_{=-D>0}$$

  und erhalten mit der dritten binomischen Formel

  $$\begin{aligned} 0 = x^2 + p\,x + q &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - i^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \\ &= \left(x + \frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)\left(x + \frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right). \end{aligned}$$

  Für $D < 0$ erhalten wir also die beiden komplexen, nicht-reellen Lösungen

  $$x_1 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

  Wir beobachten, dass jede der beiden Lösungen jeweils die zur anderen Lösung konjugiert komplexe Zahl ist.

Natürlich muss man die Formeln für die Lösungen in den drei Fällen nicht auswendig lernen! Statt dessen sollte man sich die Vorgehensweise mit quadratischer Ergänzung, Anwendung der binomischen Formeln, für $D < 0$ das Umschreiben von $D = i^2 \cdot (-D)$ und zuletzt die Anwendung der dritten binomischen Formel merken. Betrachten wir dazu einige Beispiele.

Beispiel 5.13. (quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten)

(a) $x^2 + 3\,x + 2 = 0$

Wir formen die quadratische Gleichung $x^2 + 3\,x + 2 = 0$ wie folgt mittels quadratischer Ergänzung und der binomischen Formeln um:

$$\begin{aligned} 0 = x^2 + 3\,x + 2 &= \left(x^2 + 3\,x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x+1)\,(x+2). \end{aligned}$$

Also finden wir zwei verschiedene reelle Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$.

(b) $x^2 - 8\,x + 16 = 0$

Wir formen die quadratische Gleichung $x^2 - 8\,x + 16 = 0$ mittels der zweiten binomischen Formel um:

$$0 = x^2 - 8\,x + 16 = (x-4)^2.$$

Wir erhalten also die einzige reelle Lösung $x = 4$ mit der Vielfachheit 2.

(c) $x^2 - 4\,x + 13 = 0$

Wir formen die quadratische Gleichung $x^2 - 4\,x + 13 = 0$ wie folgt mittels quadratischer Ergänzung und der binomischen Formeln um:

$$\begin{aligned} 0 = x^2 - 4\,x + 13 &= \left(x^2 - 4\,x + 4\right) - 4 + 13 \\ &= (x-2)^2 + 9 = (x-2)^2 - (3\,i)^2 \\ &= (x - 2 - 3\,i)\,(x - 2 + 3\,i). \end{aligned}$$

Nun lesen wir ab, dass die quadratische Gleichung die folgenden beiden nicht-reellen, zueinander konjugiert komplexen Lösungen hat:

$$x_1 = 2 + 3\,i \qquad \text{und} \qquad x_2 = 2 - 3\,i.$$

Was ändert sich, wenn in a, b, c in (5.1) beliebige komplexe Zahlen mit $a \neq 0$ sind und somit auch p und q in (5.2) beliebige komplexe Zahlen sein können. Auch dann haben (5.1) und (5.2) **mit Vielfachheit gezählt genau zwei komplexe Lösungen**, die jeweils reell oder komplex, nicht-reell sein können. Betrachten wir zunächst noch einmal (5.2) mit $p, q \in \mathbb{C}$. Die Rechnung in (5.4) lässt sich genauso durchführen und wir finden also

$$0 = x^2 + p\,x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}_{=:\,D}, \tag{5.6}$$

aber nun ist D eine beliebige komplexe Zahl. Wenn wir also eine komplexe Zahl z mit $z^2 = D$ (und damit auch mit $(-z)^2 = D$, d.h. z und $-z$ sind zwei komplexe Lösungen von $x^2 = D$) finden können, so gilt mit der dritten binomischen Formel

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - z^2 = \left(x + \frac{p}{2} - z\right)\left(x + \frac{p}{2} + z\right). \tag{5.7}$$

Wir lesen ab, dass die zwei (für $D \neq 0$ verschiedenen) komplexen Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} - z \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} + z$$

sind. In der Tat hat jede Gleichung $x^2 = w$ mit $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ auch zwei verschiedene komplexe Lösungen, nämlich

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Re}(w) + |w|}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{Im}(w)}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mathrm{Re}(w) + |w|}}\, i\right). \tag{5.8}$$

(Ist $w = 0$, so hat $x^2 = w = 0$ in $\mathbb{C}$ die reelle Lösung $x = 0$ mit Vielfachheit 2.) Wir leiten die Formel (5.8) auf einem Übungszettel her, denn sie ist nicht offensichtlich. Man überprüft durch Quadrieren allerdings relativ leicht, dass die Formel richtig ist. Mit (5.8) finden wir für $w = D \neq 0$ die beiden verschiedenen komplexen Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \left(\frac{\sqrt{\mathrm{Re}(D) + |D|}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{Im}(D)}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mathrm{Re}(D) + |D|}}\, i\right),$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \left(\frac{\sqrt{\mathrm{Re}(D) + |D|}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{Im}(D)}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mathrm{Re}(D) + |D|}}\, i\right),$$

$$\text{wobei} \qquad D = \frac{p^2}{4} - q,$$

der Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$.

5.3 Exkurs: Sinus und Cosinus als Kreisfunktionen

Wir beginnen unsere Einführung der trigonometrischen Funktionen mit der Wiederholung der Definition von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck.

Definition 5.14. (Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck)
Für Winkel α *mit* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *sind* $\sin(\alpha)$ *(„**Sinus von** α") und* $\cos(\alpha)$ *(„**Cosinus von** α") im rechtwinkligen Dreieck wie folgt definiert:*

$$\sin(\alpha) := \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha)}{\text{Hypothenuse}},$$
$$\cos(\alpha) := \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete (von } \alpha)}{\text{Hypothenuse}}.$$

*Die **Ankathete** (von α), die **Gegenkathete** (von α) und die **Hypothenuse**, sowie die Bezeichnungen der Dreiecksseiten sind in Abbildung 5.1 illustriert.*

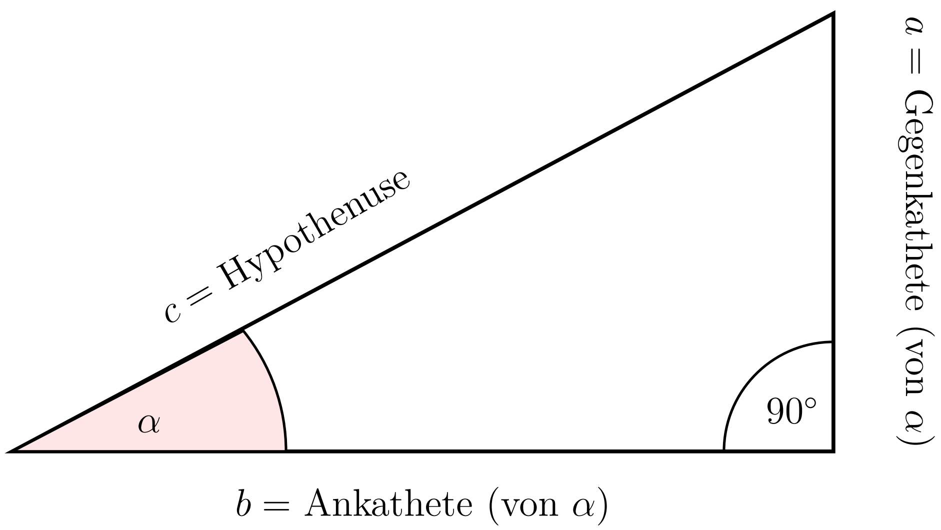


Abbildung 5.1: Die Definition von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck: $\sin(\alpha) = a/c$ und $\cos(\alpha) = b/c$.

Wir bemerken, dass für rechtwinklige Dreiecke der **Satz des Pythagoras** gilt:

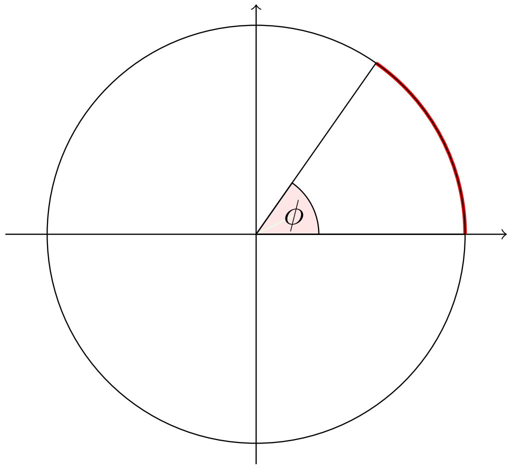
$$\big[\text{Gegenkathete (von } \alpha)\big]^2 + \big[\text{Ankathete (von } \alpha)\big]^2 = \big[\text{Hypothenuse}\big]^2$$

oder in der Beschriftung der Abbildung 5.1

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Wir wollen nun den Sinus und den Cosinus für beliebige Winkel definieren, indem wir Sinus und Cosinus als **trigonometrische Funktionen am Einheitskreis** einführen. Es ist dabei üblich, die Variable einer trigonometrischen Funktion nicht in Grad sondern im Bogenmaß anzugeben, welches wir daher zuerst einführen.

Definition 5.15. (Bogenmaß)
Das ***Bogenmaß*** *b zu dem Winkel ϕ (gemessen in Grad) ist die Länge des Kreisbogens am* ***Einheitskreis*** *mit Radius $r = 1$ zu diesem Winkel ϕ (siehe Skizze rechts). Nach der Formel für den Kreisumfang $2\pi r = 2\pi$ hat der Kreisbogen zum Winkel $360°$ die Länge 2π Damit gilt die Gleichheit*



$$\frac{\phi}{360°} = \frac{b}{2\pi},$$

mit der wir zwischen Gradmaß und Bogenmaß umrechnen können:

$$b = \frac{2\pi}{360°} \cdot \phi \qquad \text{und} \qquad \phi = \frac{360°}{2\pi} \cdot b.$$

In der Tabelle 5.1 ist die Umrechnung für das Gradmaß und das Bogenmaß für einige der wichtigsten Winkel aufgelistet. Sie sollten die Umrechnung zumindest für die in der Tabelle aufgeführten Winkel im Kopf haben.

Gradmaß	0	30	45	60	90	180	270	360	ϕ
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{2\pi}{360}\phi$

Tabelle 5.1: Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß.

Nachdem wir das Bogenmaß eingeführt haben, können wir nun die Sinus- und die Cosinusfunktion am Einheitskreis definieren.

Definition 5.16. (Sinusfunktion und Cosinusfunktion)
*Der **Einheitskreis** ist der Kreis in der (x, y)-Ebene mit Zentrum im Ursprung $(0, 0)$ und mit Radius $r = 1$. Es seien (x, y) die Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis, für den der Winkel gegen den Uhrzeigersinn von der positiven x-Achse aus gerade ϕ (im Bogenmaß) beträgt (siehe Abbildung 5.2). Dann definieren wir den **Sinus** und den **Cosinus** durch:*

$$\sin(\phi) := y \qquad \textit{und} \qquad \cos(\phi) := x. \tag{5.9}$$

Dadurch sind $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ für Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$ erklärt. Für andere Werte $\phi \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sin(\phi) := \sin(\phi - 2k\pi) \qquad \textit{und} \qquad \cos(\phi) := \cos(\phi - 2k\pi), \tag{5.10}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $\phi - 2k\pi \in [0, 2\pi[$ gilt.

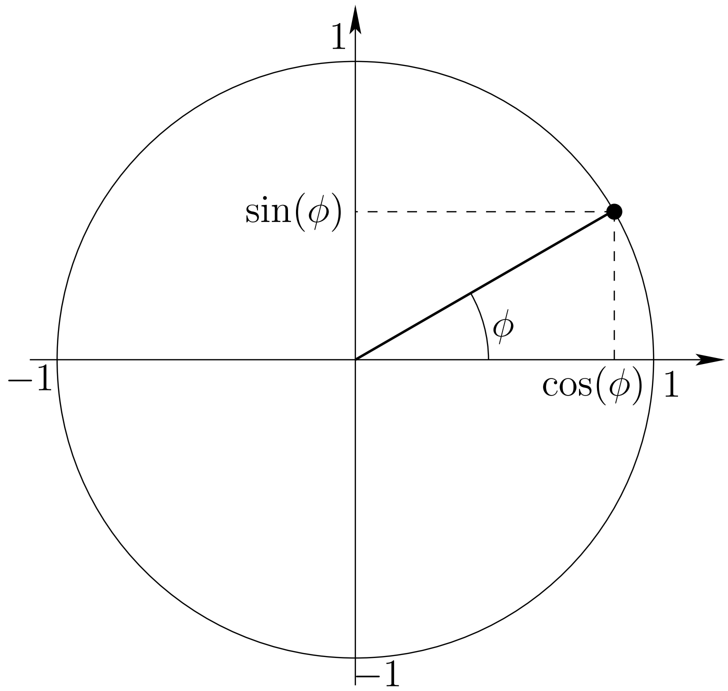


Abbildung 5.2: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis.

Durch (5.9) in Definition 5.16 sind $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ für alle $\phi \in [0, 2\pi[$ definiert, d.h. wir haben zunächst jeweils eine Funktion auf dem Intervall $[0, 2\pi[$.

Mit (5.10) werden die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion durch sogenannte **2π-periodische Fortsetzung** von $\sin(\phi)$ bzw. $\cos(\phi)$ von dem Intervall $[0, 2\pi[$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Wir erhalten in Definition 5.16 die Definition 5.14 von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck (mit Hypothenuse der Länge 1) als Sonderfall.

In Abbildung 5.3 haben wir die Graphen der Sinusfunktion und der Cosinusfunktion geometrisch veranschaulicht.

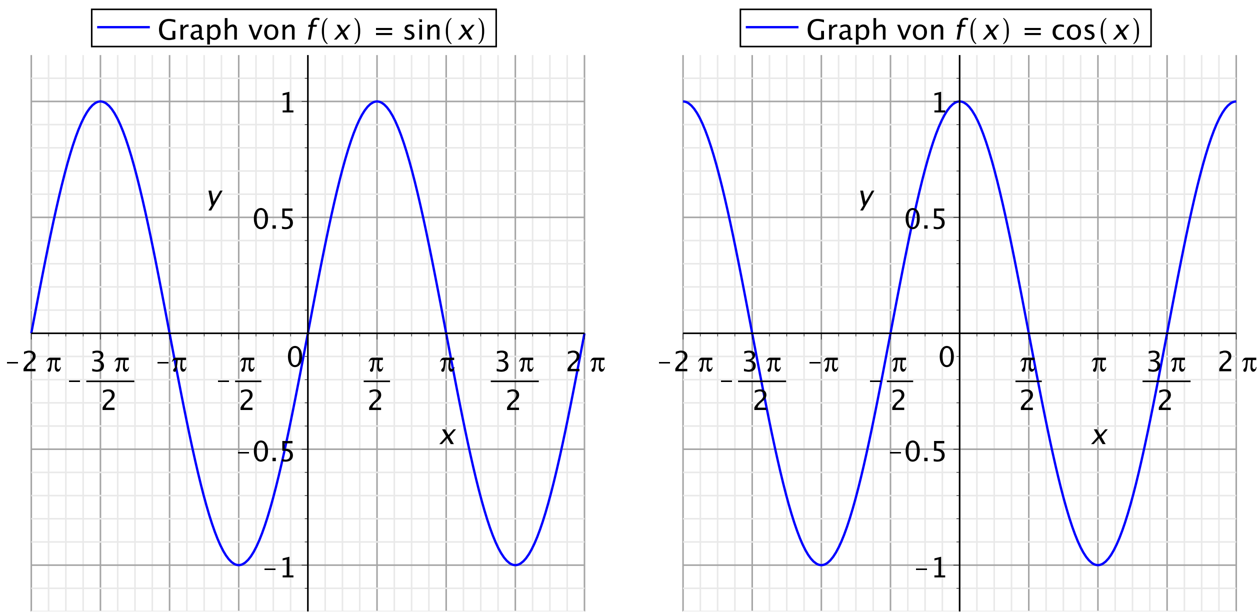


Abbildung 5.3: Veranschaulichung der Graphen der Sinusfunktion (linkes Bild) und der Cosinusfunktion (rechtes Bild).

In der Tabelle 5.2 sind die Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für einige wichtige Winkel aufgelistet. Diese sollte man im Kopf haben.

Mit der Beobachtung, dass

$$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}, \qquad \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}, \qquad 1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$$

sieht man, dass die Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in Tabelle 5.2 von der Form

$$\pm\frac{\sqrt{k}}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

sind, und kann sich das Muster leicht merken.

x in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x in Gradmaß	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Tabelle 5.2: Einige wichtige Werte der Sinus- bzw. der Cosinusfunktion.

Beispiel 5.17. (Berechnung der Werte von Sinus und Cosinus)
Man kann die Werte in Tabelle 5.2 einfach mittels der Definition von Sinus und Cosinus über das Dreieck am Einheitskreis ablesen bzw. mit elementargeometrischen Überlegungen berechnen.

(a) Man sieht am Einheitskreis für den Winkel $x = 0$ direkt, dass

$$\sin(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \cos(0) = 1.$$

(b) Man sieht am Einheitskreis für den Winkel $x = \pi/2$ (also $90°$) direkt, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

(c) Für den Winkel $x = \pi/4$ (also $45°$) haben wir ein gleichschenkliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge 1, wie in dem linken Bild in Abbildung 5.4 eingezeichnet. Nach dem Satz von Pythagoras gilt dann für die Länge $a = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$ der beiden gleichlangen Katheten des Dreiecks

$$a^2 + a^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,a^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\overset{a \geq 0}{\Longleftrightarrow} \quad a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also finden wir

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

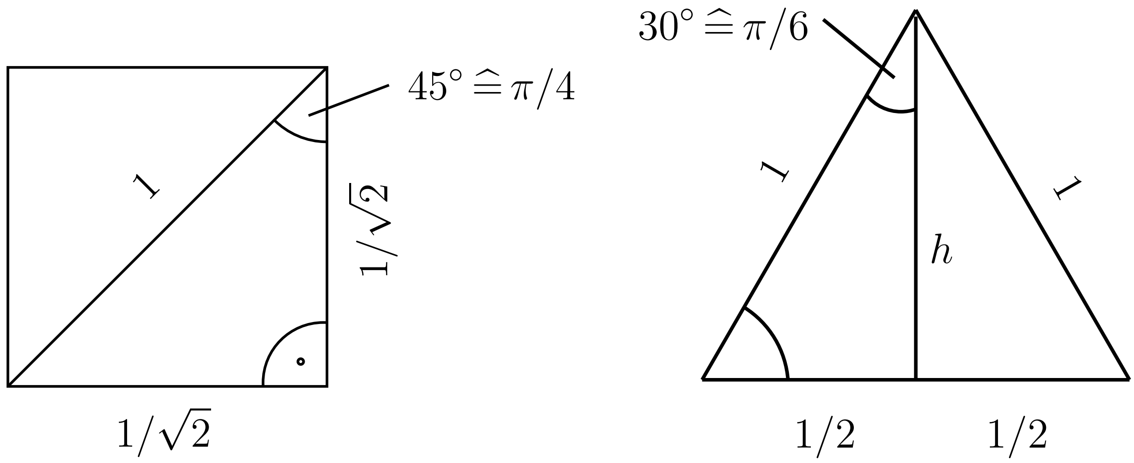


Abbildung 5.4: Skizzen zur Bestimmung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x = \pi/4$ (linkes Bild) und $x = \pi/6$ (rechtes Bild).

(d) Zur Bestimmung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x = \pi/6$ (also 30°) drehen wir das Dreieck am Einheitskreis und ergänzen eine gespiegelte Kopie des Dreiecks, so dass wir mit beiden Dreiecken zusammen ein gleichseitiges Dreieck erhalten, dessen Höhe $h = \cos(\pi/6)$ und dessen halbe Grundseite $\sin(\pi/6)$ ist (siehe das rechte Bild in Abbildung 5.4). Wir können dann direkt ablesen, dass gilt $\sin(\pi/6) = 1/2$, und nach dem Satz des Pythagoras finden wir

$$\begin{aligned} & 1 = \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 \\ \Longrightarrow \quad & \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 = 1 - \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 = 1 - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \Longrightarrow \quad & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

Wir finden also

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Zuletzt halten wir einige wichtige Eigenschaften von Sinus und Cosinus fest.

Hilfssatz 5.18. (Eigenschaften von Sinus und Cosinus)

(1) $\cos(-x) = \cos(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *(Cosinus ist eine gerade Funktion).*

(2) $\sin(-x) = -\sin(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *(Sinus ist eine ungerade Funktion).*

(3) $\cos(x+y) = \cos(x)\,\cos(y) - \sin(x)\,\sin(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(4) $\sin(x+y) = \sin(x)\,\cos(y) + \sin(y)\,\cos(x)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

(5) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Die Formel in Hilfssatz 5.18 (3) bzw. in Hilfssatz 5.18 (4) nennt man das **Additionstheorem** für den Cosinus bzw. den Sinus. Hilfssatz 5.18 (5) folgt aus dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck mit Hypothenuse der Länge 1 und Ankathete $\cos(x)$ und Gegenkathete $\sin(x)$. Dabei ist in Hilfssatz 5.18 (5) per Definition $\sin^2(x) := \big[\sin(x)\big]^2$ und $\cos^2(x) := \big[\cos(x)\big]^2$.

5.4 Polardarstellung komplexer Zahlen

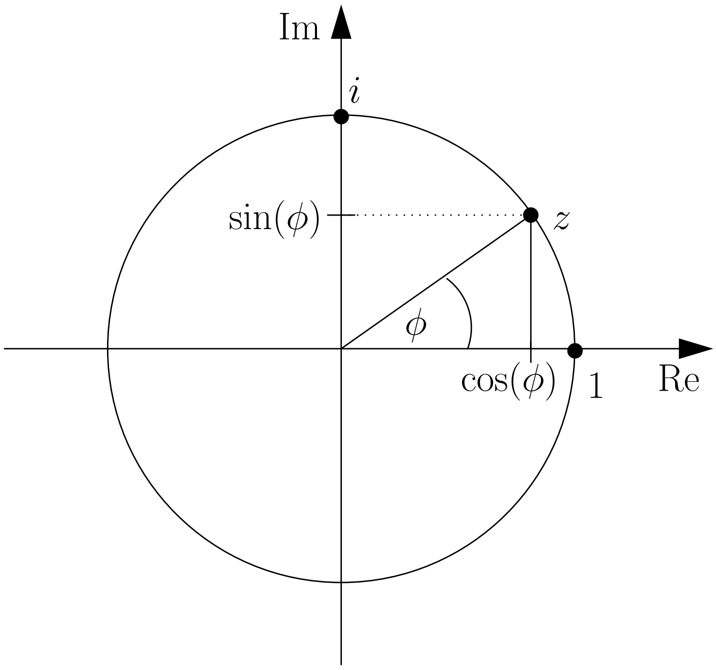
Wir leiten nun die Polardarstellung von komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene her:

Sei zunächst $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, d.h. z liegt auf der **Einheitskreislinie**

$$\big\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1\big\}.$$

Dann gilt (siehe Skizze)

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z) = \cos(\phi)\\ \mathrm{Im}(z) = \sin(\phi)\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad z = \cos(\phi) + \sin(\phi)\, i.$$



Dabei ist ϕ der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der Strecke vom Ursprung nach z. Man misst ϕ gegen den Uhrzeigersinn. Der Winkel ϕ wird im Bogenmaß angegeben und heißt das **Argument** von z, also $\phi = \arg(z)$. Das Argument $\arg(z)$ von z ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, und man gibt es üblicherweise als Winkel aus $[0, 2\pi[$ an.

Nun betrachten wir beliebige komplexe Zahlen $z \neq 0$, d.h. es sei $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit Betrag $|z| = r$. Ist ϕ der Winkel in Bogenmaß zwischen der positiven reellen Achse und der Strecke vom Ursprung nach z, so finden wir analog

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \cos(\phi), \qquad \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \sin(\phi) \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathrm{Re}(z) = r\,\cos(\phi), \qquad \mathrm{Im}(z) = r\,\sin(\phi) \\
\Longleftrightarrow \quad & z = r\,\cos(\phi) + r\,\sin(\phi)\,i = r\,\big[\cos(\phi) + \sin(\phi)\,i\big].
\end{aligned}
$$

Dieses ist die **Polardarstellung** von $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Es ist üblich, das Argument $\phi = \arg(z)$ durch einen Winkel im Intervall $[0, 2\pi[$ anzugeben.

Bemerkung 5.19. (Umrechnung zw. Normal- und Polardarstellung)
Machen wir uns klar, wie die **Umrechnung** zwischen der **Normaldarstellung** komplexer Zahlen $z = a + b\,i$ und der **Polardarstellung** funktioniert:

(1) Liegt z in Polardarstellung

$$z = r\,\big[\cos(\phi) + \sin(\phi)\,i\big]$$

vor, so ist die Normaldarstellung gegeben durch

$$z = a + b\,i \qquad \text{mit} \qquad a = r\,\cos(\phi), \qquad b = r\,\sin(\phi).$$

(2) Liegt z in der Normaldarstellung $z = a + b\,i$ vor, so wissen wir direkt

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Weiter wissen wir wegen $a = r\,\cos(\phi)$ und $b = r\,\sin(\phi)$, dass gilt

$$\cos(\phi) = \frac{a}{r} \qquad \text{und} \qquad \sin(\phi) = \frac{b}{r}\,.$$

Anhand der Vorzeichen von $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$ bestimmt man mit der unten stehenden Tabelle, in welchem **Quadranten** die komplexe Zahl z liegt.

- Ist $\mathrm{Re}(z) = 0$ bzw. $\mathrm{Im}(z) = 0$ so wissen wir bereits, dass das Argument $\pi/2$ oder $3\pi/2$ bzw. 0 oder π ist. In diesem Fall können wir direkt am Vorzeichen von $\mathrm{Im}(z)$ bzw. $\mathrm{Re}(z)$ ablesen, was das korrekte Argument $\phi = \arg(z)$ ist.

- Sind $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ beide ungleich Null, so lässt sich die komplexe Zahl z eindeutig einem Quadranten zuordnen. Wir suchen dann das Argument $\phi = \arg(z)$ so in dem zu dem Quadranten gehörenden Intervall für die Winkel, dass

$$\cos(\phi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} \qquad \text{und} \qquad \sin(\phi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r}$$

erfüllt sind.

Quadrant	Bedingungen an $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$	zugehörige Winkel
1. Quadrant	$\mathrm{Re}(z) \geq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \geq 0$	$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ $(0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ)$
2. Quadrant	$\mathrm{Re}(z) \leq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \geq 0$	$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ $(90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ)$
3. Quadrant	$\mathrm{Re}(z) \leq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \leq 0$	$\pi \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$ $(180^\circ \leq \phi \leq 270^\circ)$
4. Quadrant	$\mathrm{Re}(z) \geq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \leq 0$	$\frac{3\pi}{2} \leq \phi \leq 2\pi$ $(270^\circ \leq \phi \leq 360^\circ)$

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 5.20. (Polardarstellung)

(a) Für die komplexe Zahl $z = 1 + i$ gilt

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i\right]$$

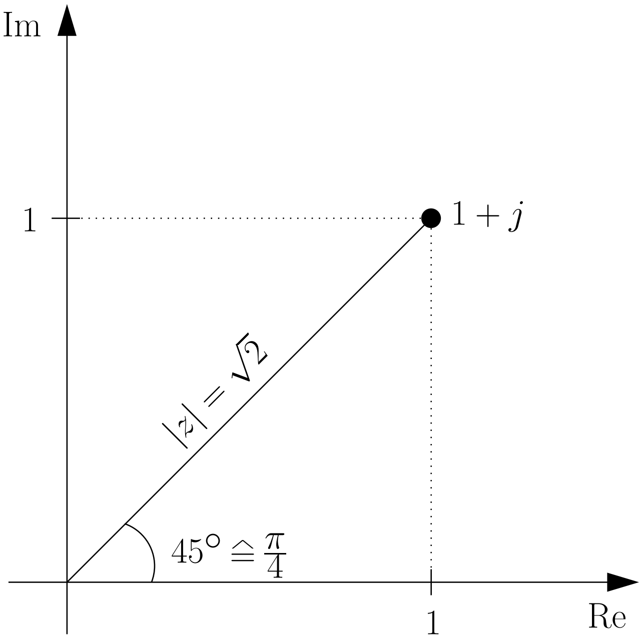
denn:

$r = |1+i| = \sqrt{2}$, und ϕ lässt sich aus der nebenstehenden Zeichnung ablesen oder mit Hilfe der folgenden Überlegungen berechnen: Aus

$$\cos(\phi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(\phi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

können wir ablesen, dass z im 1. Quadranten liegt und dass $\phi = \arg(z) = \pi/4$ ist.



(b) Für die komplexe Zahl $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ finden wir

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Wir haben hier $\mathrm{Re}(z) = -1 < 0$ und $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{3} > 0$, d.h. $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ liegt im 2. Quadranten. Damit bekommen wir $\pi/2 < \phi < \pi$. Weiter gilt

$$\cos(\phi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin(\phi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir wissen, dass (wegen $\frac{\pi}{3} \;\widehat{=}\; 60°$ und $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \;\widehat{=}\; 120° = 180° - 60°$), also

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{und daher} \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit dem Winkel/Argument $\phi = \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ liegen wir im 2. Quadranten. Also folgt die Polardarstellung:

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\,i\right].$$

Mit der Polardarstellung kann man die Multiplikation und Division komplexer Zahlen sehr viel einfacher durchführen als mit der kartesischen Darstellung.

Satz 5.21. (Rechnen mit der Polardarstellung)
Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit den Polardarstellungen

$$z = r\,\big[\cos(\phi) + \sin(\phi)\,i\big] \qquad \textit{bzw.} \qquad w = s\,\big[\cos(\psi) + \sin(\psi)\,i\big].$$

Dann gelten:

(1) $\overline{z} = r\,\big[\cos(\phi) - \sin(\phi)\,i\big] = r\,\big[\cos(-\phi) + \sin(-\phi)\,i\big]$

(2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\,\big[\cos(\phi) - \sin(\phi)\,i\big] = \dfrac{1}{r}\,\big[\cos(-\phi) + \sin(-\phi)\,i\big]$

(3) $z \cdot w = (r \cdot s) \cdot \big[\cos(\phi + \psi) + \sin(\phi + \psi)\,i\big]$

(4) $z^k = r^k\,\big[\cos(k\phi) + \sin(k\phi)\,i\big]$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$

(5) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{s}\,\big[\cos(\phi - \psi) + \sin(\phi - \psi)\,i\big]$

Anschauliche Bedeutung von Satz 5.21 (3): Multiplikation in $\mathbb{C}$ kann man sich so vorstellen: Will man $z \cdot w$ berechnen, so nimmt man den Punkt z, streckt ihn um $s = |w|$ am Ursprung und dreht den entstandenen Punkt dann um $\psi = \arg(w)$ gegen den Uhrzeigersinn.

Anschauliche Bedeutung von Satz 5.21 (5): Division z/w fasst man als Multiplikation

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot \frac{\overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = (z \cdot \overline{w}) \cdot \frac{1}{|w|^2}$$

auf und erhält damit eine analoge Interpretation. Eine Drehung um $-\psi$ gegen der Uhrzeigersinn ist dabei eine Drehung um Ψ im Uhrzeigersinn.

Beweis von Satz 5.21: Satz 5.21 (1) ist offensichtlich. Der Beweis von Satz 5.21 (2) bis (5) erfolgt mit Hilfe von Hilfssatz 5.18. Wir führen den Beweis auf einem Übungszettel durch. $\square$

Bemerkung 5.22. (Polardarstellung mit Euler-Formel)
Definiert man

$$e^{i\phi} := \cos(\phi) + \sin(\phi)\,i, \qquad (\textbf{Euler-Formel})$$

so erhält man die Polardarstellung

$$z = r\, e^{i\phi} \qquad \text{mit} \qquad r = |z|,\ \phi = \arg(z).$$

Mit $z = r\, e^{i\phi}$ und $w = s\, e^{i\psi}$ aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lautet Satz 5.21 dann:

(1) $\overline{z} = r\, e^{-i\phi}$

(2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r\, e^{i\phi}} = \dfrac{1}{r}\, e^{-i\phi}$

(3) $z \cdot w = \big(r\, e^{i\phi}\big) \cdot \big(s\, e^{i\psi}\big) = (r\, s)\, e^{i(\phi+\psi)}$

(4) $z^k = \big(r\, e^{i\phi}\big)^k = r^k\, e^{ik\phi}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(5) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r\, e^{i\phi}}{s\, e^{i\psi}} = \dfrac{r}{s}\, e^{i(\phi-\psi)}$

Betrachten wir ein Beispiel für das Rechnen mit der Euler-Formel.

Beispiel 5.23. (Rechnen mit der Polardarstellung mit Euler-Formel) Seien $z = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, $w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{2\, e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}},\\
\frac{1}{w} &= \frac{1}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}},\\
z \cdot w &= 2\, e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{6}},\\
\frac{z}{w} &= \frac{2\, e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{6}} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{2}\, i,\\
z^3 &= \big(2\, e^{i\frac{\pi}{3}}\big)^3 = 2^3\, e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 3} = 8\, e^{i\pi} = 8 \cdot (-1) = -8.
\end{aligned}$$

5.5 Komplexe Nullstellen von Polynomen

In Teilkapitel 5.2 haben wir bereits gesehen, dass jede quadratische Gleichung

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0 \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ und } a \neq 0$$

mit Vielfachheit gezählt genau zwei Lösungen in $\mathbb{C}$ hat. Eine analoge Aussage gilt für polynomiale Gleichungen beliebigen Grades.

Satz 5.24. (Fundamentalsatz der Algebra)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{C}$ mit $c_n \neq 0$. Wir betrachten das ***komplexe Polynom***

$$p(x) = c_n\, x^n + \ldots + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k\, x^k.$$

Die Gleichung $p(x) = 0$ hat dann immer ***mindestens eine*** *Lösung in $\mathbb{C}$.*

Durch wiederholte Anwendung dieser Aussage, lässt sich das Polynom somit ***faktorisieren*** *als*

$$p(x) = c_n\,(x - z_1)\,(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n),$$

wobei $z_1, z_2, \dots, z_n$ die n (nicht notwendigerweise verschiedenen) Lösungen von $p(x) = 0$ in $\mathbb{C}$ sind.

Im Folgenden betrachten wir nur einen **Sonderfall polynomialer Gleichungen n-ter Ordnung**: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir suchen **alle** komplexen Lösungen der Gleichung

$$x^n = 1.$$

Ist z eine Lösung von $x^n = 1$, so gilt für $|z|$:

$$|z|^n = |z^n| = |1| = 1, \qquad \text{also} \qquad |z| = 1.$$

Deshalb hat z die Polardarstellung $z = e^{i\phi}$ mit einem geeigneten Argument ϕ. Wir setzen diese in die Gleichung $x^n = 1$ ein:

$$\begin{aligned}
z^n = 1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (e^{i\phi})^n = 1 \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^{in\phi} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^{in\phi} = e^{i2k\pi} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \qquad n\,\phi = 2k\,\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \qquad \phi = \frac{2k}{n}\,\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Für $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ erhalten wir in (5.11) Winkel im Intervall $[0, 2\pi[$. Für alle anderen $k \in \mathbb{Z}$, also für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, erhalten wir Winkel der Form

$$\phi = \frac{2\ell}{n}\,\pi + m\,2\pi \qquad \text{mit } \ell \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ und } m \in \mathbb{Z}.$$

Für solche Winkel gilt aber

$$e^{i\left(\frac{2\ell}{n}\pi+m2\pi\right)}=e^{i\frac{2\ell}{n}\pi}\cdot\underbrace{e^{im2\pi}}_{=1}=e^{i\frac{2\ell}{n}\pi},$$

d.h. für die Winkel

$$\phi=\frac{2k}{n}\pi\qquad\text{mit } k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

erhalten wir bereits alle verschiedenen Lösungen $z=e^{i\phi}$ der Gleichung $x^n=1$.

Also hat $x^n=1$ genau die n verschiedenen (komplexen) Lösungen

$$1,\quad e^{i\frac{2\pi}{n}},\quad e^{i\frac{4\pi}{n}},\quad\ldots,\quad e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}},\tag{5.12}$$

genannt die **n-ten Einheitswurzeln**.

Betrachten wir ein Beispiel.

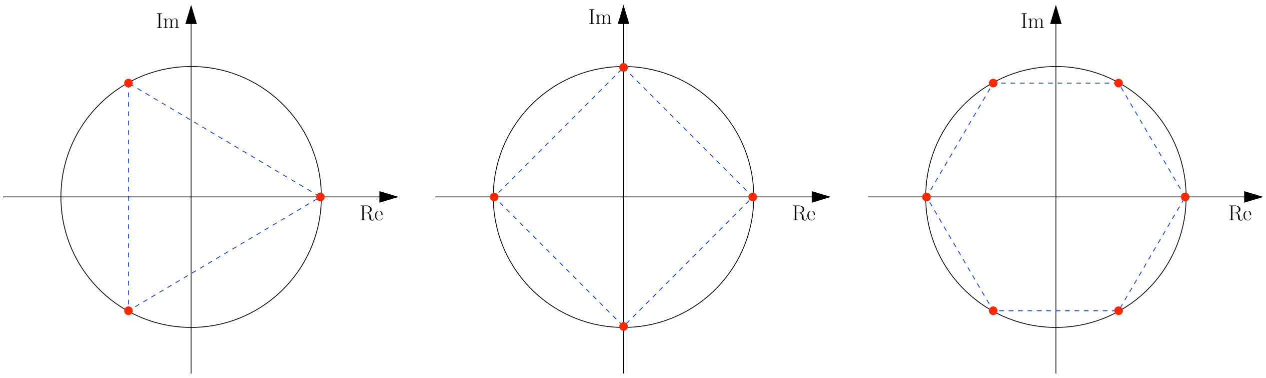
Beispiel 5.25. **(3-te Einheitswurzeln)**
Wir berechnen die dritten Einheitswurzeln: Mit (5.12) finden wir

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{0\pi}{3}}&=e^0=1,\\
e^{i\frac{2\pi}{3}}&=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,\\
e^{i\frac{4\pi}{3}}&=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,
\end{aligned}$$

wobei wir $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ benutzt haben.

In Abbildung 5.5 sind die n-ten Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene für $n=3$, $n=4$ und $n=6$ dargestellt. Wir sehen, dass die n-ten Einheitswurzeln die **Ecken eines gleichseitigen n-Ecks** sind, welches so positioniert und skaliert wurde, dass seine Ecken alle auf dem Einheitskreis liegen und dass eine Ecke der Punkt $(1,0)$, also die Zahl $z=1$, ist.

Mit den n-ten Einheitswurzeln und der Polardarstellung können wir nun jede Gleichung der Form $x^n=w$ mit $w\in\mathbb{C}$ in den komplexen Zahlen lösen und erhalten n (komplexe) Lösungen. Wir bezeichnen die Lösungen von $x^n=w$ auch als **n-te Wurzeln von w**. Betrachten wir dazu ein Beispiel.



$n = 3$ $n = 4$ $n = 6$

Abbildung 5.5: n-te Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene.

Beispiel 5.26. (n-te Wurzeln einer komplexen Zahl)
Wir wollen alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$x^3 = 8\,i$$

bestimmen. Ist z Lösung, so gilt für $|z|$:

$$|z|^3 = |z^3| = |8\,i| = 8 \qquad \Longrightarrow \qquad |z| = 2.$$

Also hat z die Polardarstellung $z = 2\,e^{i\phi}$ mit geeignetem ϕ. Einsetzen in $x^3 = 8\,i$ und Ausnutzen von $8\,i = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ liefert:

$$\begin{aligned}
z^3 = 8\,i \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (2\,e^{i\phi})^3 = 8\,i \\
&\Longleftrightarrow \qquad 8\,e^{i3\phi} = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^{i3\phi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^{i3\phi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{e^{i2k\pi}}_{=1} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^{i3\phi} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \qquad 3\,\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \qquad \phi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\,\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{2\,e^{i\frac{\pi}{6}},\ 2\,e^{i\frac{5}{6}\pi},\ 2\,e^{i\frac{3}{2}\pi}\right\} = \left\{\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2\,i\right\}.$$

ANHANG A

Grundlagen aus der Schule

In diesem Anhang sind einige Rechenregeln der Unter- und Mittelstufe zusammengestellt. Sie sollten mit diesen aus der Schule vertraut sein, aber falls Sie dort Defizite haben sollten, so nutzen Sie diesen Anhang zum Wiederholen. Die Rechenregeln in Teilkapiteln A.1 und A.2 werde wir im der EmDA ohne weitere Begründung benutzen. Die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen in Hilfssatz A.4 in Teilkapitel A.3 werden wir zum Teil in Übungsaufgaben aus den Anordnungsaxiomen (vgl. Anhang D) der reellen Zahlen herleiten. Interessant an Teilkapitel A.3 sind auch die Beispiele, an denen deutlich wird, wie sorgfältig man beim Rechnen mit Ungleichungen sein muss.

A.1 Rechnen mit reellen Zahlen

In diesem Teilkapitel seien a, b, c reelle Zahlen.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für die **Addition** reeller Zahlen:

(1) **Assoziativgesetz**: $(a + b) + c = a + (b + c)$

(2) **Kommutativgesetz**: $a + b = b + a$

Wegen des Assoziativgesetzes der Addition spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir die Additionen ausführen. Wir dürfen daher die Klammern auch einfach weglassen, also

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln für die **Multiplikation** reeller Zahlen:

(1) **Assoziativgesetz**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(2) **Kommutativgesetz**: $a \cdot b = b \cdot a$

Wegen des Assoziativgesetzes der Multiplikation spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir die Multiplikationen ausführen. Wir dürfen daher die Klammern auch einfach weglassen, also

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

Weiter gelten die beiden **Distributivgesetze**:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c,\\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c.\end{aligned}$$

Generell gilt **„Punktrechnung vor Strichrechnung"**, d.h. ist ein Ausdruck mit Multiplikationen oder Divisionen (also Punktrechnungen) und Additionen oder Subtraktionen (also Strichrechnungen) gegeben, so müssen die Punktrechnungen zuerst ausgeführt werden, wenn es nicht durch Klammersetzung anders vorgegeben ist.

Beispiel A.1. (Klammern und „Punktrechnung vor Strichrechnung")

$$\begin{aligned}13 + 2 \cdot 4 + 7 &= 13 + 8 + 7 = 28,\\ (13 + 2) \cdot 4 + 7 &= 15 \cdot 4 + 7 = 60 + 7 = 67.\end{aligned}$$

Wie sehen an dem obigen Beispiel, dass die Klammersetzung eine entscheidende Rolle spielt.

Auch wenn man nur Additionen und Subtraktionen hat, spielt die Klammersetzung eine Rolle, denn es gelten:

$$\begin{aligned}a - (b + c) &= a - b - c,\\ a - (b - c) &= a - b + c,\\ a + (b - c) &= a + b - c.\end{aligned}$$

Dieses folgt aus den obigen Gesetzen, indem man die Subtraktion mittels

$$a - b = a + (-1) \cdot b = a + (-b)$$

als Addition auffasst:

$$a - (b + c) = a + (-1) \cdot (b + c)$$

$$
\begin{aligned}
&= a + \big((-b) + (-c)\big) \\
&= a + (-b) + (-c) \\
&= a - b - c, \\
a - (b - c) &= a + (-1) \cdot \big(b + (-c)\big) \\
&= a + \big((-b) + c\big) \\
&= a + (-b) + c \\
&= a - b + c, \\
a + (b - c) &= a + \big((b + (-c)\big) \\
&= a + b + (-c) \\
&= a + b - c.
\end{aligned}
$$

A.2 Bruchrechnung

In der Unter- und Mittelstufe lernt man die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$, also die Menge aller Zahlen der Form

$$\frac{m}{n} \qquad \text{mit } m, n \in \mathbb{Z}, \text{ wobei } n \neq 0,$$

kennen. Solche Zahlen nennen wir **Brüche**. Später werden in der Schule auch „Brüche“ betrachtet, deren Zähler und Nenner nicht mehr in $\mathbb{Z}$ sondern beliebige reelle Zahlen sind, wobei der Nenner natürlich nach wie vor ungleich Null sein muss, also z.B.

$$\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{e}{\sqrt{7}}.$$

Für das Rechnen mit Brüchen gelten die Rechenregeln aus dem nachfolgenden Hilfssatz.

Hilfssatz A.2. (Rechenregeln der Bruchrechnung)
Folgende Rechenregeln gelten für reelle Zahlen a, b, c und d:

(1) Erweitern und Kürzen: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$

(2) Addition von Brüchen mit gleichem Nenner: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a + c}{b}$

(3) Addition allgemeiner Brüche: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

(4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

(5) Multiplikation mit $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

(6) Bilden des Kehrwertes: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = 1 : \frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$

(7) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Dabei gilt: ***Kein Nenner darf dabei gleich Null sein!*** *Bei Doppelbrüchen setzt man den Hauptbruchstrich auf Höhe des Gleichheitszeichens.*

Betrachten wir einige Zahlenbeispiele für die Rechenregeln aus Hilfssatz A.2.

Beispiel A.3. (Rechenregeln der Bruchrechnung)

(a) $\frac{28}{32} = \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{7}{8}$

(b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$

(c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$

(d) $\frac{33}{28} \cdot \frac{4}{11} = \frac{33 \cdot 4}{28 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 4}{7 \cdot 4 \cdot 11} = \frac{3}{7}$

(e) $3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 7}{9} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7}{3}$

(f) $\frac{1}{\frac{8}{33}} = \frac{33}{8}$

(g) $\frac{\frac{2}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{21} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{21 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

Wichtig ist, zu beachten, dass die folgenden **falschen** Regeln **nicht** gelten:

$$\frac{a+b}{a} \neq \frac{1+b}{1} \qquad \text{sondern korrekt ist} \qquad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{a+b} \neq \frac{1}{1+b},$$

$$\frac{a+b}{c+d} \neq \frac{a}{c} + \frac{b}{d}.$$

A.3 Rechnen mit Ungleichungen

Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten die folgenden Regeln.

Hilfssatz A.4. (Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen)

(1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned} a < b &\iff a + c < b + c \\ a > b &\iff a + c > b + c \\ a \leq b &\iff a + c \leq b + c \\ a \geq b &\iff a + c \geq b + c \end{aligned}$$

(2) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $c > 0$ gelten:

$$\begin{aligned} a < b &\iff c \cdot a < c \cdot b \\ a > b &\iff c \cdot a > c \cdot b \\ a \leq b &\iff c \cdot a \leq c \cdot b \\ a \geq b &\iff c \cdot a \geq c \cdot b \end{aligned}$$

(3) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $c < 0$ gelten:

$$\begin{aligned} a < b &\iff c \cdot a > c \cdot b \\ a > b &\iff c \cdot a < c \cdot b \\ a \leq b &\iff c \cdot a \geq c \cdot b \\ a \geq b &\iff c \cdot a \leq c \cdot b \end{aligned}$$

Wichtig ist insbesondere Hilfssatz A.4 (3): Wenn man eine Ungleichung mit einer **negativen** reellen Zahl multipliziert, so **kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!**

Betrachten wir einige elementare Beispiele.

Beispiel A.5. (Rechnen mit Ungleichungen)

(a) $7 > 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7+3 > 5+3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10 > 8$

(b) Subtraktion von $a \in \mathbb{R}$ realisieren wir als Addition von $-a$, also z.B.:

$$7 \geq 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7+(-5) \geq 5+(-5) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \geq 0$$

(c) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot 6 < -\frac{1}{3} \cdot 6 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{6}{2} < -\frac{6}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad -3 < -2$

(d) $-1 < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (-1)\cdot(-1) > 2 \cdot (-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 > -2$

(e) Division durch eine reelle Zahl $a \neq 0$ realisieren wir als Multiplikation mit $1/a$, also z.B.:

$$2 \leq 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \cdot \frac{1}{2} \leq 3 \cdot \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leq \frac{3}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \qquad 1 \cdot \frac{1}{3} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$$

Betrachten wir nun ein anspruchsvolleres Beispiel: Wir wollen eine Ungleichung in x nach x auflösen.

Beispiel A.6. (Lösen von Ungleichungen)
Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$\frac{2\,x-3}{x-3} \geq 4\,? \tag{A.1}$$

Die Zahl $x = 3$ muss vorab ausgeschlossen werden, weil sonst auf der linken Seite durch Null dividiert wird!

Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:

- $x < 3$ bzw. $x - 3 < 0$
- $x > 3$ bzw. $x - 3 > 0$

Wir suchen die Lösungen der Ungleichungen für jeden Fall separat.

Fall $x < 3$*:* Multiplikation der Ungleichung (A.1) mit $x - 3 < 0$ ergibt („$\geq$“ wird umgekehrt):

$$\begin{aligned}(x-3)\cdot\frac{2\,x-3}{x-3} \leq 4\,(x-3) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 2\,x-3 \leq 4\,x-12 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 9 \leq 2\,x \\ &\Longleftrightarrow \qquad \frac{9}{2} \leq x\,.\end{aligned}$$

Die Ungleichung $9/2 \leq x$ steht aber im Widerspruch zu $x < 3$ (da $3 < 9/2 = 4{,}5$). Es gibt also keine Lösung der Ungleichung (A.1) mit $x < 3$, d.h. die Lösungsmenge in diesem Fall ist $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

Fall $x > 3$*:* Multiplikation der Ungleichung (A.1) mit $x - 3 > 0$ ergibt („$\geq$“ bleibt erhalten):

$$\begin{aligned}(x-3)\cdot\frac{2\,x-3}{x-3} \geq 4\,(x-3) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 2\,x-3 \geq 4\,x-12 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 9 \geq 2\,x \\ &\Longleftrightarrow \qquad \frac{9}{2} \geq x\,.\end{aligned}$$

Alle x mit $x > 3$ und $x \leq 9/2$, also alle x mit $3 < x \leq 9/2$, erfüllen die Ungleichung (A.1), d.h. die Lösungsmenge in diesem Fall ist $\mathbb{L}_2 = \left]3, \frac{9}{2}\right]$.

Die Lösungsmenge von (A.1) ist also

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \emptyset \cup \left]3, \frac{9}{2}\right] = \left]3, \frac{9}{2}\right]\,.$$

ANHANG B

Summen

Hier erklären wir die Summen-Notation und das Rechnen mit Summen.

Definition B.1. (Summen-Notation)

*Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Die **Summe von** $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ schreibt man mit dem **Summenzeichen**:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n. \tag{B.1}$$

*Wir nennen k den **Summationsindex**, und der kleinste Wert des Summationsindexes (also m in (B.1)) wird als **untere Grenze** des Summationsindexes und der größte Wert des Summationsindexes (also n in (B.1)) wird also **obere Grenze** des Summationsindexes bezeichnet. Der Summationsindex ist frei wählbar und hat keine Bedeutung für den Wert der Summe, d.h.*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j.$$

*Eine Summe, deren obere Grenze des Summationsindexes kleiner ist als deren untere Grenze, wird **leere Summe** genannt. Wir definieren die leere Summe als Summe ohne Summanden und setzen formal*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{für } n < m.$$

Verdeutlichen wir uns die Summennotation an zwei Beispielen.

Beispiel B.2. (Summen-Notation)

(a) Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_k = k$, $\ldots$, $a_n = n$. Dann gelten:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n,$$

$$\sum_{k=0}^{4} a_k = \sum_{k=0}^{4} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

$$\sum_{k=2}^{5} a_k = \sum_{k=2}^{5} k = 2 + 3 + 4 + 5 = 14.$$

(b) Sei $a_k = k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55,$$

$$\sum_{k=10}^{10} a_k = a_{10} = 10^2 = 100.$$

Indem man die Summen in dem nachfolgenden Hilfssatz ausschreibt, erhält man die folgenden Rechenregeln für Summen.

Hilfssatz B.3. (Rechenregeln für Summen)

Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln für Summen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k), \tag{B.2}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k - b_k), \tag{B.3}$$

$$\sum_{k=m}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \textit{für alle } c \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k, \quad \textit{wenn } p \in \mathbb{Z} \textit{ mit } m \leq p < n. \tag{B.4}$$

Formel (B.4) *besagt, dass wir die Summe in zwei Teilsummen zerlegen können. Man kann bei einer Summe auch den Summationsindex um* $p \in \mathbb{N}$ *nach rechts bzw. links verschieben:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=m+p}^{n+p} a_{\ell-p} \qquad (\textit{Indexverschiebung nach rechts}), \tag{B.5}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=m-p}^{n-p} a_{\ell+p} \qquad (\textit{Indexverschiebung nach links}). \tag{B.6}$$

Erklärung zu (B.5) und (B.6): Formal werden die Indexverschiebungen (B.5) bzw. (B.6) durchgeführt, indem man den neuen Summationsindex $\ell := k + p$ (Indexverschiebung nach rechts) bzw. $\ell := k - p$ (Indexverschiebung nach links) einführt und damit $k = \ell - p$ (Indexverschiebung nach rechts) bzw. $k = \ell + p$ (Indexverschiebung nach links) erhält und entsprechend ersetzt. In (B.5) erhält man für den neuen Summationsindex $\ell = k + p$ die neue untere bzw. obere Grenze $m+p$ bzw. $n+p$, und der Index k in a_k wird durch $k = \ell - p$ ersetzt. Bei (B.6) geht man analog vor.

Betrachten wir zwei Beispiele, in denen die Rechenregeln für Summen aus Hilfssatz B.3 angewendet werden.

Beispiel B.4. (Rechnen mit Summen)

$$\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{k=1}^{n} \big[k - (k-1)\big] = \sum_{k=1}^{n} \big[k - k + 1\big] = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Wie man sieht, ist die Berechnung durch die Regel (B.3) für die Subtraktion von Summen erheblich vereinfacht worden.

Beispiel B.5. (Rechnen mit Summen)

Beim Berechnen von

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$$

bemerken wir zuerst, dass die Terme hinter dem jeweiligen Summenzeichen durch das Ersetzen von k durch $k+1$ ineinander überführt werden können. Daher führen wir in der zweiten Summe die Indexverschiebung $\ell = k+1$ (vgl. (B.5)) durch und erhalten die neue untere Grenze $1+1=2$ bzw. die neue obere Grenze $n+1$. Anschließend benennen wir ℓ wieder in k um. Also

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n+1} k^2.$$

Der Unterschied zwischen den beiden umgeformten Summen besteht nun nur noch in den Grenzen für den Summationsindex. In der ersten Summe wird über $k=1,2,\ldots,n$ summiert; in der zweiten Summe wird über $k=2,\ldots,n,n+1$ summiert. Intuitiv ist damit klar, dass bei der Subtraktion der beiden Summen genau der erste Term der ersten Summe und der letzte Term der zweiten Summe übrig bleiben. Wir nutzen (B.4), um aus der ersten Summe den Term für $k=1$ und aus der zweiten Summe den Term mit $k=n+1$ herauszuziehen, und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n+1} k^2 &= \left(1^2 + \sum_{k=2}^{n} k^2\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} k^2 + (n+1)^2\right) \\
&= 1^2 + \sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k^2 - (n+1)^2 \\
&= 1 - (n+1)^2 \\
&= 1 - (n^2 + 2\,n + 1) \\
&= -\,n^2 - 2\,n.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = -\,n^2 - 2\,n.$$

ANHANG C

Binomischer Satz

Wir werden nun für allgemeines $n \in \mathbb{N}_0$ eine „ausmultiplizierte“ Darstellung für $(a+b)^n$ kennenlernen, welche die erste und zweite binomische Formel als Sonderfall enthält. Dies ist der sogenannte binomische Satz.

Wir beginnen mit einer Wiederholung der bereits aus der Mittelstufe bekannten binomischen Formeln.

Hilfssatz C.1. (binomische Formeln)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) ***Erste binomische Formel:***

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a+b)^2.$$

(2) ***Zweite binomische Formel:***

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a-b)^2.$$

(3) ***Dritte binomische Formel:***

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b).$$

Die erste Umformungsrichtung nennt man **Ausmultiplizieren** und die zweite

Faktorisieren. Beide können bei Umformungen zeitsparend eingesetzt werden. Die Symbole a und b können sowohl durch Zahlen, Buchstaben (Variablen, Parameter) als auch durch komplexere Terme ersetzt werden, solange diese reellwertig sind.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \boxed{1} \\
(a+b)^1 &= \boxed{1}\,a + \boxed{1}\,b \\
(a+b)^2 &= \boxed{1}\,a^2 + \boxed{2}\,a\,b + \boxed{1}\,b^2 \\
(a+b)^3 &= \boxed{1}\,a^3 + \boxed{3}\,a^2b + \boxed{3}\,a\,b^2 + \boxed{1}\,b^3 \\
(a+b)^4 &= \boxed{1}\,a^4 + \boxed{4}\,a^3b + \boxed{6}\,a^2b^2 + \boxed{4}\,a\,b^3 + \boxed{1}\,b^4
\end{aligned}$$

Abbildung C.1: Das Pascalsche Dreieck: Durch Addition der Koeffizienten in der vorigen Zeile, von denen ein Pfeil auf den neuen Koeffizienten weist, erhält man jeweils den Wert des neuen Koeffizienten.

Multipliziert man nun $(a+b)^n$ für $n \geq 2$ aus, so findet man, dass die Koeffizienten von a^n, $a^{n-1}\,b$, $a^{n-2}\,b^2$, $\ldots, a\,b^{n-1}$, b^n aus den Koeffizienten von a^{n-1}, $a^{n-2}\,b$, $a^{n-3}\,b^2$, $\ldots$, $a\,b^{n-2}$, b^{n-1} in der ausmultiplizierten Darstellung von $(a+b)^{n-1}$ **mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks rekursiv berechnet** werden können. Dieses ist in Abbildung C.1 illustriert.

Das Pascalsche Dreieck hat einen entscheidenden Nachteil. Um die Koeffizienten für das Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ zu bekommen, müssen wir vorher alle Koeffizienten für das Ausmultiplizieren von $(a+b)^m$ mit $m = 1, 2, \ldots, n-1$ berechnen. Der binomische Satz umgeht dieses Problem und liefert eine direkte Formel für die Koeffizienten. Zur Vorbereitung müssen wir zunächst Fakultäten und Binomialkoeffizienten einführen.

Definition C.2. (Fakultät)
Die natürliche Zahl

$$\begin{aligned}
n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n && \textit{für } n \in \mathbb{N}, \\
0! &:= 1 && \textit{für } n = 0,
\end{aligned}$$

heißt ***Fakultät von*** **n** *oder* **n-*Fakultät*.**

Es gilt die Rekursionsformel:

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{=n!} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel C.3. (Fakultäten)
Wir haben

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1! = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2! = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3! = 24.$$

Definition C.4. (Binomialkoeffizient)
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$. Der ***Binomialkoeffizient*** $\binom{n}{k}$ *ist definiert als*

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,. \tag{C.1}$$

In Worten sagt man für $\binom{n}{k}$ „(Binomialkoeffizient) n über k".

Die Darstellung von $\binom{n}{k}$ in der zweiten Zeile von (C.1) folgt, indem man die erste Zeile mit $(n-k)!$ erweitert.

Nun können wir den binomischen Satz für das Ausmultiplizieren (und für die umgekehrte Richtung, das Faktorisieren) von $(a+b)^n$ formulieren.

Satz C.5. (binomischer Satz)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Als Spezialfall erhalten wir für $n = 2$ die erste binomische Formel. Für $n = 2$ und $b = -d$ erhalten wir die zweite binomische Formel.

Zur Illustration leiten wir die erste und die zweite binomische Formel aus dem binomischen Satz ab:

Beispiel C.6. (erste und zweite binomische Formel)
Für $n = 2$ liest sich der binomische Satz wir folgt:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0}\, a^2\, b^0 + \binom{2}{1}\, a\, b + \binom{2}{2}\, a^0\, b^2 \\ &= \binom{2}{0}\, a^2 + \binom{2}{1}\, a\, b + \binom{2}{2}\, b^2, \end{aligned} \tag{C.2}$$

und wir haben

$$\begin{aligned}\binom{2}{0} &= \frac{2!}{0! \cdot (2-0)!} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1, \\ \binom{2}{1} &= \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2, \\ \binom{2}{2} &= \frac{2!}{2! \cdot (2-2)!} = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1.\end{aligned}$$

Einsetzen in (C.2) ergibt die erste binomische Formel:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a\, b + \binom{2}{2} b^2 = 1\, a^2 + 2\, a\, b + 1\, b^2 = a^2 + 2\, a\, b + b^2.$$

Setzen wir in der letzten Formel nun $b = -d$, so finden wir

$$(a-d)^2 = a^2 + 2\, a\,(-d) + (-d)^2 = a^2 - 2\, a\, d + d^2,$$

und wir haben auch die zweite binomische Formel hergeleitet.

Wir werden den binomischen Satz mit Induktion über n mit Hilfe der folgenden Identitäten auf einem Übungszettel beweisen.

Hilfssatz C.7. (Rechenregeln für Binomialkoeffizienten)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gelten folgende Identitäten:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \tag{C.3}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \tag{C.4}$$

sowie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{C.5}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad \textit{wobei } k < n. \tag{C.6}$$

Wir bemerken, dass (C.6) gerade die Formel ist, welche die Berechnung der Koeffizienten im Pascalschen Dreieck beschreibt (siehe Abbildung C.2).

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \boxed{\tbinom{0}{0}} \\
(a+b)^1 &= \boxed{\tbinom{1}{0}}\, a + \boxed{\tbinom{1}{1}}\, b \\
(a+b)^2 &= \boxed{\tbinom{2}{0}}\, a^2 + \boxed{\tbinom{2}{1}}\, a\, b + \boxed{\tbinom{2}{2}}\, b^2 \\
(a+b)^3 &= \boxed{\tbinom{3}{0}}\, a^3 + \boxed{\tbinom{3}{1}}\, a^2 b + \boxed{\tbinom{3}{2}}\, a\, b^2 + \boxed{\tbinom{3}{3}}\, b^3 \\
(a+b)^4 &= \boxed{\tbinom{4}{0}}\, a^4 + \boxed{\tbinom{4}{1}}\, a^3 b + \boxed{\tbinom{4}{2}}\, a^2 b^2 + \boxed{\tbinom{4}{3}}\, a\, b^3 + \boxed{\tbinom{4}{4}}\, b^4
\end{aligned}$$

Abbildung C.2: Illustration von (C.6) am Pascalschen Dreieck.

Beweis von (C.3), (C.4) *und* (C.5) *in Hilfssatz C.7:* Die Identitäten (C.3) und (C.4) in Hilfssatz C.7 sind leicht durch Nachrechnen gezeigt: Mit Hilfe von

$n! = (n-1)! \cdot n$ erhalten wir

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1,$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} = n,$$

und wir haben (C.3) und (C.4) nachgewiesen.

Aus der Definition der Binomialkoeffizienten folgt direkt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k},$$

und wir haben (C.5) bewiesen. Wir bemerken auch, dass die erste Gleichheit in (C.3) und (C.4) nur ein Sonderfall von (C.5) ist. $\square$

Die Formel (C.6) in Hilfssatz C.7 beweisen wir auf einem Übungszettel.

ANHANG D

Anordnungsaxiome der reellen Zahlen

Das Symbol „$<$“ hat die aus der Schule bekannte Bedeutung „kleiner“, also $a < b$ bedeutet „a ist kleiner als b“.

Bemerkung D.1. (Anordnungsaxiome der reellen Zahlen)
Für die reellen Zahlen gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**:

(A0) **Trichotomiegesetz:** Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ trifft genau eine der folgenden Möglichkeiten zu:

$$a < b \qquad \text{oder} \qquad a = b \qquad \text{oder} \qquad b < a.$$

(A1) **Transitivitätsgesetz:** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Gilt $a < b$ und $b < c$, so folgt $a < c$.

(A2) **Monotoniegesetz der Addition:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Ist $a < b$, so folgt $a + c < b + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

(A3) **Monotoniegesetz der Multiplikation:** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ist $a < b$ und $0 < c$, so folgt $a \cdot c < b \cdot c$.

Ein „Axiom“ ist ein „allgemeingültiger Grundsatz“, der keiner Erklärung bedarf. Sie können diese Eigenschaften der reellen Zahlen also einfach verwenden.

Mit Hilfe von „kleiner“ und „gleich“ können wir auf den reellen Zahlen nun auch „größer“, „kleiner (als) oder gleich“ und „größer (als) oder gleich“ definieren.

- Wir definieren nun „$>$“ („größer“) mit Hilfe von „$<$“ durch:

  $a > b$ („a ist größer als b“) gilt genau dann, wenn $b < a$ ist.

- Wir definieren nun „$\leq$“ (in Worten: „kleiner (als) oder gleich“) durch:

  $a \leq b$ („a ist kleiner (als) oder gleich b“) gilt genau dann, wenn $a = b$ oder $a < b$ ist.

- Wir definieren nun „$\geq$“ (in Worten: „größer (als) oder gleich“) durch:

  $a \geq b$ („a ist größer (als) oder gleich b“) gilt genau dann, wenn $a = b$ oder $a > b$ ist.

Aus den Anordnungsaxiomen folgen alle Aussagen in Hilfssatz A.4 direkt, oder man kann diese mit Hilfe der Anordnungsaxiome beweisen. Wir werden uns damit auf einem Übungszettel beschäftigen.

Griechisches Alphabet

Name	**kleiner griechischer Buchstabe**	**großer griechischer Buchstabe**
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	E
Zeta	ζ	Z
Theta	θ	Θ
Eta	η	H
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω