

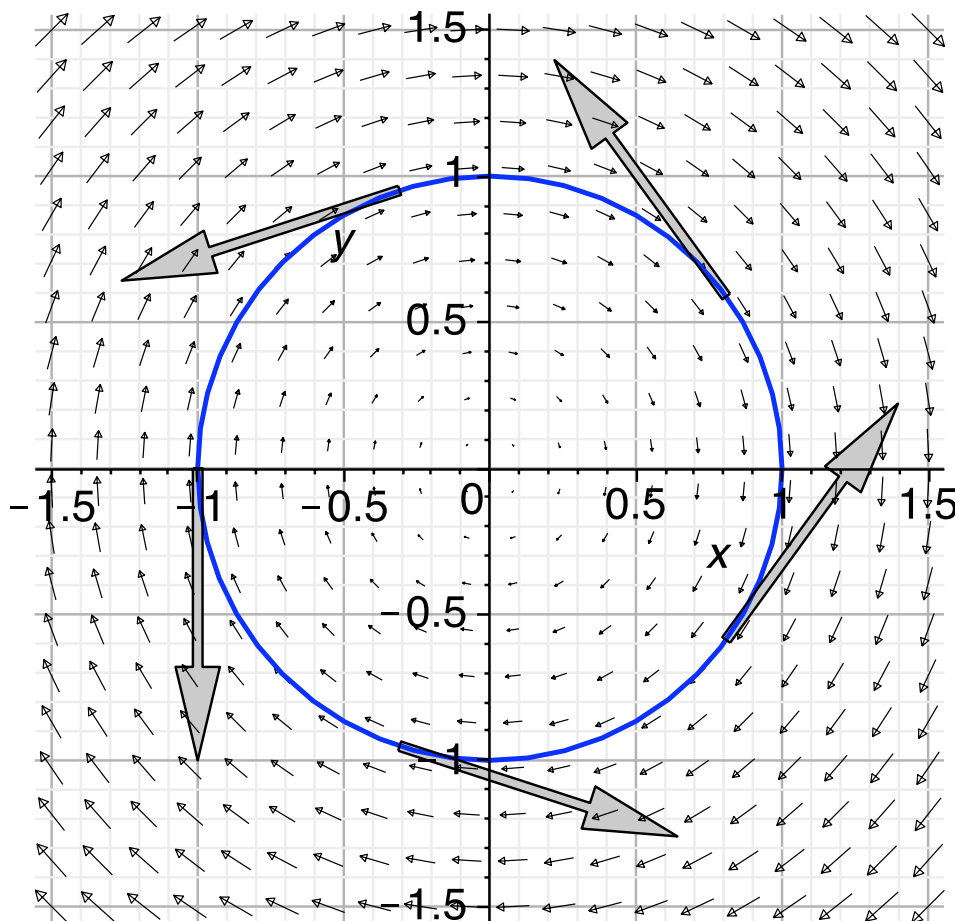


UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Höhere Mathematik C für Elektrotechniker

Kerstin Hesse

Universität Paderborn, Wintersemester 2023/24



Die Grundlage für dieses Skript bildeten die handschriftlichen Aufzeichnungen zur „Höheren Mathematik C für Elektrotechniker“ (kurz: HM C) von Frau Dr. Cornelia Kaiser aus dem Wintersemester 2014/15, die von der Autorin im Wintersemester 2015/16 zu einem Skript (mit gemeinsamer Autorenschaft von Frau Hesse und Frau Kaiser) ausgebaut wurden.

Das Skript vom Wintersemester 2015/16 wurde im Sommer 2017 von Frau Hesse überarbeitet und ergänzt. Dabei wurde die gemeinsame Autorenschaft aufgehoben, und Frau Kaiser und Frau Hesse werden basierend auf dem ursprünglichen gemeinsamen Skript für weitere HM C-Durchgänge jeweils ihre eigene Version des Skripts zur Verfügung stellen. Die Version von Frau Hesse ist das vorliegende Skript.

Paderborn, September 2023

Kerstin Hesse

Einleitung

Als Studierende/r der Elektrotechnik müssen Sie die Vorlesungen „Höhere Mathematik A (HM A)“, „Höhere Mathematik B (HM B)“ und „Höhere Mathematik C (HM C)“ hören, um das nötige mathematische Wissen für Ihren Studiengang zu erwerben.

Warum sollten Sie die Zeit investieren, um die mathematischen Inhalte und Techniken dieser Kurse zu lernen und verstehen?

Mathematik ist die Sprache der Naturwissenschaften, denn physikalische und technische Phänomene lassen sich nur mit der Sprache der Mathematik sauber beschreiben und modellieren. So wird der Zerfallsprozess einer radioaktiven Substanz durch eine Differentialgleichung beschrieben, und die physikalischen Gesetze des Elektromagnetismus werden durch die Maxwell'schen Gleichungen, ein System partieller Differentialgleichungen, beschrieben. Dabei spielen Vektorfelder und die Integralsätze von Gauß und Stokes eine zentrale Rolle. Wärmeleitung, Wellen und Schwingungen und Elektromagnetismus können nur mit Mathematik formal beschrieben werden.

Diese Beispiele machen deutlich, dass die Mathematik eine unverzichtbare „Sprache“ für jede/n Ingenieur/in und Naturwissenschaftler/in ist. Ohne die nötigen Mathematikkenntnisse werden Sie auch in den Fachvorlesungen Ihres Studiengangs meist wenig verstehen können. Sie sollten daher von Anfang an die nötige Zeit investieren, um die Inhalte der Vorlesungen HM A, HM B und HM C richtig zu verstehen und systematisch zu lernen.

Was wird in der HM C besprochen?

In **Teil VII „Vektoranalysis“** beschäftigen wir uns mit Kurvenintegralen, Vektorfeldern und Potentialen, sowie der Divergenz, dem Laplace-Operator und der Rotation.

Kurvenintegrale (auch sogenannte Wegintegrale) sind Integrale einer Funktion mehrerer Variablen (also mit einem Definitionsbereich im \mathbb{R}^n) entlang eines Weges im \mathbb{R}^n . Wir schränken also die Funktion auf den Weg ein und integrieren längs

dieses Weges. Da der Weg selber unterschiedlich parametrisiert sein kann, ist es wichtig, dass wir das Wegintegral oder Kurvenintegral so definieren, dass es von dieser Parametrisierung unabhängig ist.

Vektorfelder kennen Sie bereits aus der HM B. Dieses sind vektorwertige Funktionen \vec{f} definiert auf einer Teilmenge D von \mathbb{R}^n . Diese heften also jedem Punkt \vec{x} in D den Vektor $\vec{f}(\vec{x})$ an. Denken Sie beispielsweise an ein Magnetfeld im dreidimensionalen Raum. Dieses ist ein Vektorfeld, bei dem jedem Punkt im dreidimensionalen Raum als Vektor aus \mathbb{R}^3 die magnetische Feldstärke angeheftet wird. Bei einem Vektorfeld kann es sich um ein sogenanntes Potentialfeld handeln. Dieses ist beim Gravitationsfeld und beim Coulombfeld der Fall. Vereinfacht ausgedrückt ist ein Potentialfeld der Gradient einer reellwertigen Funktion. Das Coulombfeld ist also der Gradient des Coulombpotentials.

Bei der Divergenz, dem Laplace-Operator, der Rotation und dem Gradienten handelt es sich um sogenannte Differentialoperatoren. Diese bilden mittels eines Differenzierungsprozesses Funktionen auf Funktionen ab. Wendet man den Gradienten auf eine reellwertige Funktion an, so erhält man ein Vektorfeld. Wendet man die Divergenz auf ein Vektorfeld an, so erhält man eine reellwertige Funktion; wendet man die Rotation auf ein Vektorfeld $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ an, so erhält man wieder eine vektorwertige Funktion; und der Laplace-Operator einer reellwertigen Funktion liefert wieder eine reellwertige Funktion. Diese Differentialoperatoren spielen bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes eine zentrale Rolle.

In **Teil VIII „Integration in mehreren Variablen“** lernen wir das mehrdimensionale Riemann-Integral kennen und lernen wie man über Oberflächen integriert. Weiter lernen wir die wichtigen Integralsätze von Gauß und Stokes kennen.

Bei dem mehrdimensionalen Riemann-Integral handelt es sich um eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Riemann-Integrals, also des üblichen Integrals, welches Sie aus der Schule und der HM A kennen. Der Unterschied besteht darin, dass wir nun auch über (Ober-)Flächen und Volumina integrieren wollen.

Ein wichtiger neuer Begriff ist hier die sogenannte Nullmenge. Bei dem eindimensionalen Riemann-Integral, spielten einzelne Punkte keine Rolle: So ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ immer Null, und bei $\int_a^b f(x) dx$ spielt es keine Rolle, ob wir dieses als Integral von f über das offene Intervall $]a, b[$ oder das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ auffassen, denn die Werte des Integranden f in den einzelnen Punkten a und b tragen nichts zu dem Wert des Integrals bei. In der neuen Terminologie ist $\{a, b\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R} . Integrieren wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über ein Volumen im \mathbb{R}^3 , z.B. eine Vollkugel, so ist dessen Rand, also die Kugeloberfläche, eine Nullmenge, und die Werte von f auf diesem Rand tragen nichts zu dem Wert des Integrals bei. Betrachten wir Volumina, so sind Oberflächen Nullmengen; betrachten wir Oberflächen, so sind Randkurven oder Wege Nullmengen.

Die Integralsätze von Gauß und Stokes haben Sie vermutlich schon gelegentlich in der Elektrotechnik verwendet. Diese erlauben es, von einem Volumenintegral zu

einem Oberflächenintegral über den Rand des Volumens, bzw. von einem Oberflächenintegral zu einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche überzugehen. Dabei muss der Integrand natürlich passend „umgewandelt“ werden; dabei kommen die Differentialoperatoren Divergenz und Rotation ins Spiel. Wir lernen auch die physikalische Interpretation dieser Integralsätze kennen.

In **Teil IX „Partielle Differentialgleichungen“** betrachten wir nun sogenannte partielle Differentialgleichungen, bei denen es sich um Differentialgleichungen handelt, in denen die partiellen Ableitungen mehrerer Variablen, z.B. drei Raumvariablen und die Zeit, vorkommen. Beispiele für partielle Differentialgleichungen sind die Wärmeleitungsgleichung, die Wellengleichung und die Maxwell'schen Gleichungen. Wir werden die Grundlagen der allgemeinen Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen kennenlernen und einige der klassischen partiellen Differentialgleichungen als Beispiele untersuchen.

Was für mathematisches Wissen wird vorausgesetzt?

Die HM C baut ganz wesentlich auf die Inhalte der HM A und HM B auf. Wenn Sie bei den Inhalten der HM A oder HM B Defizite haben sollten, so müssen Sie diese unbedingt beheben. Aus der Schule werden ansonsten eine solide Beherrschung der Rechentechniken der Mittelstufe vorausgesetzt: Klammersetzung, Vorzeichenregeln, binomische Formeln, Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz, Bruchrechnung,

Wie sollte man dieses Skript verwenden, und wie sollte man für den Kurs lernen?

- **Kommen Sie immer zu den Vorlesungen und nehmen Sie aktiv an diesen teil:** Bringen Sie die Beamer-Folien in die Vorlesungen mit, und schreiben Sie die Beispiele mit, oder machen sie sich zumindest Notizen, damit Sie die Vorlesung nacharbeiten können. Wenn Sie das Skript dabei haben, dann können Sie dieses natürlich auch mit Anmerkungen versehen. Denken Sie mit, und versuchen Sie möglichst viel bereits in den Vorlesungen zu verstehen.
- **Lassen Sie sich in den Vorlesungen nicht durch Ihr Smartphone, Tablet oder Handy ablenken!** Nur wenn Sie sich ganz auf die Vorlesung konzentrieren, haben Sie eine Chance, die mathematischen Inhalte direkt in der Vorlesung zu verstehen.

- **Gehen Sie immer zu Ihrer Übungsgruppe und bearbeiten Sie die Präsenzübungen** (diese werden im Tutorium bearbeitet) und die **Hausübungen** (diese sollten Sie nach dem Tutorium zu Hause bearbeiten). Schauen Sie die Übungszettel **vor** dem Besuch der Übungsgruppe an, und versuchen Sie die Präsenzaufgaben bereits vor dem Besuch der Übungsgruppe zu rechnen, so dass Sie dort, wo Sie Probleme haben, konkret nachfragen können und von der Tutorin oder dem Tutor Hilfe bekommen. Der Umfang der Präsenzübungen ist manchmal so groß, dass Sie es in der Regel nicht schaffen können, alle Präsenzübungen in der 90-minütigen Übungsgruppe zu rechnen. Wenn Sie unvorbereitet in die Übungsgruppe kommen, ziehen Sie nur einen sehr geringen Nutzen aus Ihrer Übungsgruppe. **Mathematik lernt sich nur durch Übung, d.h. indem man die mathematischen Techniken für Beispiele und Übungsaufgaben anwendet.** Daher ist es unerlässlich, dass Sie die Übungsaufgaben bearbeiten.
- **Wenn Sie die Übungsaufgaben lösen, dann sollten Sie parallel dazu das zugehörige Material aus der Vorlesung nacharbeiten.** Dieses passiert ganz „natürlich“, denn die Übungsaufgaben sind so konzipiert, dass Sie mit ihnen den Vorlesungsstoff anwenden und üben. Das Nacharbeiten kann mit den Beamer-Folien und Ihren handschriftlichen Notizen und/oder diesem Skript erfolgen. Das Skript ist dabei wesentlich ausführlicher als die Folien und der Tafelanschrieb und somit als Ihre handschriftlichen Notizen. Im Skript finden Sie weitere und teilweise andere Beispiele und zusätzliche Erklärungen. Das Skript kann wie ein Lehrbuch verwendet werden.
- **Was machen Sie, wenn Sie etwas nicht verstehen?** Wichtig ist vor allem, zu wissen, dass dieses bei mathematischen Themen völlig normal ist und allen Studierenden hin und wieder passiert! Was können Sie tun, um das Problem zu beheben?
 - Geben Sie nicht auf, sondern befassen Sie sich weiter mit dem Material. Manche mathematischen Themen muss man mehrfach studieren, bis „der Groschen fällt“.
 - Fragen Sie Ihre Kommilitonen danach, und diskutieren Sie mit ihnen darüber.
 - Fragen Sie die Dozentin in den Vorlesungen oder die Tutorin bzw. den Tutor in den Übungen.
 - Schauen Sie die zu dem Material gehörigen Beispiele an: Mathematik lernt sich durch das Verständnis der Beispiele. Wenn Sie das Beispiel verstehen, dann wird die mathematische Technik klarer. Können Sie nun vielleicht ein ähnliches Beispiel selber durchrechnen? Wenn ja, dann sind Sie einen Schritt weiter gekommen.
 - Lesen Sie ein Thema, mit dem Sie Probleme haben, in einem Lehrbuch nach, um eine alternative Darstellung zu bekommen.

- Nutzen Sie die Gelegenheit, und trauen Sie sich, **in den Vorlesungen und in den Übungen Fragen zu stellen**. Es gibt keine dummen Fragen, sondern dumm ist nur, wenn man nicht fragt und ignorant bleibt. Die Vorlesungen und die Übungen sind dazu da, Sie beim Lernen zu unterstützen – also machen Sie von der Gelegenheit, Fragen zu stellen, Gebrauch.
- **Gruppenarbeit:** Gruppenarbeit ist nützlich und kann sehr produktiv sein. Übungsaufgaben sind oft leichter zu lösen, wenn verschiedene Personen ihre Ideen beisteuern. Indem Sie sich von anderen etwas erklären lassen, lernen Sie etwas dazu. Wenn Sie anderen etwas erklären, so lernen Sie auch etwas dazu und gewinnen größere Klarheit über das bereits verstandene Material. Wichtig ist aber, dass Sie nach der Gruppenarbeit nun auch in der Lage sind, ähnliche Aufgaben **eigenständig zu rechnen**, denn in der Klausur sind Sie auf sich alleine gestellt und haben keine Gruppe zur Hand.
- **Klausurvorbereitung:** Wenn Sie während des Semesters die Vorlesungen gut nachgearbeitet haben und die Übungsaufgaben erfolgreich gelöst haben, dann sind Sie bereits gut vorbereitet. Wiederholen Sie den Stoff noch einmal, rechnen Sie zu allen Themen passende Übungsaufgaben, und lernen Sie das nötige Wissen. (Es gibt in der Klausur keine Formelsammlung und keinen Taschenrechner!)

Zum Schluss noch eine **Warnung: Mathematische Themen bauen aufeinander auf!** Man kann sich als gutes Modell den Bau einer Mauer vorstellen. In der HM A legen Sie die ersten drei Reihen Ziegelsteine der Mauer, und in der HM B legen Sie die nächsten drei Reihen Ziegelsteine der Mauer, also die vierte bis sechste Reihe Ziegelsteine. Wo Sie Wissens- und Verständnislücken haben, fehlen Ziegelsteine. Die Mauer kann bereits hier lokal eingebrochen sein. Mit der HM C legen Sie die siebte bis neunte Reihe Ziegelsteine der Mauer. Wo bereits Lücken in den ersten sechs Reihen der Mauer sind, können die siebte bis neunte Reihe Ziegelsteine nicht stabil aufgelegt werden und brechen eventuell sogar ein. Erst wenn Sie Ihre Wissens- und Verständnislücken aus der HM A und HM B geschlossen haben, können Sie alle Inhalte der HM C richtig verstehen. Daher ist es ganz wichtig, dass Sie die Inhalte der HM A und HM B nicht vergessen; auch wenn Sie die zugehörige Klausur schon bestanden haben.

Ich freue mich sehr auf Ihre Teilnahme an der HM C!

Literaturverzeichnis

Bei der Erstellung der Skripten der Vorlesungen HM A, HM B und HM C wurde die unten aufgelistete Literatur verwendet. Nicht alle dieser Bücher sind als Literatur für die Vorlesungen HM A, HM B und HM C geeignet. Für konkrete Literaturempfehlungen zur der jeweiligen HM-Vorlesung konsultieren Sie bitte das jeweilige Kursdokument, welches in der ersten Vorlesung verteilt wurde und welches Sie jeweils in koaLA herunterladen können.

- [1] Herbert Amann, Joachim Escher: Analysis I. Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.
- [2] Herbert Amann, Joachim Escher: Analysis II. Basel: Birkhäuser Verlag, 2008.
- [3] Herbert Amann, Joachim Escher: Analysis III. Basel: Birkhäuser Verlag, 2009.
- [4] Bernd Aulbach: Gewöhnliche Differenzialgleichungen, 2. Auflage. München: Spektrum Akademischer Verlag, 2010.
- [5] Hans-Jochen Bartsch: Kleine Formelsammlung Mathematik, 5. aktualisierte Auflage. München: Fachbuchverlag Leipzig, 2011.
- [6] Ilja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew, Gerhard Musiol, Heiner Mühlig: Taschenbuch der Mathematik. Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel, 2016.
- [7] Klemens Burg, Herbert Haf, Friedrich Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure. Band I: Analysis, 10. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [8] Klemens Burg, Herbert Haf, Friedrich Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure. Band II: Lineare Algebra, 7. Auflage. Wiesbaden: Springer+Teubner Verlag, 2012.
- [9] Klemens Burg, Herbert Haf, Friedrich Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure. Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen, 6. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [10] Klemens Burg, Herbert Haf, Friedrich Wille, Andreas Meister: Vektoranalysis, 2. Auflage. Wiesbaden: Springer+Teubner Verlag, 2012.

-
- [11] Gerd Fischer: Lineare Algebra, 18. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2014.
- [12] Otto Forster: Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, 12. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.
- [13] Otto Forster: Analysis 2. Differentialrechnung in \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen, 10. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.
- [14] Peter Furlan: Das gelbe Rechenbuch: für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker; Rechenverfahren der höheren Mathematik in Einzelschritten erklärt; mit vielen ausführlich gerechneten Beispielen; Band 1: Lineare Algebra, Differentialrechnung. Dortmund: Furlan Verlag, 2006.
- [15] Peter Furlan: Das gelbe Rechenbuch: für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker; Rechenverfahren der höheren Mathematik in Einzelschritten erklärt; mit vielen ausführlich gerechneten Beispielen; Band 2: Integralrechnung, mehrdimensionale Differentialrechnung, mehrdimensionale Integralrechnung. Dortmund: Furlan Verlag, 2007.
- [16] Peter Furlan: Das gelbe Rechenbuch: für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker; Rechenverfahren der höheren Mathematik in Einzelschritten erklärt; mit vielen ausführlich gerechneten Beispielen; Band 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Integraltransformationen, partielle Differentialgleichungen. Dortmund: Furlan Verlag, 2012.
- [17] Karl-Heinz Goldhorn, Hans-Peter Heinz: Mathematik für Physiker 1, Grundlagen aus Analysis und Linearer Algebra, 1. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- [18] Karl-Heinz Goldhorn, Hans-Peter Heinz: Mathematik für Physiker 2, Funktionentheorie – Dynamik – Mannigfaltigkeiten – Variationsrechnung, 1. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- [19] Karl-Heinz Goldhorn, Hans-Peter Heinz: Mathematik für Physiker 3, Partielle Differentialgleichungen – Orthogonalreihen – Integraltransformationen, 1. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [20] Kerstin Hesse: MATH2120 – Mathematical Methods for Differential Equations, Outline Lecture Notes. Sydney: The University of New South Wales, 2006. (Das Copyright dieses Skripts liegt bei der University of New South Wales.)
- [21] Kerstin Hesse: Mathematik für Chemiker (Vorlesungsskript). Universität Paderborn, 2016.
- [22] Harro Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 17. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2009.

-
- [23] Harro Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2, 14. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008.
- [24] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider: Fundamentals of Differential Equations, 6. Auflage. Pearson Addison Wesley, 2004.
- [25] MATH2011 – Several Variable Calculus (Vorlesungsskript). Sydney: The University of New South Wales, 2003. (Das Copyright dieses Skripts liegt bei der University of New South Wales.)
- [26] Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1: Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung, 6. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [27] Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 2: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung, 4. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [28] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, 14. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014.
- [29] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, 14. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015.
- [30] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung, 7. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016.
- [31] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Anwendungsbeispiele, 7. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015.
- [32] Andrea Walther: Numerische Mathematik 1 (Vorlesungsskript). Universität Paderborn.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|------------|---|-----------|
| VII | Vektoranalysis | 1 |
| 18 | Kurvenintegrale | 3 |
| 18.1 | Wege im \mathbb{R}^n | 3 |
| 18.2 | Die Weglänge | 9 |
| 18.3 | Äquivalente Wege | 12 |
| 18.4 | Glatte Wege | 18 |
| 18.5 | Skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld | 27 |
| 18.6 | Skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld | 31 |
| 19 | Vektorfelder und Potentiale | 39 |
| 19.1 | Der Gradient | 39 |
| 19.2 | Konservative Vektorfelder und Potentiale | 43 |
| 19.3 | Kurvenintegrale über konservative Vektorfelder | 48 |
| 19.4 | Die Integrabilitätsbedingung | 56 |
| 19.5 | Integrabilitätskriterium für offene Kugeln und sternförmige Gebiete | 59 |
| 19.6 | Integrabilitätskriterium für offene Quader | 64 |
| 19.7 | Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals | 72 |
| 19.8 | Das Integrabilitätskriterium für einfach zusammenhängende Gebiete | 75 |
| 19.9 | Berechnung von Potentialen | 78 |
| 20 | Divergenz, Laplace-Operator und Rotation | 85 |
| 20.1 | Die Divergenz | 85 |
| 20.2 | Der Laplace-Operator | 88 |
| 20.3 | Spezialfall $n = 3$: Die Rotation | 90 |
| 20.4 | Die Integrabilitätsbedingung im Fall $n=3$ | 93 |
| 20.5 | Der Spezialfall $n = 3$: Wirbelfelder und Vektorpotentiale | 96 |

| | | |
|-------------|--|------------|
| 20.6 | Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme | 102 |
| 20.7 | Vektoranalysis in Polarkoordinaten | 112 |
| VIII | Integration in mehreren Variablen | 119 |
| 21 | Das mehrdimensionale Riemann-Integral | 121 |
| 21.1 | Integrale über Quader | 121 |
| 21.2 | Der Satz von Fubini | 128 |
| 21.3 | Integration über beliebige Mengen | 132 |
| 21.4 | Satz von Cavalieri und Integrale über Normalbereiche | 137 |
| 21.5 | Exkurs: Topologische Grundbegriffe | 149 |
| 21.6 | Jordansche Nullmengen | 159 |
| 21.7 | Die Transformationsformel | 168 |
| 21.8 | Ebene Polarkoordinaten | 172 |
| 21.9 | Zylinderkoordinaten | 178 |
| 21.10 | Kugelkoordinaten | 183 |
| 22 | Oberflächenintegrale | 189 |
| 22.1 | Definition von Flächenstücken | 189 |
| 22.2 | Tangentialvektoren und Einheitsnormalenvektoren | 196 |
| 22.3 | Flächeninhalt von Flächenstücken | 204 |
| 22.4 | Oberflächenintegral eines Skalarfeldes | 213 |
| 22.5 | Oberflächenintegral eines Vektorfeldes | 221 |
| 22.6 | Flächen | 233 |
| 23 | Integralsätze | 237 |
| 23.1 | Integralsätze in der Ebene | 239 |
| 23.2 | Der Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^3 | 252 |
| 23.3 | Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes | 262 |
| 23.4 | Der Integralsatz von Stokes | 266 |
| 23.5 | Anwendungen des Satzes von Stokes | 275 |
| IX | Partielle Differentialgleichungen | 281 |
| 24 | Einführung in partielle Differentialgleichungen | 283 |
| 24.1 | Definitionen und Beispiele | 283 |

| | |
|--|------------|
| 24.2 Lösen durch direkte Integration | 286 |
| 24.3 Lineare partielle Differentialgleichungen | 287 |
| 24.4 Separationsansatz | 291 |
| 24.5 Koordinatentransformation | 293 |
| 25 Partielle Differentialgleichungen mit Zusatzbedingungen | 295 |
| 25.1 Die Wärmeleitungsgleichung in einer Raumvariablen | 295 |
| 25.2 Die Wärmeleitungsgleichung in n Raumvariablen* | 302 |
| 25.3 Die Wellengleichung in einer Raumvariablen | 304 |
| 25.4 Die Wellengleichung in einer Raumvariablen: allgemeine Lösung . . | 309 |
| 25.5 Die Wellengleichung in n Raumvariablen* | 311 |

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

Teil VII

Vektoranalysis

KAPITEL 18

Kurvenintegrale

In diesem Teilkapitel lernen wir, wie man eine reellwertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. eine vektorwertige Funktion $\vec{\mathbf{F}} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, längs eines \mathcal{C}^1 -Weges $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$ integriert. Dabei verwenden wir die folgende bereits aus der HM A und HM B bekannte (aber hier zur Erinnerung noch einmal aufgeführte) Notation.

Notation 18.1. (Standardskalarprodukt und Standardnorm im \mathbb{R}^n)

Für die Vektoren

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

in \mathbb{R}^n schreiben wir:

- (1) $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} := \langle \vec{\mathbf{x}} | \vec{\mathbf{y}} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ (**Standardskalarprodukt**)
- (2) $|\vec{\mathbf{x}}| := \|\vec{\mathbf{x}}\| := \sqrt{\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (**Standardnorm**)

18.1 Wege im \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit einer Wiederholung der Definition eines \mathcal{C}^1 -Weges (siehe Kapitel 15 im Skript der HM B).

Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine **\mathcal{C}^1 -Funktion**, wenn die Ableitung $f' = \partial f$ bzw. $\vec{F}' = \partial \vec{F}$ auf ganz D existiert und stetig ist.

Definition 18.2. (\mathcal{C}^1 -Weg)

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall.

$$\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix},$$

heißt ein **\mathcal{C}^1 -Weg** in \mathbb{R}^n , wenn $\vec{\gamma}$ stetig differenzierbar ist, also wenn $\vec{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

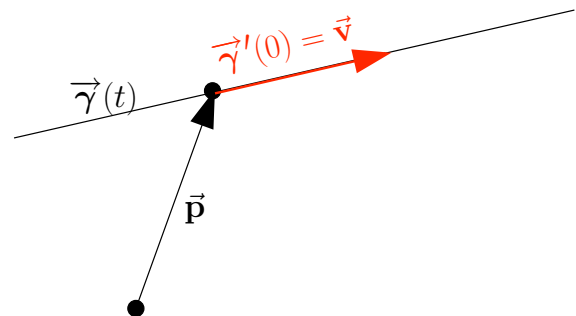
Betrachten wir einige Beispiele für \mathcal{C}^1 -Wege.

Beispiel 18.3. (\mathcal{C}^1 -Wege)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $I = [a, b]$. Der Weg

$$\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) := \vec{p} + t \vec{v},$$

durchläuft ein Stück der Geraden im \mathbb{R}^n mit Stützvektor \vec{p} und Richtungsvektor \vec{v} . $\vec{\gamma}$ ist ein \mathcal{C}^1 -Weg mit $\vec{\gamma}'(t) = \vec{v}$. Auf (dem Stück) der Geraden läuft man also mit dem konstanten Geschwindigkeitsvektor \vec{v} entlang.



(b) Der Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

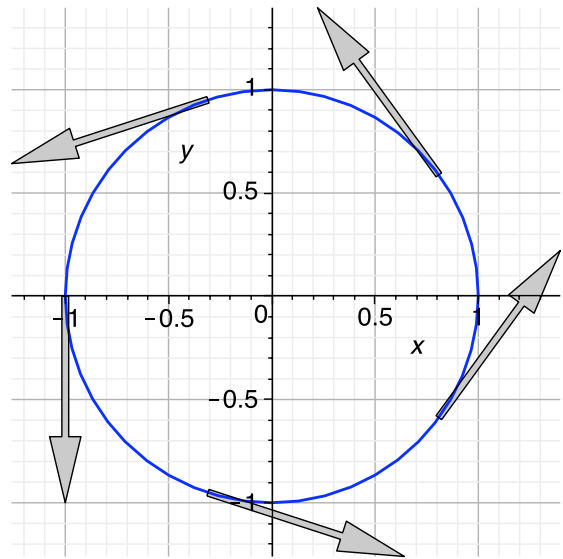
durchläuft die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius 1 genau einmal gegen den Uhrzeigersinn. Dabei starten wir im Punkt $(1, 0)$.

$\vec{\gamma}$ ist ein \mathcal{C}^1 -Weg mit

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{\gamma}'(t)$ ist immer tangential zur Kreislinie, zeigt in die Laufrichtung und hat den Betrag

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}'(t)| &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$



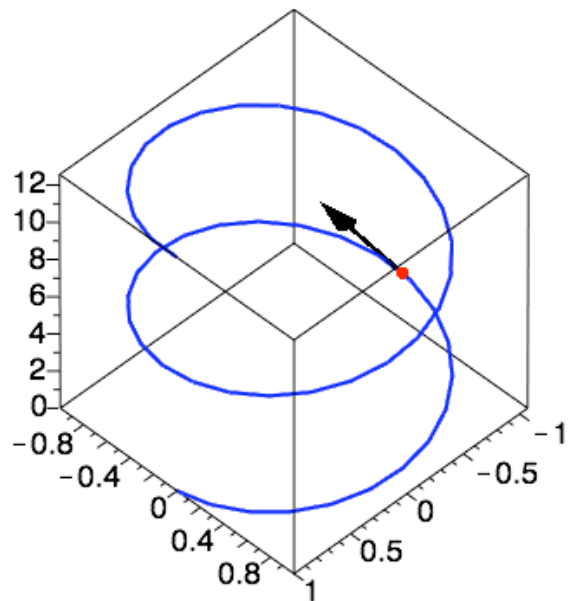
(c) Der Weg

$$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix},$$

beschreibt eine Schraubenlinie im \mathbb{R}^3 . Auch hier liegt ein \mathcal{C}^1 -Weg vor, denn die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

existiert und ist eine stetige Funktion auf \mathbb{R} .



In der nächsten Bemerkung halten wir die geometrische und die physikalische Interpretation der Ableitung eines \mathcal{C}^1 -Wegs fest.

Bemerkung 18.4. (geometrische und physikalische Interpretation der Ableitung eines \mathcal{C}^1 -Wegs)

- (1) **Geometrische Interpretation der Ableitung:** Sei $\vec{\gamma}$ ein \mathcal{C}^1 -Weg. $\vec{\gamma}'(t)$ kann man als **Tangentialvektor im Punkt $\vec{\gamma}(t)$** interpretieren.

Man denkt sich $\vec{\gamma}'(t)$ oft als Pfeil, der an den Punkt $\vec{\gamma}(t)$ angeheftet ist.

- (2) **Physikalische Interpretation der Ableitung:** Ist $\vec{\gamma}$ ein \mathcal{C}^1 -Weg, so kann man $\vec{\gamma}'(t)$ als **Geschwindigkeitsvektor** interpretieren. Da die Ableitung, also der Geschwindigkeitsvektor, stetig ist ändert sich die Geschwindigkeit kontinuierlich und nicht abrupt.

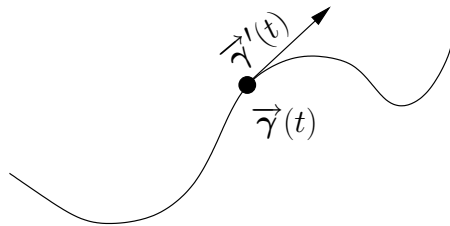


Abbildung 18.1: Veranschaulichung der Ableitung eines \mathcal{C}^1 -Wegs als Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor.

Die Menge der von einem \mathcal{C}^1 -Weg im \mathbb{R}^n durchlaufenen Punkte nennt man die „Spur (des \mathcal{C}^1 -Weges)“. Wir halten dieses als Definition fest.

Definition 18.5. (Spur eines \mathcal{C}^1 -Weges)

Seien $I = [a, b]$ und $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg. Die Menge

$$\text{Spur}(\vec{\gamma}) := \{ \vec{\gamma}(t) : t \in I \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt die **Spur** von $\vec{\gamma}$.

Betrachten wir auch hier einige Beispiele, um uns den Begriff der Spur eines \mathcal{C}^1 -Wegs klar zu machen.

Beispiel 18.6. (Spur eines \mathcal{C}^1 -Wegs)

- (a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) := \vec{p} + t \vec{v},$$

$$\vec{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\beta}(t) := \vec{p} + t^2 \vec{v},$$

sind verschieden, also $\vec{\gamma} \neq \vec{\beta}$, aber sie haben dieselbe Spur,

$$\text{Spur}(\vec{\gamma}) = \{ \vec{p} + t \vec{v} : t \in [0, 1] \} = \{ \vec{p} + t^2 \vec{v} : t \in [0, 1] \} = \text{Spur}(\vec{\beta}),$$

da t^2 für $t \in [0, 1]$ genau alle Werte aus $[0, 1]$ durchläuft.

(b) Die drei \mathcal{C}^1 -Wege

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\beta} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\beta}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\alpha} : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\alpha}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

sind verschieden (denn sie haben unterschiedliche Definitionsmengen), also $\vec{\gamma} \neq \vec{\beta}$, $\vec{\gamma} \neq \vec{\alpha}$ und $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, aber sie haben dieselbe Spur, genauer

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\vec{\alpha}) = \text{Spur}(\vec{\beta}) = \text{Spur}(\vec{\gamma}) &= \left\{ \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} : t \in [0, 2\pi] \right\} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}. \end{aligned}$$

Der Weg $\vec{\beta}$ durchläuft die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius 1 gegen den Uhrzeigersinn genau zweimal, wogegen der Weg $\vec{\gamma}$ die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius 1 genau einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Der Weg $\vec{\alpha}$ durchläuft diese Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn dagegen eineinhalb mal.

Betrachten wir die vier Beispiele von \mathcal{C}^1 -Wegen aus Beispiel 18.6, so sehen wir noch einen wichtigen Unterschied zwischen den verschiedenen Wegen. Bei den Wegen $\vec{\gamma}$ und $\vec{\beta}$ aus Beispiel 18.6 (b) sind der Anfangspunkt des Weges (also $\vec{\gamma}(0)$ bzw. $\vec{\beta}(0)$) und der Endpunkt des Weges (also $\vec{\gamma}(2\pi)$ bzw. $\vec{\beta}(4\pi)$) derselbe Punkt. Es handelt sich um sogenannte „geschlossene“ Wege. Bei dem Weg $\vec{\alpha}$ aus Beispiel 18.6 (b) und den beiden Wegen aus Beispiel 18.6 (a) ist dieses nicht der Fall.

Definition 18.7. (geschlossener \mathcal{C}^1 -Weg)

Ein \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, wenn $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$ gilt.

Betrachten wir auch hierzu noch einige Beispiele.

Beispiel 18.8. (geschlossene \mathcal{C}^1 -Wege)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) := \vec{p} + t \vec{v},$$

$$\vec{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\beta}(t) := \vec{p} + t^2 \vec{v},$$

sind nicht geschlossen, da gilt

$$\vec{\gamma}(0) = \vec{p} \neq \vec{\gamma}(1) = \vec{p} + \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\beta}(0) = \vec{p} \neq \vec{\beta}(1) = \vec{p} + \vec{v}.$$

(b) Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\beta} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\beta}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

sind geschlossen, denn es gilt

$$\vec{\gamma}(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{bmatrix} = \vec{\gamma}(2\pi), \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{\beta}(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(4\pi) \\ \sin(4\pi) \end{bmatrix} = \vec{\beta}(4\pi).$$

Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\alpha} : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\alpha}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

ist dagegen nicht geschlossen, denn es gilt

$$\vec{\alpha}(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(3\pi) \\ \sin(3\pi) \end{bmatrix} = \vec{\alpha}(3\pi).$$

(c) Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix},$$

ist nicht geschlossen, weil

$$\vec{\gamma}(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 8\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(8\pi) \\ \sin(8\pi) \\ 8\pi \end{bmatrix} = \vec{\gamma}(8\pi).$$

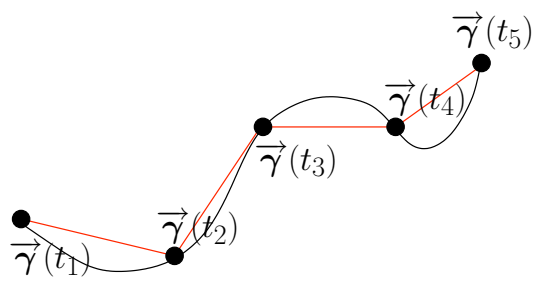
18.2 Die Weglänge

In diesem Teilkapitel lernen wir, wie man die Länge eines \mathcal{C}^1 -Weges berechnet. Dazu treffen wir zunächst die folgenden motivierenden Vorüberlegungen:

Sei $I = [0, 1]$ und $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg. Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in N gleiche Teile mit den Zwischenstellen

$$t_0 := 0, \quad t_1 := \frac{1}{N}, \quad t_2 := \frac{2}{N}, \quad \dots, \quad t_{N-1} := \frac{N-1}{N}, \quad t_N := \frac{N}{N} = 1,$$

wobei also die N gleich langen Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, betrachtet werden. Die Weglänge lässt sich angenähert durch die Länge des Streckenzuges von $\vec{\gamma}(t_0)$ über $\vec{\gamma}(t_1), \vec{\gamma}(t_2), \dots, \vec{\gamma}(t_{N-1})$ bis $\vec{\gamma}(t_N)$ annähern:

$$\begin{aligned} L_N &:= \sum_{k=1}^N |\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})|}{t_k - t_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^N \left| \frac{\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| \cdot (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$


Lässt man N gegen ∞ gehen, d.h. man macht die Teilintervalle immer schmäler mit dem Grenzwert 0 für die Teilintervalllänge, so erhält man die Weglänge als Integral

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^1 |\vec{\gamma}'(t)| dt$$

Definition 18.9. (Länge eines \mathcal{C}^1 -Weges)

Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg.

$$L(\vec{\gamma}) := \int_a^b |\vec{\gamma}'(t)| dt.$$

heißt die **Länge von $\vec{\gamma}$** .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 18.10. (Länge eines \mathcal{C}^1 -Wegs)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) := \vec{p} + t \vec{v},$$

hat die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \vec{v} \quad \implies \quad |\vec{\gamma}'(t)| = |\vec{v}|$$

und somit die Länge

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^1 |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_0^1 |\vec{v}| dt = \left[|\vec{v}| t \right]_{t=0}^{t=1} = |\vec{v}|.$$

In der Tat läuft man auf dem Weg $\vec{\gamma}$ auf der Gerade durch \vec{p} mit dem Richtungsvektor \vec{v} von \vec{p} bis $\vec{p} + \vec{v}$ eine Distanz von $|\vec{v}|$ ab.

(b) Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

hat die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad \implies \quad |\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1,$$

und somit die Länge

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^{2\pi} |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Dieses ist nicht überraschend, da die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius 1 einmal durchlaufen wurde, und diese Kreislinie die Länge 2π ($= 2\pi \cdot 1$ nach der Formel für den Kreisumfang).

(c) Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix},$$

hat die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies |\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

und somit die Länge

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^{8\pi} |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_0^{8\pi} \sqrt{2} dt = \left[\sqrt{2} t \right]_{t=0}^{t=8\pi} = 8\sqrt{2}\pi.$$

Betrachten wir nun die verschiedenen Wege aus den Beispielen 18.6 (a) und 18.8 (a), bzw. 18.6 (b) und 18.8 (b), die jeweils die gleiche Spur hatten aber unterschiedliche Wege waren. Wir werden sehen, dass hier sowohl gleiche wie unterschiedliche Weglängen auftreten können

Beispiel 18.11. (Länge und Spur eines \mathcal{C}^1 -Wegs)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{\gamma}(t) &:= \vec{p} + t \vec{v}, \\ \vec{\beta} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{\beta}(t) &:= \vec{p} + t^2 \vec{v}, \end{aligned}$$

aus Beispielen 18.6 (a) und 18.8 (a) sind verschieden, aber sie haben dieselbe Spur. Aus Beispiel 18.10 (a) wissen wir bereits, dass $L(\vec{\gamma}) = |\vec{v}|$ ist. Für $\vec{\beta}$ finden wir

$$\vec{\beta}'(t) = 2t \vec{v} \quad \implies \quad |\vec{\beta}'(t)| = |2t \vec{v}| = 2t |\vec{v}| \quad (\text{da } t \in [0, 1])$$

und somit

$$\begin{aligned} L(\vec{\beta}) &= \int_0^1 |\vec{\beta}'(t)| dt = \int_0^1 2t |\vec{v}| dt = |\vec{v}| \int_0^1 2t dt \\ &= |\vec{v}| \cdot \left[t^2 \right]_{t=0}^{t=1} = |\vec{v}| \cdot (1 - 0) = |\vec{v}|. \end{aligned}$$

Also gilt hier $L(\vec{\gamma}) = L(\vec{\beta})$.

(b) Die drei \mathcal{C}^1 -Wege

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\beta} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\beta}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\alpha} : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\alpha}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

aus Beispielen 18.6 (b) und 18.8 (b) sind verschieden, aber sie haben dieselbe Spur. Aus Beispiel 18.10 (b) wissen wir bereits, dass $L(\vec{\gamma}) = 2\pi$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{\beta}'(t) = \vec{\alpha}'(t) &= \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \\ \implies |\vec{\beta}'(t)| = |\vec{\alpha}'(t)| &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1, \end{aligned}$$

und somit sind die Weglängen

$$\begin{aligned} L(\vec{\beta}) &= \int_0^{4\pi} |\vec{\beta}'(t)| dt = \int_0^{4\pi} 1 dt = \left[t \right]_{t=0}^{t=4\pi} = 4\pi, \\ L(\vec{\alpha}) &= \int_0^{3\pi} |\vec{\alpha}'(t)| dt = \int_0^{3\pi} 1 dt = \left[t \right]_{t=0}^{t=3\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

Hier liegen also trotz gleicher Spur unterschiedliche Weglängen vor.

18.3 Äquivalente Wege

Wann kann man zwei \mathcal{C}^1 -Wege „identifizieren“? Es sollten zumindest die Weglänge und die Spur gleich sein, und die beiden Wege sollten in der „gleichen Richtung“ durchlaufen werden. Diese Idee führt uns zu dem Begriff äquivalenter Wege.

Definition 18.12. (äquivalente \mathcal{C}^1 -Wege)

Seien I und J kompakte Intervalle. Zwei \mathcal{C}^1 -Wege $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$\vec{\beta} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen **äquivalent**, wenn es eine **bijektive** \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : I \rightarrow J$ gibt mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in I$ und

$$\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\gamma}(t) \quad \text{für alle } t \in I. \quad (18.1)$$

Aus (18.1) folgt mit der \mathcal{C}^1 -Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : J \rightarrow I$ dann $\vec{\gamma}(\varphi^{-1}(s)) = \vec{\beta}(s)$ für alle $s \in J$.

Betrachten wir zunächst zwei Beispiele für äquivalente Wege.

Beispiel 18.13. (äquivalente \mathcal{C}^1 -Wege)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\begin{aligned} \vec{\beta} : [1, 4] &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{\beta}(t) &:= \vec{p} + t \vec{v}, \\ \vec{\gamma} : [1, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{\gamma}(t) &:= \vec{p} + t^2 \vec{v}, \end{aligned}$$

sind äquivalent, denn mit der bijektiven \mathcal{C}^1 -Abbildung $\varphi : [1, 2] \rightarrow [1, 4]$, $\varphi(t) := t^2$, gilt $\varphi'(t) = 2t > 0$ für alle $t \in [1, 2]$ und

$$\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\beta}(t^2) = \vec{p} + t^2 \vec{v} = \vec{\gamma}(t) \quad \text{für alle } t \in [1, 2].$$

(*Erklärung:* φ ist injektiv, da φ wegen $\varphi'(t) = 2t > 0$ für alle $t \in [1, 2]$ streng monoton ist. φ ist surjektiv, denn $\varphi([1, 2]) = [1, 4]$. Also ist φ bijektiv.)

Beide Wege haben die gleiche Spur

$$\text{Spur}(\vec{\beta}) = \{ \vec{p} + t \vec{v} : t \in [1, 4] \} = \{ \vec{p} + t^2 \vec{v} : t \in [1, 2] \} = \text{Spur}(\vec{\gamma}).$$

(b) Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\begin{aligned} \vec{\beta} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \vec{\beta}(t) &:= \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \\ \vec{\gamma} : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \vec{\gamma}(t) &:= \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sind äquivalent, denn die \mathcal{C}^1 -Abbildung $\varphi : [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$, $\varphi(t) := 2t$, ist bijektiv und erfüllt $\varphi'(t) = 2 > 0$ für alle $t \in [0, \pi]$ und

$$\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\beta}(2t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix} = \vec{\gamma}(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \pi].$$

(*Erklärung:* Dass $\varphi : [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$, $\varphi(t) = 2t$, bijektiv ist, sieht man wie folgt: Wegen $\varphi'(t) = 2 > 0$ ist die Funktion streng monoton wachsend und damit injektiv, und aus $\varphi([0, \pi]) = [0, 2\pi]$ folgt, dass φ auch surjektiv ist. Also ist φ bijektiv.)

Wir beobachten, dass beide Wege die gleiche Spur haben:

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\vec{\gamma}) = \text{Spur}(\vec{\beta}) &= \left\{ \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} : t \in [0, 2\pi] \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Die nächste Bemerkung hält einige wichtige Eigenschaften äquivalenter Wege fest.

Bemerkung 18.14. (Eigenschaften äquivalenter \mathcal{C}^1 -Wege)

Seien $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\vec{\beta} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ **äquivalente \mathcal{C}^1 -Wege**. Weiter sei $\varphi : I \rightarrow J$ eine bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in I$ und $\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in I$. Dann gelten:

- (1) Aus Definition 18.12 folgt, dass die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : J \rightarrow I$ ebenfalls stetig differenzierbar ist (siehe Satz 7.10 im Kapitel 7 im Skript der HM A) mit

$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} > 0 \quad \text{für alle } s \in J,$$

und durch Ersetzen von $\varphi(t) = s \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(s)$ in (18.1) folgt

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\gamma}(\varphi^{-1}(s)) \quad \text{für alle } s \in J.$$

Wir sehen also, dass **bei der Definition äquivalenter Wege die Rollen der beiden Wege austauschbar sind**.

- (2) Die **Spuren sind gleich**, also $\text{Spur}(\vec{\beta}) = \text{Spur}(\vec{\gamma})$.

Erklärung: Dieses folgt direkt aus $\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in I$ und der Bijektivität von φ . Genauer gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\vec{\gamma}) &= \{ \vec{\gamma}(t) : t \in I \} = \{ \vec{\beta}(\varphi(t)) : t \in I \} \\ &= \{ \vec{\beta}(s) : s \in J \} = \text{Spur}(\vec{\beta}). \end{aligned}$$

(3) $\vec{\gamma}$ ist **geschlossen**. \iff $\vec{\beta}$ ist **geschlossen**.

Erklärung: Seien $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$. Dann gilt mit der bijektiven \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : I \rightarrow J$, dass $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$. Aus $\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in I$ folgt dann insbesondere $\vec{\beta}(c) = \vec{\beta}(\varphi(a)) = \vec{\gamma}(a)$ und $\vec{\beta}(d) = \vec{\beta}(\varphi(b)) = \vec{\gamma}(b)$. Ist einer der beiden Wege geschlossen, so muss der andere also auch geschlossen sein.

(4) Die **Längen der beiden Wege sind gleich**, also $L(\vec{\beta}) = L(\vec{\gamma})$.

Erklärung: Seien $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$. Aus $\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in I$ folgt mit der Kettenregel

$$\vec{\beta}'(\varphi(t)) \varphi'(t) = \vec{\gamma}'(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Somit folgt

$$L(\vec{\gamma}) = \int_a^b |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b |\vec{\beta}'(\varphi(t)) \varphi'(t)| dt = \int_a^b |\vec{\beta}'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt,$$

wobei wir $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in I$ genutzt haben. Mit der Substitution

$$s = \varphi(t) \quad \implies \quad \frac{ds}{dt} = \varphi'(t) \quad \implies \quad ds = \varphi'(t) dt$$

folgt also mit den neuen Grenzen $c = \varphi(a)$ und $d = \varphi(b)$

$$L(\vec{\gamma}) = \int_a^b |\vec{\beta}'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt = \int_c^d |\vec{\beta}'(s)| ds = L(\vec{\beta}).$$

Also gilt in der Tat $L(\vec{\gamma}) = L(\vec{\beta})$.

(5) Identifiziert man alle zu einem gegebenen \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma}$ äquivalenten Wege, so spricht man von der **von $\vec{\gamma}$ erzeugten „Kurve“** $\Gamma = [\vec{\gamma}]$.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Beispiel 18.15. (nicht äquivalente \mathcal{C}^1 -Wege)

Die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\beta} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\beta}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

aus Beispielen 18.6 (b), 18.8 (b) und 18.11 (b) haben dieselbe Spur, aber es gilt für die Längen $L(\vec{\gamma}) = 2\pi \neq 4\pi = L(\vec{\beta})$. Also sind die beiden Wege nach Bemerkung 18.14 (4) nicht äquivalent, denn wären sie äquivalent, so müsste $L(\vec{\gamma}) = L(\vec{\beta})$ gelten.

Die nächste Bemerkung befasst sich mit der Situation, dass ein gegebener Weg in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Dieser Vorgang liefert einen neuen Weg.

Bemerkung 18.16. (Richtungswechsel)

Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg. Wir definieren

$$\vec{\gamma}_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}_-(t) := \vec{\gamma}(a + b - t).$$

Der Weg $\vec{\gamma}_-$ ist ebenfalls ein \mathcal{C}^1 -Weg und ist **der zu $\vec{\gamma}$ gehörende „Rückweg“**. Dann gelten:

(1) $\text{Spur}(\vec{\gamma}_-) = \text{Spur}(\vec{\gamma})$

Erklärung: Dieses ist anschaulich klar und folgt direkt aus der Definition von $\vec{\gamma}_-$.

(2) $\vec{\gamma}'_-(t) = -\vec{\gamma}'(a + b - t)$ für alle $t \in [a, b]$

Erklärung: Dieses folgt beim Differenzieren von $\vec{\gamma}_-$ mit Hilfe der Kettenregel.

(3) $L(\vec{\gamma}_-) = L(\vec{\gamma})$

Erklärung: Wir berechnen die Länge von $\vec{\gamma}_-$ und finden

$$\begin{aligned} L(\vec{\gamma}_-) &= \int_a^b |\vec{\gamma}'_-(t)| dt = \int_a^b |-\vec{\gamma}'(a + b - t)| dt \\ &= \int_a^b |\vec{\gamma}'(a + b - t)| dt. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $s = a + b - t$ und damit $ds = -dt$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} L(\vec{\gamma}_-) &= \int_a^b |\vec{\gamma}'(a + b - t)| dt = \int_{a+b-a}^{a+b-b} |\vec{\gamma}'(s)| (-1) ds \\ &= - \int_b^a |\vec{\gamma}'(s)| ds = \int_a^b |\vec{\gamma}'(s)| ds = L(\vec{\gamma}), \end{aligned}$$

d.h. $L(\vec{\gamma}_-) = L(\vec{\gamma})$.

- (4) Die beiden Wege $\vec{\gamma}_-$ und $\vec{\gamma}$ sind aber **nicht** äquivalent, denn die \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(t) := a + b - t$, ist zwar bijektiv und erfüllt

$$\vec{\gamma}_-(t) = \vec{\gamma}(a + b - t) = \vec{\gamma}(\varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

aber es gilt $\varphi'(t) = -1 < 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Betrachten wir auch zum Richtungswechsel eines Weges zwei Beispiele.

Beispiel 18.17. (Richtungswechsel eines \mathcal{C}^1 -Wegs)

- (a) Seien $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Der zum \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) := \vec{\mathbf{p}} + t \vec{\mathbf{v}},$$

gehörende „Rückweg“ ist

$$\vec{\gamma}_- : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}_-(t) := \vec{\gamma}(5 - t) = \vec{\mathbf{p}} + (5 - t) \vec{\mathbf{v}}.$$

- (b) Der zum \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\beta} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\beta}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

gehörende „Rückweg“ ist

$$\vec{\beta}_- : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\beta}_-(t) := \vec{\beta}(2\pi - t) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{bmatrix}.$$

18.4 Glatte Wege

Wir lernen nun sogenannte glatte Wege kennen. Dieses Konzept ist geometrisch motiviert.

Definition 18.18. (glatter \mathcal{C}^1 -Weg)

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Ein \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **glatt**, wenn gilt $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in I$.

Bevor wir Beispiele betrachten halten wir zwei Überlegungen zu glatten Wegen fest.

Bemerkung 18.19. (glatter \mathcal{C}^1 -Weg)

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall.

- (1) **Geometrische Anschauung:** Für einen \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bedeutet $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in I$, dass der Geschwindigkeitsvektor niemals der Nullvektor ist, d.h. läuft man den Weg ab, so kommt die Bewegung nie zum Stillstand.
- (2) $\vec{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist glatt genau dann, wenn wenn gilt $|\vec{\gamma}'(t)| \neq 0$ für alle $t \in I$.

Erklärung: $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in I$ ist äquivalent zu $|\vec{\gamma}'(t)| \neq 0$ für alle $t \in I$, denn ein Vektor \vec{v} ist genau dann der Nullvektor, wenn $|\vec{v}| = 0$ ist.

- (3) Ist $\vec{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ glatt und ist $\vec{\beta} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ äquivalent zu $\vec{\gamma}$, so ist auch $\vec{\beta}$ glatt.

Erklärung: Ist $\vec{\beta} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent zu $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, so gibt es eine bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : J \rightarrow I$ mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in J$ und $\vec{\beta}(t) = \vec{\gamma}(\varphi(t))$ für alle $t \in J$. Mit der Kettenregel folgt dann

$$\vec{\beta}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(\varphi(t)) = \underbrace{\vec{\gamma}'(\varphi(t))}_{\neq \vec{0}} \underbrace{\varphi'(t)}_{> 0} \neq \vec{0} \quad \text{für alle } t \in J.$$

Also ist der Weg $\vec{\beta}$ ebenfalls glatt.

Betrachten wir zwei Beispiele zu glatten Wegen.

Beispiel 18.20. (glatte \mathcal{C}^1 -Wege)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Betrachten wir die beiden \mathcal{C}^1 -Wege

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{\gamma}(t) &:= \vec{p} + t \vec{v}, \\ \vec{\beta} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{\beta}(t) &:= \vec{p} + t^2 \vec{v}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\vec{\gamma}'(t) = \vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{für alle } t \in [0, 1];$$

also ist $\vec{\gamma}$ ein glatter \mathcal{C}^1 -Weg. Andererseits gilt aber

$$\vec{\beta}'(t) = 2t \vec{v},$$

und für $t = 0$ gilt $\vec{\beta}'(0) = \vec{0}$. Also ist $\vec{\beta}$ kein glatter \mathcal{C}^1 -Weg.

(b) Der Weg

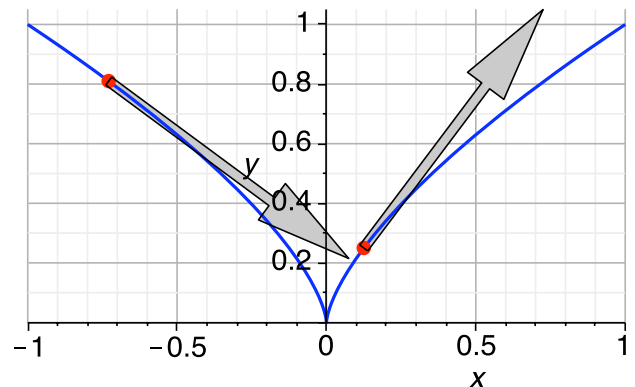
$$\vec{\gamma} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix},$$

hat die stetige Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

und ist somit ein \mathcal{C}^1 -Weg.

Wegen $\vec{\gamma}'(0) = \vec{0}$ ist der Weg nicht glatt. Das Bild der Spur des Wegs in der Abbildung zeigt, wo das Problem liegt. Im Nullpunkt $(0, 0)$ hat der Weg einen „Knick“.



Als Nächstes lernen wir den Begriff eines nach Bogenlänge parametrisierten Weges kennen.

Definition 18.21. (nach Bogenlänge parametrisierter \mathcal{C}^1 -Weg)

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Ein \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, falls gilt $|\vec{\gamma}'(t)| = 1$ für alle $t \in I$.

Bemerkung 18.22. (nach Bogenlänge parametrisierter \mathcal{C}^1 -Weg)

Seien $I = [a, b]$ und $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg.

(1) Ist $\vec{\gamma}$ nach Bogenlänge parametrisiert, so bedeutet dieses anschaulich, dass man mit der **betraglich einheitlichen Geschwindigkeit** mit Betrag $|\vec{\gamma}'(t)| = 1$ auf der Spur des Wegs entlang läuft.

(2) Ist $\vec{\gamma}$ nach Bogenlänge parametrisiert, so folgen

(i) $\vec{\gamma}$ ist glatt.

(ii) $L(\vec{\gamma}) = b - a$, denn:

$$L(\vec{\gamma}) = \int_a^b \underbrace{|\vec{\gamma}'(t)|}_{=1} dt = \int_a^b 1 dt = \left[t \right]_{t=a}^{t=b} = b - a$$

Betrachten wir einige Beispiele für nach Bogenlänge parametrisierte Wege.

Beispiel 18.23. (nach Bogenlänge parametrisierte \mathcal{C}^1 -Wege)

(a) Seien $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $I = [a, b]$. Für den \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}(t) := \vec{p} + t \vec{v},$$

gilt $\vec{\gamma}'(t) = \vec{v}$. Also ist $\vec{\gamma}$ genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt $|\vec{v}| = 1$.

(b) Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

hat die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Also gilt

$$|\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Also ist $\vec{\gamma}$ nach Bogenlänge parametrisiert.

(c) Der \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix},$$

beschreibt eine Schraubenlinie im \mathbb{R}^3 und hat die Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}'(t)| &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{für alle } t \in [0, 8\pi]. \end{aligned}$$

Somit ist $\vec{\gamma}$ **nicht** nach Bogenlänge parametrisiert.

Der zu $\vec{\gamma}$ äquivalente Weg

$$\vec{\beta} : [0, 8\sqrt{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\beta}(t) := \vec{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}t \end{bmatrix},$$

ist aber nach Bogenlänge parametrisiert, denn nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \vec{\beta}'(t) &= \vec{\gamma}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \implies |\vec{\beta}'(t)| &= \left| \vec{\gamma}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \underbrace{\left| \vec{\gamma}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \right|}_{=\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, 8\sqrt{2}\pi]$.

Was wir in Beispiel 18.23 (c) gesehen haben, funktioniert allgemein. Zu einem glatten \mathcal{C}^1 -Weg (also einem \mathcal{C}^1 -Weg mit Ableitung überall $\neq \vec{0}$) gibt es einen äquivalenten nach Bogenlänge parametrisierten Weg.

Hilfssatz 18.24. (zu $\vec{\gamma}$ äquivalenter nach Bogenlänge param. Weg)

Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glatter \mathcal{C}^1 -Weg. Dann existiert ein zu $\vec{\gamma}$ äquivalenter Weg, der nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis von Hilfssatz 18.24: Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der glatte \mathcal{C}^1 -Weg. Wir definieren

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(u) := \int_a^u |\vec{\gamma}'(t)| dt.$$

Die Funktion $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt die Länge des Weges $\vec{\gamma}$ eingeschränkt auf das Intervall $[a, u]$ an, d.h. wir laufen auf der Spur des Weges $\vec{\gamma}$ nur bis zum Punkt $\vec{\gamma}(u)$. Die Funktion s ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$s'(u) = |\vec{\gamma}'(u)| > 0 \quad \text{für alle } u \in [a, b]. \quad (18.2)$$

In (18.2) wissen wir, dass die Ableitung s' stetig und echt größer als Null ist, weil $\vec{\gamma}$ ein glatter \mathcal{C}^1 -Weg ist. Wegen (18.2) ist s streng monoton wachsend, und die Bildmenge ist $s([a, b]) = [0, L(\vec{\gamma})]$, da

$$s(a) := \int_a^a |\vec{\gamma}'(t)| dt = 0 \quad \text{und} \quad s(b) := \int_a^b |\vec{\gamma}'(t)| dt = L(\vec{\gamma}).$$

Daraus folgt, dass $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\vec{\gamma})]$ bijektiv ist, und die zugehörige Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, L(\vec{\gamma})] \rightarrow [a, b]$ existiert. Weiter ist s^{-1} ebenfalls stetig differenzierbar (vgl. Satz 7.10 im Kapitel 7 im Skript der HM A) mit der Ableitung

$$(s^{-1})'(t) = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} = \frac{1}{|\vec{\gamma}'(s^{-1}(t))|} > 0. \quad (18.3)$$

(*Erklärung:* Aus der Gleichung $s(s^{-1}(t)) = t$, welche die Beziehung einer Funktion s und ihrer Umkehrfunktion s^{-1} beschreibt, folgt durch Ableiten mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s(s^{-1}(t)) = \frac{d}{dt} t &\iff s'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t) = 1 \\ &\iff (s^{-1})'(t) = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} \neq 0. \end{aligned}$$

Für die Details siehe Satz 7.10 im Kapitel 7 des Skripts der HM A.)

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir nun den neuen Weg

$$\vec{\beta} : [0, L(\vec{\gamma})] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\beta}(t) := \vec{\gamma}(s^{-1}(t)).$$

Es folgt mit der Kettenregel und (18.3)

$$\vec{\beta}'(t) = \vec{\gamma}'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t) \stackrel{(18.3)}{=} \vec{\gamma}'(s^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{|\vec{\gamma}'(s^{-1}(t))|}.$$

Also folgt $|\vec{\beta}(t)| = 1$ für alle $t \in [0, L(\vec{\gamma})]$, d.h. $\vec{\beta}$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. (Der Weg $\vec{\beta}$ ist per Konstruktion zu $\vec{\gamma}$ äquivalent, denn es gilt

$\vec{\beta}(t) = \vec{\gamma}(s^{-1}(t))$ für alle $t \in [0, L(\vec{\gamma})]$ und $s^{-1} : [0, L(\vec{\gamma})] \rightarrow [a, b]$ ist eine bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung mit $(s^{-1})'(t) > 0$ für alle $t \in [0, L(\vec{\gamma})]$ wegen (18.3). \square

Wie findet man einen zu einem gegebenen Weg äquivalenten Weg, der nach Bogenlänge parametrisiert ist? Dieses verrät uns der Beweis von Hilfssatz 18.24, und wir halten dieses als Methode fest.

Methode 18.25. (Wie findet man einen äquivalenten nach Bogenlänge parametrisierten Weg?)

Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glatter \mathcal{C}^1 -Weg. Dann berechnen wir die bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion

$$s : [a, b] \rightarrow [0, L(\vec{\gamma})], \quad s(u) := \int_a^u |\vec{\gamma}'(t)| dt,$$

und bestimmen deren Umkehrfunktion

$$s^{-1} : [0, L(\vec{\gamma})] \rightarrow [a, b],$$

welche ebenfalls eine bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion ist. Per Konstruktion gilt für s und s^{-1} , dass $s'(u) > 0$ für alle $u \in [a, b]$ bzw. $(s^{-1})'(t) > 0$ für alle $t \in [0, L(\vec{\gamma})]$ ist. (Dieses folgt aus $s'(u) = |\vec{\gamma}'(u)| > 0$ für alle $u \in [a, b]$ mit Satz 7.10 im Kapitel 7 im Skript der HM A.) Der Weg

$$\vec{\beta} : [0, L(\vec{\gamma})] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\beta}(t) := \vec{\gamma}(s^{-1}(t)),$$

ist dann ein nach Bogenlänge parametrisierter glatter \mathcal{C}^1 -Weg und ist zu $\vec{\gamma}$ äquivalent.

Betrachten wir zwei Beispiele für die Berechnung eines äquivalenten nach Bogenlänge parametrisierten Weges.

Beispiel 18.26. (äquivalenter nach Bogenlänge parametrisierter Weg)

- (a) Betrachten wir zunächst noch einmal den in Beispiel 18.23 (c) nach Bogenlänge umparametrisierten Weg. Dort war der nicht nach Bogenlänge para-

metrisierte \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix},$$

mit der Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} \implies |\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{2}$$

gegeben. Wir finden nun

$$s(u) := \int_0^u |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_0^u \sqrt{2} dt = \left[\sqrt{2} t \right]_{t=0}^{t=u} = \sqrt{2} u,$$

und insbesondere $L(\vec{\gamma}) = s(8\pi) = 8\sqrt{2}\pi$, d.h. $s : [0, 8\pi] \rightarrow [0, 8\sqrt{2}\pi]$,
 $s(u) := \sqrt{2} u$. Wegen

$$t = s(u) = \sqrt{2} u \iff \frac{1}{\sqrt{2}} t = u \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}} t$$

ist die Umkehrfunktion

$$s^{-1} : [0, 8\sqrt{2}\pi] \rightarrow [0, 8\pi], \quad s^{-1}(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} t.$$

Also ist ein nach Bogenlänge umparametrisierter und zu $\vec{\gamma}$ äquivalenter glatter \mathcal{C}^1 -Weg gegeben durch

$$\vec{\beta} : [0, 8\sqrt{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\beta}(t) := \vec{\gamma}(s^{-1}(t)) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t\right) \\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} t \end{bmatrix}.$$

(b) Wir betrachten den glatten \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Da die beiden Komponentenfunktionen jeweils \mathcal{C}^1 -Funktionen sind, handelt es sich um einen \mathcal{C}^1 -Weg. Wir berechnen die Ableitung und finden

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Wegen $e^t \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [0, 3]$. Also handelt es sich auch wirklich um einen glatten \mathcal{C}^1 -Weg.

Als Vorbereitung zur Berechnung eines nach Kurvenlänge parametrisierten äquivalenten glatten \mathcal{C}^1 -Weges berechnen wir nun

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}'(t)| &= \left| \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(2e^{2t})^2 + (4e^{2t})^2} \\ &= \sqrt{4e^{4t} + 16e^{4t}} = \sqrt{20e^{4t}} = 2\sqrt{5}e^{2t}. \end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} s(u) &:= \int_0^u |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_0^u 2\sqrt{5}e^{2t} dt = \left[\sqrt{5}e^{2t} \right]_{t=0}^{t=u} \\ &= \sqrt{5}e^{2u} - \sqrt{5} = \sqrt{5}(e^{2u} - 1) \end{aligned}$$

und $L(\vec{\gamma}) = s(3) = \sqrt{5}(e^6 - 1)$. Also ist die gesuchte bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion

$$s : [0, 3] \rightarrow [0, \sqrt{5}(e^6 - 1)], \quad s(u) := \sqrt{5}(e^{2u} - 1).$$

Wir berechnen ihre Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} t = s(u) = \sqrt{5}(e^{2u} - 1) &\iff \frac{t}{\sqrt{5}} = e^{2u} - 1 \\ \iff \frac{1}{\sqrt{5}}t + 1 = e^{2u} &\iff \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{5}}t + 1 \right) = u \end{aligned}$$

Also ist die Umkehrfunktion

$$s^{-1} : [0, \sqrt{5}(e^6 - 1)] \rightarrow [0, 3], \quad s^{-1}(t) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{5}}t + 1 \right).$$

Ein nach Bogenlänge parametrisierter und zu $\vec{\gamma}$ äquivalenter glatter \mathcal{C}^1 -Weg ist somit

$$\begin{aligned} \vec{\beta} : [0, \sqrt{5}(e^6 - 1)] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{\beta}(t) := \vec{\gamma}(s^{-1}(t)) &= \begin{bmatrix} \exp \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{5}}t + 1 \right) \right) \\ 2 \exp \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{5}}t + 1 \right) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}t + 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}t + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Was passiert, wenn man einen Weg stückweise aus glatten \mathcal{C}^1 -Wegen „zusammensetzt“? Damit beschäftigt sich die nächste Definition.

Definition 18.27. (stückweise glatter (stetiger) Weg)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$. Wir schreiben $I_1 = [t_0, t_1]$, $I_2 = [t_1, t_2]$, \dots , $I_m = [t_{m-1}, t_m]$. Falls die glatten \mathcal{C}^1 -Wege $\vec{\gamma}_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, die „Anschlussbedingungen“

$$\vec{\gamma}_k(t_k) = \vec{\gamma}_{k+1}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

erfüllen, dann ist durch

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{cases} \vec{\gamma}_1(t) & \text{für } t \in I_1, \\ \vec{\gamma}_2(t) & \text{für } t \in I_2, \\ \vdots & \\ \vec{\gamma}_m(t) & \text{für } t \in I_m, \end{cases}$$

ein **stetiger** Weg $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert.

Schreibweise: $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \oplus \vec{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\gamma}_m$.

Es gilt: $L(\vec{\gamma}) = L(\vec{\gamma}_1) + L(\vec{\gamma}_2) + \dots + L(\vec{\gamma}_m)$.

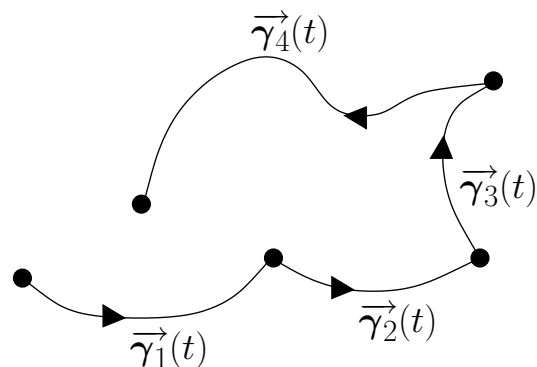
Im Allgemeinen ist $\vec{\gamma}$ nicht glatt. Da die Teilwege $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_m$ alle als glatt vorausgesetzt sind, sagt man, $\vec{\gamma}$ ist **stückweise glatt**.

Bemerkung 18.28. (stückweiser \mathcal{C}^1 -Weg)

Lässt man in Definition 18.27 die Voraussetzung, dass die Wege $\vec{\gamma}_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, glatt sind, weg und fordert nur, dass $\vec{\gamma}_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, \mathcal{C}^1 -Wege sind und die „Anschlussbedingungen“ erfüllen, so nennen wir

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \oplus \vec{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\gamma}_m$$

einen **stückweisen \mathcal{C}^1 -Weg**.



Betrachten wir ein Beispiel für einen stückweise glatten \mathcal{C}^1 -Weg.

Beispiel 18.29. (stückweise glatter Weg)

Sei $\vec{\gamma} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{cases} \vec{\gamma}_1(t) & \text{für } t \in [0, 1], \\ \vec{\gamma}_2(t) & \text{für } t \in [1, 2], \\ \vec{\gamma}_3(t) & \text{für } t \in [2, 3], \end{cases}$$

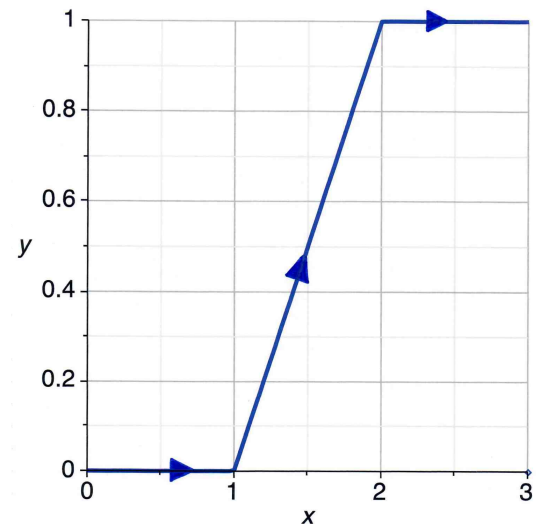
mit

$$\vec{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_1(t) := \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_2(t) := \begin{bmatrix} t \\ t - 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_3 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_3(t) := \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der Weg $\vec{\gamma}$ ist nebenan visualisiert.



Dann ist $\vec{\gamma}$ ein stückweise glatter \mathcal{C}^1 -Weg, denn es gilt

$$\vec{\gamma}_1'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\gamma}_2'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\gamma}_3'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d.h. $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ und $\vec{\gamma}_3$ sind jeweils glatte \mathcal{C}^1 -Wege, und die „Anschlussbedingungen“

$$\vec{\gamma}_1(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{\gamma}_2(1) \quad \text{und} \quad \vec{\gamma}_2(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\gamma}_3(2)$$

sind erfüllt.

18.5 Skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld

Nun wollen wir skalarwertige (d.h. reellwertige) Funktionen längs einer Kurve integrieren.

Definition 18.30. (skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $D \neq \emptyset$. Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg mit $\text{Spur}(\vec{\gamma}) \subseteq D$.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. (Man sagt auch, f sei ein **stetiges Skalarfeld** in D .)

Wir definieren

$$\int_{\vec{\gamma}} f \, ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) |\vec{\gamma}'(t)| \, dt. \quad (18.4)$$

(Wir sprechen von einem **skalaren Kurvenintegral über ein Skalarfeld**.)

Warum reicht es nicht über $f(\vec{\gamma}(t))$ (also ohne die Multiplikation mit $|\vec{\gamma}'(t)|$) zu integrieren?

Dieses kann man sich so erklären: Die betragliche Geschwindigkeit $|\vec{\gamma}'(t)|$ muss berücksichtigt werden, denn wird dieselbe Kurve schneller durchlaufen, so sollte das skalare Kurvenintegral denselben Wert haben. Wir werden weiter unten sehen, dass der Wert des skalaren Kurvenintegrals über ein Skalarfeld für alle äquivalenten \mathcal{C}^1 -Wege derselbe ist.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 18.31. (skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld)

Wir betrachten das stetige Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := x_1^2$ und den \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Nach Beispiel 18.23 (b) ist dieser \mathcal{C}^1 -Weg nach Bogenlänge parametrisiert, also $|\vec{\gamma}'(t)| = 1$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{\gamma}(t)) \underbrace{|\vec{\gamma}'(t)|}_{=1} \, dt = \int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) \, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \pi + \frac{1}{4} \sin(4\pi) - \left[0 + \frac{1}{4} \sin(0) \right] = \pi, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile $\cos^2(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t))$ genutzt haben. Dieses folgt aus

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2 \cos^2(t) - 1.$$

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, halten wir zunächst einige Überlegungen zum skalaren Kurvenintegral über ein Skalarfeld in einer Bemerkung fest.

Bemerkung 18.32. (skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld)

Seien die Voraussetzungen und die Notation wie in Definition 18.30.

- (1) Der Spezialfall $f(\vec{x}) = 1$ für alle $\vec{x} \in D$ ergibt

$$\int_{\vec{\gamma}} f \, ds = \int_a^b \underbrace{f(\vec{\gamma}(t))}_{=1} |\vec{\gamma}'(t)| \, dt = \int_a^b |\vec{\gamma}'(t)| \, dt = L(\vec{\gamma}).$$

- (2) Ist $\vec{\gamma}$ nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} f \, ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \underbrace{|\vec{\gamma}'(t)|}_{=1} \, dt = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \, dt.$$

- (3) Ist $\vec{\beta}$ äquivalent zu $\vec{\gamma}$, so gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} f \, ds = \int_{\vec{\beta}} f \, ds$$

Dieses rechnet man analog zu Bemerkung 18.14 (4) nach. Wir zeigen dieses auf einen Übungszettel.

Ein skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld hängt also **nur von der Kurve** $\Gamma = [\vec{\gamma}]$ ab (siehe Bemerkung 18.14 (5) für den Begriff „Kurve“), **nicht aber von dem konkreten Weg** $\vec{\gamma}$, der bei der Berechnung des Integrals verwendet wurde. Daher ist der Begriff „Kurvenintegral“ sinnvoll.

- (4) Für den zu $\vec{\gamma}$ gehörenden Rückweg $\vec{\gamma}_-$ gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} f \, ds = \int_{\vec{\gamma}_-} f \, ds.$$

Dieses zeigt man analog zu Bemerkung 18.16 (3), und wir rechnen dieses auf einem Übungszettel nach.

- (5) Ist $\vec{\gamma}$ nur **stückweise ein \mathcal{C}^1 -Weg**, also $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \oplus \vec{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\gamma}_m$ für \mathcal{C}^1 -Wege $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_m$, dann definieren wir

$$\int_{\vec{\gamma}} f \, ds := \sum_{k=1}^m \int_{\vec{\gamma}_k} f \, ds.$$

Betrachten wir ein weiteres Beispiel für ein skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld.

Beispiel 18.33. (skalares Kurvenintegral über ein Skalarfeld längs eines stückweise glatten Weges)

Wir betrachten das stetige Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ und den stückweise glatten Weg aus Beispiel 18.29.

$$\vec{\gamma} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{cases} \vec{\gamma}_1(t) & \text{für } t \in [0, 1], \\ \vec{\gamma}_2(t) & \text{für } t \in [1, 2], \\ \vec{\gamma}_3(t) & \text{für } t \in [2, 3], \end{cases}$$

mit

$$\vec{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_1(t) := \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_2(t) := \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_3 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_3(t) := \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\vec{\gamma}_1'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies |\vec{\gamma}_1'(t)| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\vec{\gamma}_2'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies |\vec{\gamma}_2'(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\vec{\gamma}_3'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies |\vec{\gamma}_3'(t)| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Also finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}_1} f \, ds &= \int_0^1 f(\vec{\gamma}_1(t)) |\vec{\gamma}_1'(t)| \, dt = \int_0^1 e^{t+0} \cdot 1 \, dt = \int_0^1 e^t \, dt \\ &= \left[e^t \right]_{t=0}^{t=1} = e^1 - e^0 = e - 1, \end{aligned}$$

$$\int_{\vec{\gamma}_2} f \, ds = \int_1^2 f(\vec{\gamma}_2(t)) |\vec{\gamma}_2'(t)| \, dt = \int_1^2 e^{t+t-1} \cdot \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} e^{-1} \int_1^2 e^{2t} \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} e^{-1} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{t=1}^{t=2} = \sqrt{2} e^{-1} \left[\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^3 - e), \\
\int_{\vec{\gamma}_3} f \, ds &= \int_2^3 f(\vec{\gamma}_3(t)) |\vec{\gamma}_3'(t)| \, dt = \int_2^3 e^{t+1} \cdot 1 \, dt = e \int_2^3 e^t \, dt = e \left[e^t \right]_{t=2}^{t=3} \\
&= e [e^3 - e^2] = e^4 - e^3.
\end{aligned}$$

Damit ist das skalare Kurvenintegral über f

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\gamma}} f \, ds &= \int_{\vec{\gamma}_1} f \, ds + \int_{\vec{\gamma}_2} f \, ds + \int_{\vec{\gamma}_3} f \, ds \\
&= (e - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (e^3 - e) + (e^4 - e^3) \\
&= e^4 + \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^3 + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} e - 1.
\end{aligned}$$

18.6 Skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld

Wir lernen nun, wie man über ein Vektorfeld längs einer Kurve integrieren kann. Entgegen der Erwartung passiert dieses nicht komponentenweise sondern mit Hilfe des Skalarprodukts. Nach der Definition geben wir eine anschauliche Erklärung, warum das Kurvenintegral über ein Vektorfeld so definiert ist.

Definition 18.34. (skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $D \neq \emptyset$. Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Weg mit $\text{Spur}(\vec{\gamma}) \subseteq D$.

Sei

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig. (Man sagt auch $\vec{\mathbf{F}}$ sei ein **stetiges Vektorfeld** in D .) Wir definieren

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt,$$

wobei $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$ das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t))$ und $\vec{\gamma}'(t)$ ist. (Wie sprechen von einem **skalaren Kurvenintegral über ein Vektorfeld**.)

Zunächst machen wir uns darüber Gedanken, warum in Definition 18.34 ein Skalarprodukt vorkommt.

Bemerkung 18.35. (skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld)

Mit dem skalaren Kurvenintegral über ein Vektorfeld wollen wir ein Vektorfeld längs eines Weges integrieren. Dabei sollte **nur die „Komponente“ des Vektorfeldes in Richtung des Wegs $\vec{\gamma}(t)$, also in Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{\gamma}'(t)$ des Wegs**, eine Rolle spielen. Diese Komponente ist aber

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|} & \text{wenn } \vec{\gamma}'(t) \neq \vec{\mathbf{0}} \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } \vec{\gamma}'(t) = \vec{\mathbf{0}} \text{ ist.} \end{cases}$$

Wie in Definition 18.30 multiplizieren wir nun noch mit dem Betrag der Geschwindigkeit und erhalten

$$\left. \begin{aligned} & \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|} \cdot |\vec{\gamma}'(t)| \\ & = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t), \\ & 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{wenn } \vec{\gamma}'(t) \neq \vec{\mathbf{0}} \\ & \text{wenn } \vec{\gamma}'(t) = \vec{\mathbf{0}} \end{aligned} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t).$$

Ist $\vec{\gamma}$ glatt (d.h. $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ für alle $t \in [a, b]$), so gilt also

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \left(\vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|} \right) |\vec{\gamma}'(t)| dt.$$

Betrachten wir nun zunächst ein Beispiel und eine Anwendung aus der Elektrotechnik.

Beispiel 18.36. (skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld)

Wir betrachten den geschlossenen glatten \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

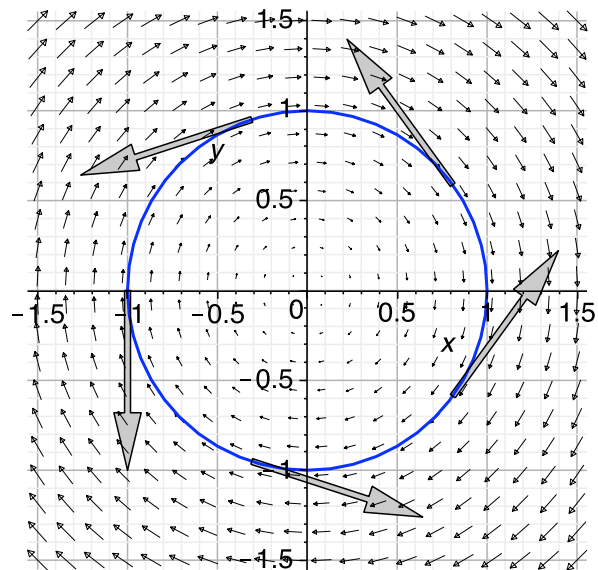
mit der Ableitung

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix},$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}.$$

Also gilt



$$\begin{aligned} \oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos(t), \sin(t)) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin^2(t) - \cos^2(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) dt = \left[-t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = -2\pi + 0 = -2\pi. \end{aligned}$$

Das Integralzeichen \oint mit dem Kreis durch das Integral wird verwendet, wenn wir längs eines **geschlossenen Weges integrieren**, wie dieses in Beispiel 18.36 der Fall ist. Sie können aber genauso ein „normales“ Integralzeichen \int verwenden. Das Integralzeichen \oint betont lediglich, dass es sich um einen geschlossenen Weg handelt; an der Berechnung ändert sich nichts.

Physikalische Anwendung 18.37. (Arbeit längs eines Weges)

Sei \vec{E} ein elektrisches Feld (als Funktion des dreidimensionalen Raumes). Für die Bewegung einer Punktladung Q längs eines Weges $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ muss in dem

elektrischen Feld $\vec{\mathbf{E}}$ die folgende Arbeit aufgewendet werden

$$W = \int_{\vec{\gamma}} Q \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{d}s} = \int_a^b Q \vec{\mathbf{E}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt.$$

(Im GET A Skript steht stattdessen

$$W = \int_A^B Q \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}.$$

Dabei ist $A = \vec{\gamma}(a)$ der Startpunkt von $\vec{\gamma}$ und $B = \vec{\gamma}(b)$ der Zielpunkt von $\vec{\gamma}$. Dieses drückt aus, dass es in dem elektrischen Feld egal ist, welchen Weg man von A nach B zurücklegt, also, dass die Arbeit für die Bewegung der Punktladung von A nach B immer die gleiche ist, egal, auf welchem Weg die Punktladung von A nach B gebracht wird. Wir lernen in Kapitel 19 unter welchen Voraussetzungen an das Vektorfeld dieses richtig ist.)

Wir halten einige wichtige Eigenschaften des skalaren Kurvenintegrals über ein Vektorfeld fest.

Bemerkung 18.38. (skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld)

Seien die Voraussetzungen und die Notation wie in Definition 18.34.

(1) Ist $\vec{\beta} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent zu $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int_{\vec{\beta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}s} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}s}.$$

Also ist das skalare Kurvenintegral über ein Vektorfeld nur von der „Kurve“ $\Gamma = [\vec{\gamma}]$ abhängig und die Bezeichnung „Kurvenintegral“ macht Sinn.

Erklärung: Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ und $\vec{\beta}(\varphi(t)) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Dann gilt mit der Kettenregel

$$\vec{\gamma}'(t) = \vec{\beta}'(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

und somit durch Ersetzen

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}s} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt$$

$$= \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\beta}(\varphi(t))) \cdot \vec{\beta}'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Mit der Substitution

$$u = \varphi(t), \quad \frac{du}{dt} = \varphi'(t) \quad \iff \quad du = \varphi'(t) dt$$

folgt mit den neuen Grenzen $c = \varphi(a)$ und $d = \varphi(b)$

$$\int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\beta}(\varphi(t))) \cdot \vec{\beta}'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_c^d \vec{\mathbf{F}}(\vec{\beta}(u)) \cdot \vec{\beta}'(u) du = \int_{\vec{\beta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\vec{s}.$$

In der Tat ist also das Kurvenintegral über ein Vektorfeld für äquivalente \mathcal{C}^1 -Wege dasselbe.

- (2) Für den **Rückweg** $\vec{\gamma}_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\gamma}_-(t) := \vec{\gamma}(a + b - t)$, von $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\vec{\gamma}_-} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\vec{s} = - \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\vec{s}.$$

Erklärung: Wir haben mit der Kettenregel $\vec{\gamma}_-'(t) = -\vec{\gamma}'(a + b - t)$ und somit

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}_-} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\vec{s} &= \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_-(t)) \cdot \vec{\gamma}_-'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(a + b - t)) \cdot (-\vec{\gamma}'(a + b - t)) dt \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = a + b - t$, $du/dt = -1 \iff -du = dt$ mit den neuen Grenzen $u(a) = b$ und $u(b) = a$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}_-} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\vec{s} &= \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(a + b - t)) \cdot (-\vec{\gamma}'(a + b - t)) dt \\ &= \int_b^a \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(u)) \cdot (-\vec{\gamma}'(u)) (-1) du \\ &= \int_b^a \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(u)) \cdot \vec{\gamma}'(u) du \\ &= - \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(u)) \cdot \vec{\gamma}'(u) du, \end{aligned}$$

wobei wir das Minus-Zeichen im letzten Schritt durch das Vertauschen der Integralgrenzen bekommen.

- (3) Ist $\vec{\gamma}$ ein **geschlossener Weg**, so schreibt man auch

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad \text{statt} \quad \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Wir haben dieses bereits in Beispiel 18.36 gesehen.

- (4) Ist $\vec{\gamma}$ nur ein **stückweiser \mathcal{C}^1 -Weg**, also $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \oplus \vec{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\gamma}_m$ für \mathcal{C}^1 -Wege $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_m$, so definieren wir

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} := \sum_{k=1}^m \int_{\vec{\gamma}_k} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

- (5) In manchen Büchern findet man auch die folgende Schreibweise

$$\int_{\vec{\gamma}} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n) := \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Dabei kann die syntaktisch notwendige Klammer links auch durchaus fehlen.

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel.

Beispiel 18.39. (skalares Kurvenintegral über ein Vektorfeld längs eines stückweise glatten Weges)

Wir betrachten das stetige Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1-x_2} \end{bmatrix},$$

und den stückweise glatten Weg aus Beispiel 18.29

$$\vec{\gamma} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{cases} \vec{\gamma}_1(t) & \text{für } t \in [0, 1], \\ \vec{\gamma}_2(t) & \text{für } t \in [1, 2], \\ \vec{\gamma}_3(t) & \text{für } t \in [2, 3], \end{cases}$$

mit

$$\vec{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_1(t) := \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_1'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_2(t) := \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_2'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_3 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_3(t) := \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_3'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Also finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_0^1 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \vec{\gamma}_1'(t) dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{t+0} \\ e^{t-0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 e^t dt \\ &= \left[e^t \right]_{t=0}^{t=1} = e^1 - e^0 = e - 1, \end{aligned}$$

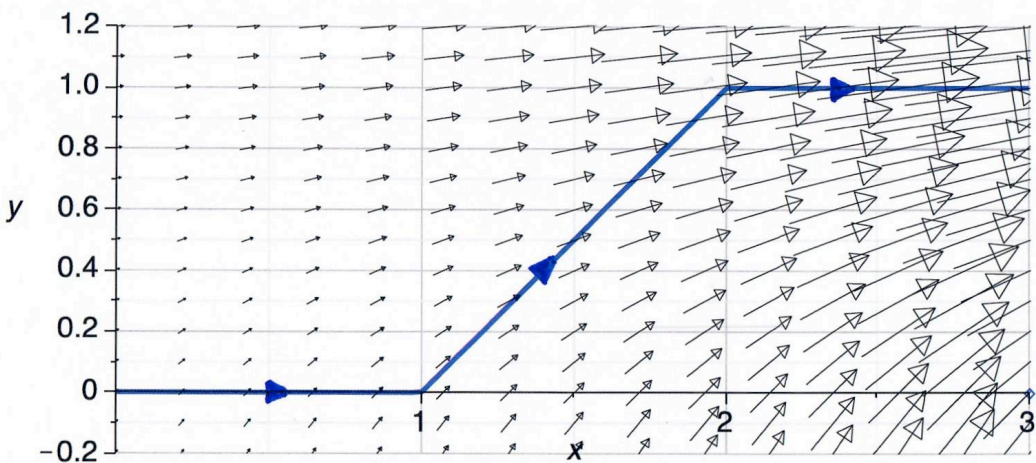
$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_1^2 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_2(t)) \cdot \vec{\gamma}_2'(t) dt = \int_1^2 \begin{bmatrix} e^{t+(t-1)} \\ e^{t-(t-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_1^2 (e^{2t-1} + e) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2t-1} + et \right]_{t=1}^{t=2} = \left[\frac{1}{2} e^3 + 2e \right] - \left[\frac{1}{2} e + e \right] = \frac{1}{2} (e^3 + e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}_3} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_2^3 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_3(t)) \cdot \vec{\gamma}_3'(t) dt = \int_2^3 \begin{bmatrix} e^{t+1} \\ e^{t-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_2^3 e^{t+1} dt = \left[e^{t+1} \right]_{t=2}^{t=3} = e^4 - e^3. \end{aligned}$$

Damit ist das skalare Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_{\vec{\gamma}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} + \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} + \int_{\vec{\gamma}_3} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} \\ &= (e - 1) + \frac{1}{2} (e^3 + e) + (e^4 - e^3) = e^4 - \frac{1}{2} e^3 + \frac{3}{2} e - 1. \end{aligned}$$

Die Spur des Weges und das Vektorfeld sind unten gezeichnet. Man sieht an der Ausrichtung des Vektorfeldes und der Laufrichtung der Kurve, dass das Kurvenintegral einen positiven Wert haben muss.



Vektorfelder und Potentiale

In diesem Kapitel interessieren wir uns für Vektorfelder und insbesondere für solche, die der Gradient eines Potentials sind, sogenannte „Gradientenfelder“ oder „konservative“ Vektorfelder. Aus der Physik und Elektrotechnik bekannte konservative Felder sind das Gravitationsfeld und das elektrische Feld. Wir werden sehen, dass solche Felder wunderbare Eigenschaften haben: Ein Kurvenintegral über ein konservatives Vektorfeld hängt nicht von dem zurückgelegten Weg ab, sondern nur vom Anfangspunkt und Zielpunkt des Weges. Physikalisch gesprochen: In dem Feld verrichtete Arbeit bei der Bewegung einer Masse in Gravitationsfeld bzw. einer Ladung im elektrischen Feld ist nicht vom Weg sondern nur von dem Startpunkt und Zielpunkt abhängig.

Wir benutzen die bereits in der HM B eingeführten Notationen und Bezeichnungen weiter. Studierende, die nicht an der zugehörigen HM A bzw. HM B Vorlesung teilgenommen haben, seien bei Unklarheiten auf die zur Verfügung gestellten Skripten dieser Vorlesungen verwiesen.

19.1 Der Gradient

Zur Erinnerung sei kurz die Notation der partiellen Ableitungen und der Ableitung noch einmal eingeführt: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $\vec{\mathbf{a}} \in \Omega$ partiell differenzierbare Funktion, so bezeichnen wir für $i = 1, 2, \dots, n$

$$(\partial_i f)(\vec{\mathbf{a}}) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\mathbf{a}})$$

die **partielle Ableitung von f nach der i -ten Variablen** im Punkt $\vec{x} = \vec{a}$. Die **Jacobi-Matrix** in $\vec{x} = \vec{a}$ ist die Matrix der partiellen Ableitungen in $\vec{x} = \vec{a}$, also

$$(\mathbf{J}f)(\vec{a}) = [(\partial_1 f)(\vec{a}) \quad (\partial_2 f)(\vec{a}) \quad \cdots \quad (\partial_n f)(\vec{a})].$$

Ist f nicht nur partiell differenzierbar in $\vec{x} = \vec{a}$ sondern sogar **(total) differenzierbar in Ω** , so ist

$$f'(\vec{x}) := (\partial f)(\vec{x}) := (\mathbf{J}f)(\vec{x}) = [(\partial_1 f)(\vec{x}) \quad (\partial_2 f)(\vec{x}) \quad \cdots \quad (\partial_n f)(\vec{x})]$$

die **Ableitung von f** . Wir haben gelernt, dass aus der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen die (totale) Differenzierbarkeit folgt.

Zunächst führen wir den Gradienten ein.

Definition 19.1. (Gradient)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (total) differenzierbar in $\vec{a} \in \Omega$.

$$(\nabla f)(\vec{a}) := (\text{grad} f)(\vec{a}) := \begin{bmatrix} (\partial_1 f)(\vec{a}) \\ (\partial_2 f)(\vec{a}) \\ \vdots \\ (\partial_n f)(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

heißt der **Gradient von f in \vec{a}** .

Bevor wir einige Beispiele betrachten, halten wir noch einige wichtige Beobachtungen über den Gradienten fest.

Bemerkung 19.2. (Eigenschaften des Gradienten)

- (1) Der Gradient ist nur für (total) differenzierbare **Skalarfelder** definiert.
- (2) Es gilt

$$(\nabla f)(\vec{a}) = ((\partial f)(\vec{a}))^T = ((\mathbf{J}f)(\vec{a}))^T,$$

d.h. der Gradient ∇f ist die **Transponierte der Ableitung** von f .

(3) Für $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} ((\nabla f)(\vec{a})) \cdot \vec{v} &= \begin{bmatrix} (\partial_1 f)(\vec{a}) \\ (\partial_2 f)(\vec{a}) \\ \vdots \\ (\partial_n f)(\vec{a}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= (\partial_1 f)(\vec{a}) v_1 + (\partial_2 f)(\vec{a}) v_2 + \dots + (\partial_n f)(\vec{a}) v_n \\ &= (\partial f)(\vec{a}) \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Ist $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, so ist

$$((\nabla f)(\vec{a})) \cdot \vec{v} = (\partial f)(\vec{a}) \cdot \vec{v} = (D_{\vec{v}} f)(\vec{a}),$$

d.h. es liegt die **Richtungsableitung von f in \vec{a} in Richtung \vec{v}** vor.

(4) Ist f in ganz Ω (total) differenzierbar, so ist $\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld**.

Betrachten wir nun einige Beispiele.

Beispiel 19.3. (Gradient)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$. Dann ist der Gradient

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ x^2 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2 y^2 \end{bmatrix}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sin(x^2 + 2y - z^3)$. Dann ist der Gradient

$$(\nabla f)(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x \cos(x^2 + 2y - z^3) \\ 2 \cos(x^2 + 2y - z^3) \\ -3z^2 \cos(x^2 + 2y - z^3) \end{bmatrix}.$$

(c) Sei $h :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\vec{x}) := h(|\vec{x}|) = h\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right).$$

Dann gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} (\partial_i f)(\vec{x}) &= h'(|\vec{x}|) \cdot \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i \\ &= h'(|\vec{x}|) \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = h'(|\vec{x}|) \frac{x_i}{|\vec{x}|}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, d.h. der Gradient ist

$$(\nabla f)(\vec{x}) = \begin{bmatrix} h'(|\vec{x}|) \frac{x_1}{|\vec{x}|} \\ \vdots \\ h'(|\vec{x}|) \frac{x_n}{|\vec{x}|} \end{bmatrix} = \frac{h'(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{h'(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \vec{x} = h'(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Die nächste Bemerkung befasst sich mit der geometrischen Bedeutung des Gradienten.

Bemerkung 19.4. (geometrische Bedeutung des Gradienten)

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 19.1. Ist $(\nabla f)(\vec{a}) \neq \vec{0}$, so zeigt $(\nabla f)(\vec{a})$ in die **Richtung des „steilsten Anstiegs“** von f .

Genauer: Ist $(\nabla f)(\vec{a}) \neq \vec{0}$ und

$$\vec{u} := \frac{1}{|(\nabla f)(\vec{a})|} (\nabla f)(\vec{a}),$$

so gilt

$$\max_{|\vec{v}|=1} (D_{\vec{v}} f)(\vec{a}) = (D_{\vec{u}} f)(\vec{a}).$$

Erklärung: Es gilt

$$\begin{aligned} (D_{\vec{u}} f)(\vec{a}) &= (\nabla f)(\vec{a}) \cdot \vec{u} = (\nabla f)(\vec{a}) \cdot \frac{1}{|(\nabla f)(\vec{a})|} (\nabla f)(\vec{a}) \\ &= \frac{|(\nabla f)(\vec{a})|^2}{|(\nabla f)(\vec{a})|} = |(\nabla f)(\vec{a})|. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für \vec{v} mit $|\vec{v}| = 1$

$$(D_{\vec{v}} f)(\vec{a}) = (\nabla f)(\vec{a}) \cdot \vec{v} \leq |(\nabla f)(\vec{a}) \cdot \vec{v}| \leq |(\nabla f)(\vec{a})| \cdot |\vec{v}|$$

$$= |(\nabla f)(\vec{\mathbf{a}})| = (D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}).$$

Da $|\vec{\mathbf{u}}| = 1$ ist folgt

$$\max_{|\vec{\mathbf{v}}|=1} (D_{\vec{\mathbf{v}}}f)(\vec{\mathbf{a}}) = (D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{a}}).$$

Zuletzt halten wir die Rechenregeln für den Gradienten fest, welche direkt aus den Rechenregeln für Ableitungen aus der HM B (siehe Teilkapitel 16.3 und 16.4 des Kapitels 16 des Skripts der HM B) folgen.

Satz 19.5. (Rechenregeln für den Gradienten)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (total) differenzierbar in $\vec{\mathbf{a}} \in \Omega$.
Dann gelten:

- (1) $(\nabla(f + g))(\vec{\mathbf{a}}) = (\nabla f)(\vec{\mathbf{a}}) + (\nabla g)(\vec{\mathbf{a}}).$
- (2) $(\nabla(\alpha f))(\vec{\mathbf{a}}) = \alpha (\nabla f)(\vec{\mathbf{a}})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}.$
- (3) $(\nabla(f \cdot g))(\vec{\mathbf{a}}) = g(\vec{\mathbf{a}}) (\nabla f)(\vec{\mathbf{a}}) + f(\vec{\mathbf{a}}) (\nabla g)(\vec{\mathbf{a}}).$

19.2 Konservative Vektorfelder und Potentiale

Wir kommen nun zu dem Begriff eines sogenannten „Gradientenfeldes“ oder „konservativen Vektorfeldes“.

Definition 19.6. (Gradientenfeld/konservatives Vektorfeld)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ** (oder ein **Gradientenfeld**) in Ω , wenn es ein (total) differenzierbares Skalarfeld $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) = (\nabla\Phi)(\vec{\mathbf{x}}) \quad \text{für alle } \vec{\mathbf{x}} \in \Omega.$$

Φ heißt dann ein (skalares) **Potential** von $\vec{\mathbf{F}}$ (oder eine **Stammfunktion** von $\vec{\mathbf{F}}$).

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 19.7. (Gradientenfeld/konservatives Vektorfeld)

Sei $\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ konstant, d.h. $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{c}}$ für einen (festen) Vektor $\vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in \mathbb{R}^n mit dem Potential

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\vec{\mathbf{x}}) := \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

denn

$$(\nabla\Phi)(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) \quad \text{für alle } \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir bemerken, dass allerdings auch

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(\vec{\mathbf{x}}) := \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{x}} + 17 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + 17,$$

ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist. Der Nachweis ist analog.

Was wir im vorigen Beispiel bereits beobachtet haben, gilt allgemein.

Bemerkung 19.8. (Potential eines Gradientenfelds ist nicht eindeutig bestimmt)

Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 19.6. Ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ (also ein Gradientenfeld) in Ω , dann ist Φ **nicht eindeutig bestimmt**. Genauer: Ist Φ ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$, so ist jedes $\Psi := \Phi + c$ mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$.

Unsere nächsten beiden Beispiele befassen sich mit sogenannten „Zentralfeldern“.

Beispiel 19.9. (Zentralfeld)

Sei $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ und

$$\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) := \frac{g(|\vec{\mathbf{x}}|)}{|\vec{\mathbf{x}}|} \vec{\mathbf{x}} = g(|\vec{\mathbf{x}}|) \frac{\vec{\mathbf{x}}}{|\vec{\mathbf{x}}|}.$$

Ist $h :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von g (d.h. $h'(t) = g(t)$ für alle $t \in]0, \infty[$) und

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\vec{\mathbf{x}}) := h(|\vec{\mathbf{x}}|),$$

so gilt nach Beispiel 19.3 (c), dass

$$(\nabla\Phi)(\vec{x}) = \frac{h'(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \vec{x} = \frac{g(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x}).$$

Also ist \vec{F} konservativ in Ω , und Φ ist ein Potential von \vec{F} . Wir nennen das konservative Vektorfeld \vec{F} auch ein **Zentralfeld**, weil das Potential Φ (und alle anderen Potentiale von \vec{F}) nur von $|\vec{x}|$, also vom Abstand zum Nullpunkt, abhängt.

Ein wichtiger Spezialfall ist das Newtonsche (oder auch Coulombsche) Potential.

Beispiel 19.10. (Newtonsches Potential und Coulombsches Potential)

Sei $n \geq 2$, $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $K \in \mathbb{R}$ und

$$\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{F}(\vec{x}) := \frac{K}{|\vec{x}|^n} \vec{x}.$$

Nach Beispiel 19.9 ist \vec{F} dann ein Zentralfeld mit

$$g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(r) := \frac{K}{r^{n-1}}.$$

Wir finden

$$h(r) = \int g(r) dr = \int \frac{K}{r^{n-1}} dr = \begin{cases} K \ln(r) + c & \text{wenn } n = 2, \\ \frac{K}{2-n} r^{2-n} + c & \text{wenn } n \geq 3. \end{cases}$$

Also ist ein Potential von \vec{F} gegeben durch

$$\Phi(\vec{x}) := \begin{cases} K \ln(|\vec{x}|) & \text{wenn } n = 2, \\ \frac{K}{2-n} |\vec{x}|^{2-n} & \text{wenn } n \geq 3. \end{cases}$$

Dieses Potential Φ heißt **Newtonsches Potential** oder **Coulombsches Potential**. Für $n = 3$ mit einer passenden Konstanten K handelt es sich hierbei um das Newtonsche Potential bzw. das Coulombsche Potential, welches Sie aus der Physik kennen.

Das nächste Beispiel zeigt, wie man untersuchen kann, ob ein Vektorfeld konservativ ist oder nicht. Dabei wird gleichzeitig ein Potential berechnet.

Beispiel 19.11. (Berechnung eines Potentials)

(a) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} y + \cos(x) \\ x - \sin(y) \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Falls $\vec{\mathbf{F}}$ in \mathbb{R}^2 ein Potential Φ besitzt, so muss für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gelten:

$$(\nabla\Phi)(x, y) = \vec{\mathbf{F}}(x, y) \iff \begin{cases} (\partial_1\Phi)(x, y) = F_1(x, y) = y + \cos(x) & \text{(I)} \\ (\partial_2\Phi)(x, y) = F_2(x, y) = x - \sin(y) & \text{(II)} \end{cases}$$

Aus (I) folgt durch unbestimmte Integration bzgl. x :

$$\Phi(x, y) = \int (y + \cos(x)) \, dx = xy + \sin(x) + c(y), \quad (19.1)$$

wobei die Integrationskonstante $c = c(y)$ im Allgemeinen von y (aber nicht von x) abhängt. Partielles Ableiten von (19.1) nach y ergibt

$$(\partial_2\Phi)(x, y) = x + c'(y).$$

Wir vergleichen mit (II) und erhalten

$$c'(y) = -\sin(y), \quad \text{also} \quad c(y) = \cos(y) + d$$

mit einer Konstante $d \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (19.1) ergibt, dass

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) = xy + \sin(x) + \cos(y) + d,$$

für jedes $d \in \mathbb{R}$ ein Kandidat für ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist. Partielles Ableiten von Φ nach x bzw. y bestätigt, dass dies tatsächlich so ist. Also ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in \mathbb{R}^2 .

(b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} y + \cos(y) \\ x - \sin(x) \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Falls $\vec{\mathbf{F}}$ in \mathbb{R}^2 ein Potential Φ besitzt, so muss für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gelten:

$$(\nabla\Phi)(x, y) = \vec{\mathbf{F}}(x, y) \iff \begin{cases} (\partial_1\Phi)(x, y) = F_1(x, y) = y + \cos(y) & \text{(I)} \\ (\partial_2\Phi)(x, y) = F_2(x, y) = x - \sin(x) & \text{(II)} \end{cases}$$

Aus (I) folgt durch unbestimmte Integration bzgl. x :

$$\Phi(x, y) = \int (y + \cos(y)) \, dx = xy + x \cos(y) + c(y), \quad (19.2)$$

wobei die Integrationskonstante $c = c(y)$ im Allgemeinen von y (aber nicht von x) abhängt. Partielles Ableiten von (19.2) nach y ergibt

$$(\partial_2 \Phi)(x, y) = x - x \sin(y) + c'(y).$$

Ein Vergleich mit (II) liefert

$$x - x \sin(y) + c'(y) = x - \sin(x) \iff c'(y) = -\sin(x) + x \sin(y).$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn die rechte Seite dieser Gleichung hängt von x und y ab, die linke aber nur von y .

Also kann $\vec{\mathbf{F}}$ in \mathbb{R}^2 kein Potential besitzen, d.h. $\vec{\mathbf{F}}$ ist in \mathbb{R}^2 nicht konservativ.

(c) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} \\ x^3 e^{xy} \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Falls $\vec{\mathbf{F}}$ in \mathbb{R}^2 ein Potential Φ besitzt, so muss für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gelten:

$$(\nabla \Phi)(x, y) = \vec{\mathbf{F}}(x, y) \iff \begin{cases} (\partial_1 \Phi)(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} & \text{(I)} \\ (\partial_2 \Phi)(x, y) = x^3 e^{xy} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aus (II) folgt durch unbestimmte Integration bzgl. y :

$$\Phi(x, y) = \int x^3 e^{xy} dy = x^2 e^{xy} + c(x), \quad (19.3)$$

wobei die Integrationskonstante $c = c(x)$ im Allgemeinen von x (aber nicht von y) abhängt. Partielles Ableiten von (19.3) nach x ergibt

$$(\partial_1 \Phi)(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} + c'(x).$$

Ein Vergleich mit (I) liefert:

$$\begin{aligned} 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} + c'(x) &= 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} \\ \iff c'(x) = 0 &\iff c(x) = d \end{aligned}$$

mit einer Konstante $d \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (19.3) ergibt, dass

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) = x^2 e^{xy} + d,$$

für jedes $d \in \mathbb{R}$ ein Kandidat für ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist. Partielles Ableiten von Φ nach x bzw. y bestätigt, dass dies tatsächlich so ist. Also ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in \mathbb{R}^2 .

Wir haben in diesem Beispiel (II) verwendet und unbestimmt nach y integriert. Natürlich hätte man im Prinzip genauso gut (I) unbestimmt nach x integrieren können, also

$$\Phi(x, y) = \int (2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}) dx,$$

aber es ist deutlich anspruchsvoller dieses Integral zu berechnen! – Man sollte sich also gut überlegen, mit welcher der Gleichungen aus $\nabla\Phi = \vec{\mathbf{F}}$ man beginnen will, wenn man versucht ein Potential zu berechnen.

19.3 Kurvenintegrale über konservative Vektorfelder

Was passiert, wenn man ein Kurvenintegral über ein konservatives Vektorfeld berechnet? Der nächste Satz zeigt, dass man das Kurvenintegral dann sehr einfach mit Hilfe des Potentials berechnen kann.

Satz 19.12. (Kurvenintegral über ein konservatives Vektorfeld)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges, *in* Ω *konservatives* Vektorfeld mit einem C^1 -Potential $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, also $\vec{\mathbf{F}} = \nabla\Phi$ auf Ω . Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein C^1 -Weg. Dann gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)).$$

Beweis von Satz 19.12: Es gilt $\nabla\Phi = \vec{\mathbf{F}}$, also

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_a^b (\nabla\Phi)(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_a^b (\Phi \circ \vec{\gamma})'(t) dt = \left[(\Phi \circ \vec{\gamma})(t) \right]_{t=a}^{t=b} = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)), \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die Kettenregel genutzt haben:

$$(\nabla\Phi)(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = (\mathbf{J}\Phi)^T(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = (\mathbf{J}\Phi)(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) = (\Phi \circ \vec{\gamma})'(t),$$

wobei das Produkt im vorletzten Schritt das Matrizenprodukt ist. \square

Bemerkung 19.13. (Verallgemeinerung von Satz 19.12)

Satz 19.12 gilt auch, wenn man statt eines \mathcal{C}^1 -Wegs einen stückweisen \mathcal{C}^1 -Weg betrachtet.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 19.14. (Kurvenintegral über ein konservatives Vektorfeld)

- (a) Sei $\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ konstant, d.h. $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) := \vec{\mathbf{c}}$ für einen (festen) Vektor $\vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in \mathbb{R}^n mit dem Potential $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$. Also gilt für jeden \mathcal{C}^1 -Weg

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)) \\ &= \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\gamma}(b) - \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\gamma}(a) = \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\gamma}(b) - \vec{\gamma}(a)). \end{aligned}$$

- (b) Seien $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ und

$$\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) := \frac{g(|\vec{\mathbf{x}}|)}{|\vec{\mathbf{x}}|} \vec{\mathbf{x}}.$$

das Zentralfeld aus Beispiel 19.9. Mit einer Stammfunktion $h :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ von g ist $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(\vec{\mathbf{x}}) := h(|\vec{\mathbf{x}}|)$, ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ (vgl. Beispiele 19.9 und 19.3 (c)). Also gilt für jeden \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma}$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)) = h(|\vec{\gamma}(b)|) - h(|\vec{\gamma}(a)|).$$

Wir halten einige wichtige Folgerungen aus Satz 19.12 fest.

Folgerung 19.15. (aus Satz 19.12)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, das **konservativ in Ω** ist mit einem \mathcal{C}^1 -Potential Φ . Dann gelten:

(1) Ist $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein **geschlossener** (stückweiser) \mathcal{C}^1 -Weg, so gilt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = 0.$$

(2) Sind $\vec{\gamma}$ und $\vec{\beta}$ zwei (stückweise) \mathcal{C}^1 -Wege in Ω von $\vec{\mathbf{a}}$ nach $\vec{\mathbf{b}}$, so gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \int_{\vec{\beta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s}.$$

Wir zeigen die einfachen Beweise der Folgerungen.

Beweis von Folgerung 19.15:

(1) Da $\vec{\gamma}$ geschlossen ist, gilt $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$. Da \mathbf{F} konservativ in Ω ist, folgt mit Satz 19.12

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)) = 0.$$

(2) Da $\vec{\gamma}(a) = \vec{\beta}(a) = \vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\gamma}(b) = \vec{\beta}(b) = \vec{\mathbf{b}}$ folgt die Behauptung durch zweifache Anwendung von Satz 19.12:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)) = \Phi(\vec{\beta}(b)) - \Phi(\vec{\beta}(a)) = \int_{\vec{\beta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s}.$$

Damit sind beide Folgerungen bewiesen. □

Betrachten wir ein Beispiel für die Anwendung von Folgerung 19.15 (1).

Beispiel 19.16. (Anwendung von Folgerung 19.15 (1))

Aus Beispiel 18.36 wissen wir, dass für den glatten geschlossenen \mathcal{C}^1 -Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -2\pi \neq 0.$$

Daher kann \vec{F} nach Folgerung 19.15 (1) in \mathbb{R}^2 nicht konservativ sein.

Die nachfolgende Definition ist uns bereits in Kapitel 16 (siehe Definition 16.48) der HM B begegnet. Zur Erinnerung ist sie hier noch einmal aufgeführt.

Definition 19.17. (Gebiet)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \neq \emptyset$. Ω ist ein **Gebiet**, wenn Ω offen ist und wenn es für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \Omega$ einen \mathcal{C}^1 -Weg in Ω gibt, der von \vec{a} nach \vec{b} führt.

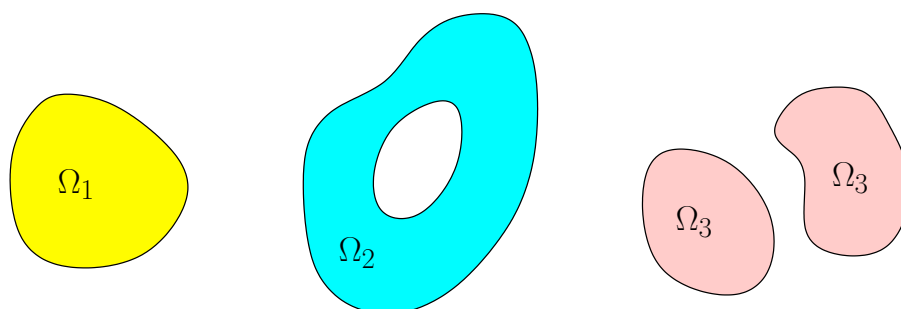


Abbildung 19.1: Bei allen drei Mengen Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 gehöre der Rand nicht mit zur Menge, so dass die Mengen offen sind. Ω_1 und Ω_2 sind jeweils ein Gebiet. Ω_3 ist dagegen kein Gebiet.

Die Bilder in Abbildung 19.1 illustrieren den Unterschied zwischen offenen Mengen, die Gebiete sind, und offenen Mengen, die keine Gebiete sind.

Mit dem Begriff eines Gebiets können wir einen ersten nützlichen Satz über Potentiale eines konservativen Vektorfeldes formulieren.

Satz 19.18. (Potentiale auf Gebiet unterscheiden sich nur um Konst.)

Zwei Potentiale eines konservativen Vektorfeldes **auf einem Gebiet** unterscheiden sich höchstens um eine Konstante.

Beweis von Satz 19.18: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ konservativ mit Potentialen Φ und Ψ , d.h. $\vec{\mathbf{F}} = \nabla\Phi = \nabla\Psi$ auf Ω .

Seien $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}} \in \Omega$ zwei beliebige Punkte in Ω , und sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein \mathcal{C}^1 -Weg mit $\vec{\gamma}(a) = \vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\gamma}(b) = \vec{\mathbf{b}}$. (Ein \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma}$ mit diesen Eigenschaften existiert, weil Ω ein Gebiet ist.) Da $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ ist, mit den Potentialen Φ und Ψ gilt nach Satz 19.12, dass

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{b}}) - \Phi(\vec{\mathbf{a}}) &= \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)) = \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= \Psi(\vec{\gamma}(b)) - \Psi(\vec{\gamma}(a)) = \Psi(\vec{\mathbf{b}}) - \Psi(\vec{\mathbf{a}}). \end{aligned}$$

Also ist

$$\Phi(\vec{\mathbf{b}}) - \Phi(\vec{\mathbf{a}}) = \Psi(\vec{\mathbf{b}}) - \Psi(\vec{\mathbf{a}}) \quad \iff \quad \Phi(\vec{\mathbf{b}}) - \Psi(\vec{\mathbf{b}}) = \Phi(\vec{\mathbf{a}}) - \Psi(\vec{\mathbf{a}}).$$

Da $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \Omega$ beliebig gewählt waren, ist damit gezeigt, dass $\Phi - \Psi$ auf Ω konstant ist. \square

Nun lernen wir den Hauptsatz für Kurvenintegrale kennen.

Satz 19.19. (Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **Gebiet**, und sei

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld. Dann sind **äquivalent**:

(i) \vec{F} ist konservativ in Ω .

(ii) Für alle geschlossenen stückweisen \mathcal{C}^1 -Wege $\vec{\gamma}$ in Ω gilt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0.$$

Wir beweisen diesen zentralen Satz.

Beweis von (i) \implies (ii) in Satz 19.19: Dieses ist die Aussage von Folgerung 19.15 (1). \square

Beweis von (ii) \implies (i) in Satz 19.19: Sei $\vec{p} \in \Omega$ fest gewählt. Zu jedem $\vec{z} \in \Omega$ wählen wir einen \mathcal{C}^1 -Weg $\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}$ in Ω von \vec{p} nach \vec{z} und definieren

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\vec{z}) := \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds}. \quad (19.4)$$

Φ ist unabhängig von dem gewählten \mathcal{C}^1 -Weg $\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}$, denn für einen anderen \mathcal{C}^1 -Weg $\overrightarrow{\beta_{\vec{p}, \vec{z}}}$ in Ω von \vec{p} nach \vec{z} ist $\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}} \oplus (\overrightarrow{\beta_{\vec{p}, \vec{z}}})_-$ ein geschlossener stückweiser \mathcal{C}^1 -Weg. Also gilt nach Voraussetzung

$$0 = \oint_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}} \oplus (\overrightarrow{\beta_{\vec{p}, \vec{z}}})_-} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{(\overrightarrow{\beta_{\vec{p}, \vec{z}}})_-} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\overrightarrow{\beta_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds},$$

also

$$\int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\overrightarrow{\beta_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Wir zeigen nun, dass Φ in Ω partiell differenzierbar ist und dass gilt

$$\partial_k \Phi = F_k \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots, n.$$

Sei $\vec{z} \in \Omega$ beliebig, und sei $r > 0$ so klein, dass die offene Kreisscheibe

$$U_r(\vec{z}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{z}| < r \}$$

ganz in Ω liegt. (Ein solches r existiert, weil Ω als Gebiet offen ist.)

Mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^n .

Für $h \in]0, r[$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ liegt die Strecke (also Verbindungslinie) $\vec{\sigma}$ von \vec{z} nach $\vec{z} + h\vec{e}_k$ ganz in Ω . Daher ist der Weg

$$\vec{\gamma} := \overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}} \oplus \vec{\sigma} \oplus \overrightarrow{\gamma_{\vec{z}+h\vec{e}_k, \vec{p}}} = \overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}} \oplus \vec{\sigma} \oplus \overrightarrow{(\gamma_{\vec{p}, \vec{z}+h\vec{e}_k})^{-}}$$

geschlossen, d.h. nach Voraussetzung gilt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}+h\vec{e}_k}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}+h\vec{e}_k}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} \end{aligned} \quad (19.5)$$

Die linke Seite von (19.5) können wir mittels (19.4) mit Hilfe von Φ ausdrücken, also

$$\int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}+h\vec{e}_k}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\overrightarrow{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \Phi(\vec{z} + h\vec{e}_k) - \Phi(\vec{z}). \quad (19.6)$$

Auf der rechten Seite von (19.5) parametrisieren wir $\vec{\sigma}$ durch

$$\vec{\sigma} : [0, h] \rightarrow \Omega, \quad \vec{\sigma}(t) = \vec{z} + t\vec{e}_k,$$

und erhalten mit $\vec{\sigma}'(t) = \vec{e}_k$

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_0^h \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt \\ &= \int_0^h \vec{F}(\vec{z} + t\vec{e}_k) \cdot \vec{e}_k dt = \int_0^h F_k(\vec{z} + t\vec{e}_k) dt. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Einsetzen von (19.6) und (19.7) in (19.5) und durch h Teilen liefert:

$$\frac{1}{h} \left(\Phi(\vec{z} + h\vec{e}_k) - \Phi(\vec{z}) \right) = \frac{1}{h} \int_0^h F_k(\vec{z} + t\vec{e}_k) dt. \quad (19.8)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (vgl. Kapitel 8 der HM A) gibt es ein $\xi \in [0, h]$ (welches von h abhängt) mit

$$\int_0^h F_k(\vec{z} + t\vec{e}_k) dt = F_k(\vec{z} + \xi\vec{e}_k) \cdot (h - 0) = F_k(\vec{z} + \xi\vec{e}_k) h$$

$$\iff \frac{1}{h} \int_0^h F_k(\vec{z} + t\vec{e}_k) dt = F_k(\vec{z} + \xi\vec{e}_k).$$

Einsetzen in (19.8) liefert

$$\frac{1}{h} \left(\Phi(\vec{z} + h\vec{e}_k) - \Phi(\vec{z}) \right) = F_k(\vec{z} + \xi\vec{e}_k).$$

Bilden wir nun den Grenzwert $h \rightarrow 0$, so erhalten wir

$$(\partial_k \Phi)(\vec{z}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\Phi(\vec{z} + h\vec{e}_k) - \Phi(\vec{z}) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} F_k(\vec{z} + \xi\vec{e}_k) = F_k(\vec{z}),$$

wobei wir nutzen, dass für $h \rightarrow 0$ die Zwischenstelle $\xi \in [0, h]$ gegen 0 strebt. Damit haben wir gezeigt, dass Φ in \vec{z} nach der k -ten Variablen partiell differenzierbar ist mit der partiellen Ableitung $(\partial_k \Phi)(\vec{z}) = F_k(\vec{z})$. Da $\vec{z} \in \Omega$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig waren, folgt, dass Φ auf Ω partiell differenzierbar ist mit den partiellen Ableitungen $\partial_k \Phi = F_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Da \vec{F} stetig ist, sind alle partiellen Ableitungen von Φ stetig. Somit ist Φ auch stetig differenzierbar und es gilt $\nabla \Phi = \vec{F}$ auf ganz Ω , d.h. Φ ist ein Potential von \vec{F} . Daher ist \vec{F} konservativ in Ω . \square

Methode 19.20. (Potential eines konserv. Vektorfelds berechnen)

Weiß man, dass ein stetiges Vektorfeld $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konservativ ist, so kann man die Formel

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\vec{z}) := \int_{\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

aus dem vorigen Beweis zur Berechnung eines Potentials Φ von \vec{F} verwenden, wobei \vec{p} ein beliebiger fest gewählter Punkt aus Ω ist und $\gamma_{\vec{p}, \vec{z}}$ ein beliebiger C^1 -Weg in Ω von \vec{p} nach \vec{z} . Wir werden in Teilkapitel 19.9 sehen, wie dieses genau funktioniert.

19.4 Die Integrabilitätsbedingung

Wann ist ein Vektorfeld konservativ? Im nächsten Satz lernen wir eine **notwendige** (aber nicht hinreichende) Bedingung.

Satz 19.21. (Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in Ω , so gilt in Ω

$$\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \text{für alle } i, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (19.9)$$

Beweis von Satz 19.21: Da $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in Ω ist, gibt es ein Potential Φ von $\vec{\mathbf{F}}$ mit $\nabla\Phi = \vec{\mathbf{F}}$ auf ganz Ω . Da $\vec{\mathbf{F}} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist folgt, dass $\Phi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ ist. Nach dem Satz von Schwarz (vgl. Satz 16.52 in Kapitel 16 des Skripts der HM B) gilt somit in Ω

$$\partial_i F_k = \partial_i \partial_k \Phi = \partial_k \partial_i \Phi = \partial_k F_i \quad \text{für alle } i, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir machen uns zunächst Gedanken über die Aussage und Anwendung von Satz 19.21

Bemerkung 19.22. (zu Satz 19.21)

- (1) Mit Hilfe von Satz 19.21 kann man manchmal nachweisen, dass ein gegebenes stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$ in einer offenen Menge Ω **nicht konservativ** ist. Erfüllt $\vec{\mathbf{F}}$ nämlich in Ω die Integrabilitätsbedingung (19.9) **nicht**, so kann $\vec{\mathbf{F}}$ nach Satz 19.21 in Ω **nicht konservativ** sein.

Dies ist durch Beispiel 19.23 unten illustriert.

(2) **Achtung:** Erfüllt ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$ die Integrabilitätsbedingung (19.9) in einer offenen Menge Ω , so kann man daraus im Allgemeinen **nicht** schließen, dass $\vec{\mathbf{F}}$ in Ω konservativ ist. Die Integrabilitätsbedingung (19.9) ist **nicht hinreichend** (sondern nur notwendig) für die Existenz eines Potentials.

In Beispiel 19.24 unten sehen wir ein stetig differenzierbares Vektorfeld, welches in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ nicht konservativ ist, aber die Integrabilitätsbedingung (19.9) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ trotzdem erfüllt.

Nun betrachten wir mehrere Beispiele.

Beispiel 19.23. (nicht konservatives Vektorfeld)

Wir betrachten das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) := \begin{bmatrix} e^{xy} \\ \sin(x + y) \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$(\partial_1 F_2)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \sin(x + y) = \cos(x + y), \quad (\partial_2 F_1)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = x e^{xy}.$$

Da $\partial_1 F_2 \neq \partial_2 F_1$ ist, kann $\vec{\mathbf{F}}$ nach Satz 19.21 in \mathbb{R}^2 **nicht** konservativ sein.

Beispiel 19.24. (nicht konservatives Vektorfeld, welches die Integrabilitätsbedingung erfüllt)

Seien $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ und

$$\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{\mathbf{F}}$ stetig differenzierbar in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ und erfüllt die Integrabilitätsbedingung, denn

$$\begin{aligned} F_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} &\implies \partial_2 F_1(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2) - 2yy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \implies \quad \partial_1 F_2(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2xx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Also gilt $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ in ganz $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

Um zu sehen, dass \vec{F} in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ **nicht** konservativ ist, betrachten wir den geschlossenen Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Wenn \vec{F} in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ konservativ ist, so muss nach Folgerung 19.15 (1) des Kurvenintegral über den geschlossenen Weg $\vec{\gamma}$ Null sein. Wir finden aber

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos(t), \sin(t)) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} [\sin^2(t) + \cos^2(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = \left[t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Also kann das Vektorfeld \vec{F} in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ **nicht** konservativ sein.

Beispiel 19.25. (konservatives Vektorfeld)

Seien $\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ein Gebiet und

$$\vec{F} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

Wir betrachten also von der Funktionsvorschrift her das gleiche Vektorfeld wie in Beispiel 19.24 aber mit einer anderen Definitionsmenge $\tilde{\Omega}$. Dieses Vektorfeld ist nun konservativ in $\tilde{\Omega}$, denn

$$\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) := -\arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

ist ein Potential von \vec{F} . In der Tat: Für alle $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ gilt

$$(\partial_1 \Phi)(x, y) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{y}{y^2 + x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = F_1(x, y),$$

$$(\partial_2 \Phi)(x, y) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2 + x^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = F_2(x, y).$$

Also gilt $\nabla \Phi = \vec{F}$ in ganz $\tilde{\Omega}$, und wir haben gezeigt, dass \vec{F} in $\tilde{\Omega}$ konservativ ist.

Warum funktioniert die Argumentation mit dem geschlossenen Weg $\vec{\gamma}$ aus Beispiel 19.24 hier nicht? Dieser Weg $\vec{\gamma}$ ist kein Weg in $\tilde{\Omega}$, denn $\tilde{\Omega}$ ist die obere Halbebene, aber $\vec{\gamma}$ beschreibt die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius 1.

An den letzten beiden Beispielen sieht man bereits deutlich, dass die Frage, ob ein stetig differenzierbares Vektorfeld (in seiner Definitionsmenge) konservativ ist, auch von der Definitionsmenge des Vektorfeldes abhängt. **Ist die Integrabilitätsbedingung allerdings nicht erfüllt, so kann das Vektorfeld aber nie konservativ sein.**

19.5 Integrabilitätskriterium für offene Kugeln und sternförmige Gebiete

Im vergangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Integrabilitätsbedingungen im Allgemeinen nicht ausreichen, um zu garantieren, dass ein Vektorfeld konservativ ist. Ist das Vektorfeld aber auf einer offenen Kugel definiert, dann kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 19.26. (Lemma von Poincaré)

Sei Ω eine offene Kugel in \mathbb{R}^n . Das C^1 -Vektorfeld $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle in Ω die **Integrabilitätsbedingungen**

$$\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \text{für alle } i, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dann ist \vec{F} konservativ in Ω .

Beweis von Satz 19.26: Sei $\Omega = U_r(\vec{a}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ die offene Kugel um $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall $\vec{a} = \vec{0}$. Zu $\vec{p} \in \Omega$ betrachten wir die Strecke von $\vec{0}$ nach \vec{p} , parametrisiert durch

$$\vec{\gamma}_{\vec{p}}(t) := t \vec{p}, \quad t \in [0, 1],$$

und setzen

$$\Phi(\vec{\mathbf{p}}) := \int_{\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_0^1 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}(t)) \cdot \vec{\gamma}'_{\vec{\mathbf{p}}}(t) dt = \int_0^1 \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \cdot \vec{\mathbf{p}} dt.$$

Man kann beweisen, dass für alle $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$(\partial_k \Phi)(\vec{\mathbf{p}}) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_k} [\vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \cdot \vec{\mathbf{p}}] dt.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_k} [\vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \cdot \vec{\mathbf{p}}] &= \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\sum_{i=1}^n F_i(t\vec{\mathbf{p}}) p_i \right] \\ &= F_k(t\vec{\mathbf{p}}) + \sum_{i=1}^n (\partial_k F_i)(t\vec{\mathbf{p}}) t p_i \\ &= F_k(t\vec{\mathbf{p}}) + t \sum_{i=1}^n (\partial_i F_k)(t\vec{\mathbf{p}}) p_i \\ &= F_k(t\vec{\mathbf{p}}) + t \frac{d}{dt} F_k(t\vec{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{d}{dt} [t F_k(t\vec{\mathbf{p}})]. \end{aligned}$$

Dabei wurde im dritten Schritt die Integrabilitätsbedingungen genutzt und im nachfolgenden Schritt die Kettenregel. Es folgt

$$\begin{aligned} (\partial_k \Phi)(\vec{\mathbf{p}}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_k} [\vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \cdot \vec{\mathbf{p}}] dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t F_k(t\vec{\mathbf{p}})] dt \\ &= \left[t F_k(t\vec{\mathbf{p}}) \right]_{t=0}^{t=1} = F_k(\vec{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Also ist Φ ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$, d.h. $\vec{\mathbf{F}}$ ist konservativ in Ω .

Ist $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so geht der Beweis analog: Man betrachtet dann für $\vec{\mathbf{p}} \in \Omega$ die Strecke von Mittelpunkt $\vec{\mathbf{a}}$ der offenen Kugel nach $\vec{\mathbf{p}}$, parametrisiert durch $\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}(t) := \vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{a}})$, $t \in [0, 1]$. \square

Eine genaue Analyse des Beweises zeigt, dass das Lemma von Poincaré nicht nur auf offenen Kugeln, sondern sogar etwas allgemeiner auf sogenannten sternförmigen Gebieten gilt.

Definition 19.27. (sternförmiges Gebiet)

- (1) Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig bzgl.** $\vec{x}_0 \in \Omega$, wenn mit jedem Punkt $\vec{x} \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke von \vec{x} zu \vec{x}_0 ganz in Ω enthalten ist.
- (2) Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn ein $\vec{x}_0 \in \Omega$ existiert, so dass Ω sternförmig bzgl. \vec{x}_0 ist.

Betrachten wir einige Beispiele, um uns mit dem neuen Begriff „sternförmig“ vertraut zu machen.

Beispiel 19.28. (sternförmiges Gebiet)

- (a) \mathbb{R}^n ist sternförmig, da \mathbb{R}^n bzgl. jedes beliebigen festen Punktes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sternförmig ist.
- (b) Jede offene Kugel im \mathbb{R}^n ,

$$U_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r \},$$

mit Radius $r > 0$ um den Mittelpunkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ist sternförmig, denn sie ist z.B. sternförmig bzgl. ihres Mittelpunktes \vec{a} .

- (c) Konvexe offene Mengen Ω in \mathbb{R}^n (vgl. Definition 16.57 in Kapitel 16 im Skript der HM B für den Begriff „konvex“) sind sternförmig bzgl. jedes beliebigen Punktes $\vec{x}_0 \in \Omega$, denn für alle Punkte $\vec{x} \in \Omega$ liegt die Verbindungsstrecke von \vec{x}_0 nach \vec{x} ganz in Ω .
- (d) $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist **nicht** sternförmig.

Nachweis: Um dieses zu sehen, betrachtet man einen beliebigen Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wir zeigen nun, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ nicht sternförmig bzgl. \vec{x}_0 sein kann. Da $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ ist, ist $-\vec{x}_0 \neq \vec{0}$. Wäre $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ sternförmig bzgl. \vec{x}_0 , so müsste die Verbindungsstrecke von $-\vec{x}_0$ nach \vec{x}_0 , also

$$-\vec{x}_0 + t(\vec{x}_0 - (-\vec{x}_0)) = (2t - 1)\vec{x}_0, \quad t \in [0, 1],$$

ganz in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ liegen. Für $t = 1/2$ erhalten wir aber $(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)\vec{x}_0 = 0\vec{x}_0 = \vec{0}$, und dieser Punkt liegt nicht in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Also ist $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ nicht sternförmig bzgl. \vec{x}_0 . Da $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ beliebig gewählt war, ist $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ **nicht** sternförmig.

- (e) Die Kugelschale $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : r < |\vec{x}| < R \}$, wobei $0 < r < R$, ist **nicht** sternförmig.

Nun können wir das Lemma von Poincaré für sternförmige Gebiete formulieren.

Satz 19.29. (Lemma von Poincaré für sternförmige Gebiete)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein *sternförmiges* Gebiet. Das C^1 -Vektorfeld $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle in Ω die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \text{für alle } i, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dann ist \vec{F} *konservativ* in Ω .

Ist $\vec{a} \in \Omega$ ein Punkt bzgl. dessen Ω sternförmig ist, so kann man ein Potential $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von \vec{F} mit der folgenden Formel berechnen:

$$\Phi(\vec{x}) := \int_{\vec{\gamma}_{\vec{x}}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}_{\vec{x}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\gamma}_{\vec{x}}(t) := \vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}). \quad (19.10)$$

Beispiel 19.30. (Anwendung des Lemmas von Poincaré für sternförmige Gebiete)

(a) Ist das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) := \begin{bmatrix} z e^{xz} \\ 1 \\ x e^{xz} \end{bmatrix},$$

konservativ? Wenn ja, dann soll ein Potential mit der Formel aus dem Lemma von Poincaré für sternförmige Gebiete bestimmt werden.

Die Definitionsmenge \mathbb{R}^3 von \vec{F} ist ein sternförmiges Gebiet. Wir überprüfen nun die Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned} (\partial_1 F_2)(x, y, z) &= 0, & (\partial_2 F_1)(x, y, z) &= 0, \\ (\partial_1 F_3)(x, y, z) &= e^{xz} + x z e^{xz}, & (\partial_3 F_1)(x, y, z) &= e^{xz} + x z e^{xz}, \\ (\partial_2 F_3)(x, y, z) &= 0, & (\partial_3 F_2)(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

und wir sehen, dass $(\partial_i F_k)(x, y, z) = (\partial_k F_i)(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und alle $i, k = 1, 2, 3$ gilt. Also ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und

nach dem Lemma von Poincaré für sternförmige Gebiete (Lemma 19.29) ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ auf \mathbb{R}^3 .

Als Punkt $\vec{\mathbf{a}} \in \Omega$ in (19.10) verwenden wir $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\vec{\gamma}_{(x,y,z)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}_{(x,y,z)}(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

mit der Ableitung

$$\vec{\gamma}'_{(x,y,z)}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mit der Formel (19.10) finden wir ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int_{\vec{\gamma}_{(x,y,z)}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_0^1 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_{(x,y,z)}(t)) \cdot \vec{\gamma}'_{(x,y,z)}(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} t z e^{t^2 x z} \\ 1 \\ t x e^{t^2 x z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dt = \int_0^1 [2 t x z e^{t^2 x z} + y] dt \\ &= \int_0^1 2 t x z e^{t^2 x z} dt + \int_0^1 y dt = [e^{t^2 x z}]_{t=0}^{t=1} + [y t]_{t=0}^{t=1} = e^{x z} - 1 + y - 0, \end{aligned}$$

wobei das erste Integral mit der Substitution $u = t^2 x z \implies du = 2 t x z dt$ berechnet wird. Also ist

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := e^{x z} - 1 + y,$$

ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$.

(b) Ist das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} y z e^{x z} \\ e^{x z} \\ x y e^{x z} \end{bmatrix},$$

konservativ? Wenn ja, dann soll ein Potential mit der Formel aus dem Lemma von Poincaré für sternförmige Gebiete bestimmt werden.

Die Definitionsmenge \mathbb{R}^3 von $\vec{\mathbf{F}}$ ist ein sternförmiges Gebiet. Wir überprüfen nun die Integrabilitätsbedingung:

$$(\partial_1 F_2)(x, y, z) = z e^{x z}, \quad (\partial_2 F_1)(x, y, z) = z e^{x z},$$

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_3)(x, y, z) &= y e^{xz} + x y z e^{xz}, & (\partial_3 F_1)(x, y, z) &= y e^{xz} + x y z e^{xz}, \\(\partial_2 F_3)(x, y, z) &= x e^{xz}, & (\partial_3 F_2)(x, y, z) &= x e^{xz},\end{aligned}$$

und wir sehen, dass $(\partial_i F_k)(x, y, z) = (\partial_k F_i)(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und alle $i, k = 1, 2, 3$ gilt. Also ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und nach dem Lemma von Poincaré für sternförmige Gebiete (Lemma 19.29) ist \vec{F} konservativ auf \mathbb{R}^3 .

Als Punkt $\vec{a} \in \Omega$ in (19.10) verwenden wir $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\vec{\gamma}_{(x,y,z)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}_{(x,y,z)}(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

mit der Ableitung

$$\vec{\gamma}'_{(x,y,z)}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mit der Formel (19.10) finden wir ein Potential von \vec{F} :

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \int_{\vec{\gamma}_{(x,y,z)}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\gamma}_{(x,y,z)}(t)) \cdot \vec{\gamma}'_{(x,y,z)}(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} t^2 y z e^{t^2 x z} \\ e^{t^2 x z} \\ t^2 x y e^{t^2 x z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \left[t^2 x y z e^{t^2 x z} + y e^{t^2 x z} + t^2 x y z e^{t^2 x z} \right] dt \\ &= \int_0^1 (2 t^2 x y z + y) e^{t^2 x z} dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t y e^{t^2 x z}) dt = \left[t y e^{t^2 x z} \right]_{t=0}^{t=1} = y e^{x z},\end{aligned}$$

wobei die Stammfunktion durch geschicktes Inspizieren gesehen wurde. In der Tat gilt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial t} (t y e^{t^2 x z}) = y e^{t^2 x z} + t y 2 t x z e^{t^2 x z} = y e^{t^2 x z} + 2 t^2 x y z e^{t^2 x z}.$$

Also ist

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := y e^{x z},$$

ein Potential von \vec{F} .

19.6 Integrabilitätskriterium für offene Quader

In diesem Teilkapitel interessieren wir uns für den Spezialfall eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes in einem sogenannten „offenen Quader“ Q . Für diesen

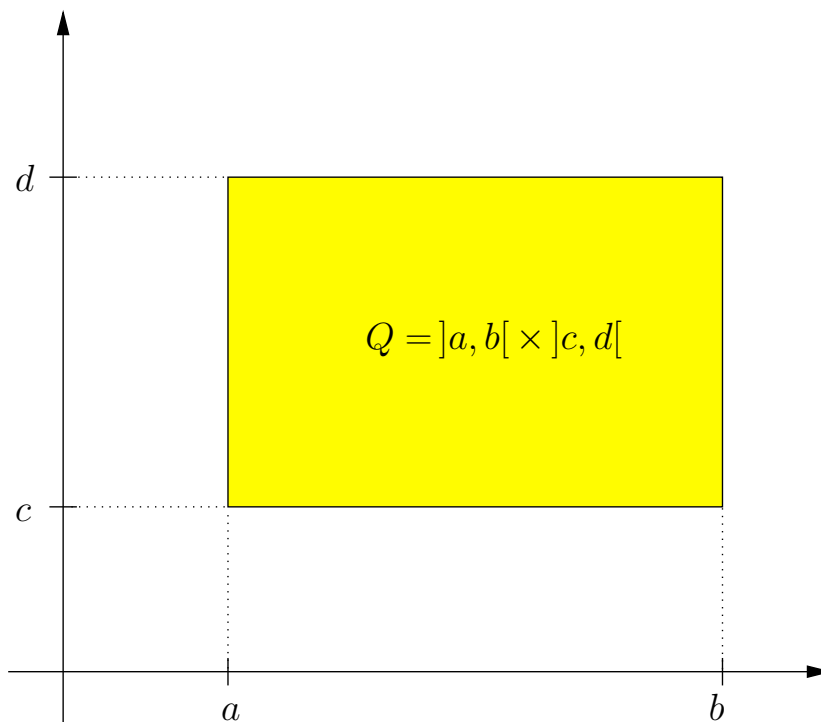


Abbildung 19.2: Ein (achsenparalleler) offener Quader im \mathbb{R}^2 . Der Rand des Quaders gehört dabei nicht zum (achsenparallelen) offenen Quader dazu.

Sonderfall werden wir zeigen, dass ein solches Vektorfeld konservativ in Q ist, wenn es in Q die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Zusätzlich erhalten wir eine Formel, mit der wir das Potential leicht berechnen können.

Definition 19.31. (offener Quader)

Seien $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle.

$$Q := I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in I_k \text{ für alle } k = 1, 2, \dots, n\}$$

heißt ein (achsenparalleler) offener Quader in \mathbb{R}^n .

Die Intervalle I_k in der vorigen Definition eines offenen Quaders dürfen auch **unbeschränkt** sein. In diesem Sinne ist $\tilde{\Omega}$ aus Beispiel 19.25 ein offener Quader in \mathbb{R}^2 , genauer $\tilde{\Omega} =]-\infty, \infty[\times]0, \infty[$. Ebenso ist auch \mathbb{R}^n selbst ein offener

Quader, nämlich

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{] - \infty, \infty[\times] - \infty, \infty[\times \dots \times] - \infty, \infty[}_{n\text{-mal}}.$$

Offene Quader sind **konvex** und damit **sternförmig**.

Satz 19.32. (Integrabilitätskriterium für offene Quader)

Sei Q ein offener Quader in \mathbb{R}^n , und sei

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das in Q die **Integrabilitätsbedingung**

$$\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \text{für alle } i, k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (19.11)$$

erfüllt. Wählt man einen festen Punkt $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q$, so liefert die folgende Formel ein **Potential von \vec{F}** :

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{x_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k & (19.12) \\ &= \int_{a_1}^{x_1} F_1(t_1, a_2, \dots, a_n) dt_1 + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t_2, a_3, \dots, a_n) dt_2 \\ &\quad + \dots + \int_{a_n}^{x_n} F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t_n) dt_n \end{aligned}$$

für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$. Insbesondere ist \vec{F} **konservativ in Q** .

In Beispiel 19.25 haben wir bereits ein in einem offenen Quader konservatives Vektorfeld gesehen. Dabei war die Formel für das Potential aber vorgegeben und wir haben nur durch Berechnen der partiellen Ableitungen überprüft, dass es sich um ein Potential für das gegebene Vektorfeld handelt. Zur Übung wollen wir im nächsten Beispiel mit diesem Vektorfeld starten und mit Hilfe von Satz 19.32 das Potential selber ausrechnen.

Beispiel 19.33. (Integrabilitätskriterium für offene Quader)

Betrachten wir das stetig differenzierbare Vektorfeld aus Beispiel 19.24 und Beispiel 19.25,

$$\vec{F} : Q \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x_1, x_2) := \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

auf dem offenen Quader

$$Q = \tilde{\Omega} :=] - \infty, \infty[\times] 0, \infty[= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}.$$

Dabei haben wir lediglich x in x_1 und y in x_2 umbenannt, um eine bessere Übereinstimmung mit der Notation in Satz 19.32 zu haben. Aus Beispiel 19.25 wissen wir bereits, dass \vec{F} in Q die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Nach Satz 19.32 wissen wir daher schon, dass \vec{F} konservativ in Q ist. Wir wollen nun das Potential mit der Formel aus Satz 19.32 berechnen:

Wir wählen $(a_1, a_2) = (0, 1)$ in Q und berechnen

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= \int_{a_1}^{x_1} F_1(t_1, a_2) dt_1 + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t_2) dt_2 \\ &= \int_0^{x_1} -\frac{1}{t_1^2 + 1^2} dt_1 + \int_1^{x_2} \frac{x_1}{x_1^2 + t_2^2} dt_2. \end{aligned}$$

Ist $x_1 = 0$, so folgt $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(0, x_2) = 0$ für alle $x_2 > 0$, da

$$\Phi(0, x_2) = \underbrace{\int_0^0 -\frac{1}{t_1^2 + 1^2} dt_1}_{=0} + \underbrace{\int_1^{x_2} \frac{0}{0 + t_2^2} dt_2}_{=0} = 0.$$

Wir betrachten nun den Fall $x_1 \neq 0$: Aus der HM A (siehe Kapitel 8 im Skript der HM A) wissen wir, dass

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{für } a \neq 0$$

mit einer beliebigen Integrationskonstante c ist. Also finden wir

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} -\frac{1}{t_1^2 + 1^2} dt_1 + \int_1^{x_2} \frac{x_1}{x_1^2 + t_2^2} dt_2 \\ &= \left[-\frac{1}{1} \arctan\left(\frac{t_1}{1}\right) \right]_{t_1=0}^{t_1=x_1} + \left[x_1 \cdot \frac{1}{x_1} \arctan\left(\frac{t_2}{x_1}\right) \right]_{t_2=1}^{t_2=x_2} \\ &= -\arctan(x_1) + \arctan(0) + \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x_1}\right) \end{aligned}$$

$$= \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \arctan(x_1) - \arctan\left(\frac{1}{x_1}\right).$$

Es gilt (dieses wird in einer Übungsaufgabe gezeigt)

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für alle } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für alle } x < 0. \end{cases} \quad (19.13)$$

Nutzt man (19.13) jeweils für $x = x_1$ bzw. $x = x_2/x_1$, so folgt für $x_1 \neq 0$ (und $x_2 > 0$)

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \arctan(x_1) - \arctan\left(\frac{1}{x_1}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \frac{\pi}{2} & \text{für } x_1 > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x_1 < 0 \end{cases} = -\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right). \end{aligned}$$

Also finden wir das Potential

$$\Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{für } x_1 = 0, \\ -\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right), & \text{für } x_1 \neq 0. \end{cases} = -\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

weil $\arctan(0) = 0$ ist.

Wir halten noch einige nützliche Beobachtungen zu Satz 19.32 fest, bevor wir diesen beweisen.

Bemerkung 19.34. (zu Satz 19.32)

(1) Für $n = 2$ lautet die Formel (19.12)

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} F_1(t_1, a_2) dt_1 + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t_2) dt_2,$$

bzw., wenn wir alle Integrationsvariablen in t umbenennen, noch einfacher

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} F_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t) dt.$$

(2) Für $n = 3$ lautet die Formel (19.12)

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) &= \int_{a_1}^{x_1} F_1(t_1, a_2, a_3) dt_1 + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t_2, a_3) dt_2 + \int_{a_3}^{x_3} F_3(x_1, x_2, t_3) dt_3, \end{aligned}$$

bzw., wenn wir alle Integrationsvariablen in t umbenennen, noch einfacher

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) &= \int_{a_1}^{x_1} F_1(t, a_2, a_3) dt + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t, a_3) dt + \int_{a_3}^{x_3} F_3(x_1, x_2, t) dt. \end{aligned}$$

(3) Die rechte Seite der Formel (19.12) für Φ kann als Kurvenintegral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

aufgefasst werden, wobei der stückweise \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma}$ gerade der Streckenzug ist, der die Punkte $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $P_1 = (x_1, a_2, \dots, a_n)$, $P_2 = (x_1, x_2, a_3, \dots, a_n)$, \dots , $P_{n-1} = (x_1, \dots, x_{n-1}, a_n)$, $P_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ aus dem nachfolgenden Beweis von Satz 19.32 in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet.

Beweis von Satz 19.32: Wir zeigen, dass die durch (19.12) gegebene stetig differenzierbare Funktion in Q die Bedingung

$$\partial_i \Phi = F_i \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt.

Seien $\vec{\mathbf{x}} \in Q$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jeweils beliebig. Dann gilt:

$$(\partial_i \Phi)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{a_k}^{x_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k. \quad (19.14)$$

Zur Berechnung der Ableitungen betrachten wir die drei Fälle $k < i$, $k = i$ und

$k > i$ separat.

$$\begin{aligned}
 k < i : \quad & \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\int_{a_k}^{x_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k}_{\text{unabhängig von } x_i} = 0, \\
 k = i : \quad & \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{a_i}^{x_i} F_k(x_1, \dots, x_{i-1}, t_i, a_{i+1}, \dots, a_n) dt_i \\
 & = F_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \\
 k > i : \quad & \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{a_k}^{x_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k \\
 & = \int_{a_k}^{x_k} \partial_i F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k \\
 & \stackrel{(19.11)}{=} \int_{a_k}^{x_k} \partial_k F_i(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k \\
 & = \left[F_i(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \right]_{t_k=a_k}^{t_k=x_k} \\
 & = F_i(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \\
 & \quad - F_i(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).
 \end{aligned}$$

Mit den $n + 1$ Punkten $P_0 := (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $P_1 := (x_1, a_2, \dots, a_n)$, $P_2 := (x_1, x_2, a_3, \dots, a_n)$, \dots , $P_{n-1} := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a_n)$, $P_n := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ liefert Einsetzen in (19.14)

$$\begin{aligned}
 (\partial_i \Phi)(x_1, x_2, \dots, x_n) & = F_i(P_i) + \sum_{k=i+1}^n (F_i(P_k) - F_i(P_{k-1})) \\
 & = F_i(P_n) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n),
 \end{aligned}$$

d.h. wir haben $\partial_i \Phi = F_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$ in ganz Ω nachgewiesen. \square

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel.

Beispiel 19.35. (Integrierbarkeitskriterium für offene Quader)

Gegeben sei das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} y e^{xy} + z^2 \\ x e^{xy} \\ 2 x z \end{bmatrix}.$$

Es gilt $\mathbb{R}^3 =] - \infty, \infty[\times] - \infty, \infty[\times] - \infty, \infty[$, d.h. \mathbb{R}^3 ist ein offener Quader. Wir überprüfen zunächst die Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_2)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (x e^{xy}) = e^{xy} + x y e^{xy}, \\(\partial_2 F_1)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} (y e^{xy} + z^2) = e^{xy} + x y e^{xy}, \\(\partial_1 F_3)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} F_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (2 x z) = 2 z, \\(\partial_3 F_1)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} F_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} (y e^{xy} + z^2) = 2 z, \\(\partial_2 F_3)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} F_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} (2 x z) = 0, \\(\partial_3 F_2)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} F_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} (x e^{xy}) = 0.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass gilt

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_2)(x, y, z) &= (\partial_2 F_1)(x, y, z) && \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\(\partial_1 F_3)(x, y, z) &= (\partial_3 F_1)(x, y, z) && \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\(\partial_2 F_3)(x, y, z) &= (\partial_3 F_2)(x, y, z) && \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Also sind die Integrabilitätsbedingungen in \mathbb{R}^3 erfüllt, und nach Satz 19.32 ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in \mathbb{R}^3 .

Nun berechnen wir mit (19.12) ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$: Wir wählen $(a_1, a_2, a_3) := (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ und finden

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\&= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x e^{xt} dt + \int_0^z 2 x t dt \\&= 0 + \left[e^{xt} \right]_{t=0}^{t=y} + \left[x t^2 \right]_{t=0}^{t=z} \\&= e^{xy} - e^0 + x z^2 - 0 = e^{xy} + x z^2 - 1.\end{aligned}$$

Also finden wir das Potential $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y, z) := e^{xy} + x z^2 - 1$, von $\vec{\mathbf{F}}$.

19.7 Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. In diesem Teilkapitel betrachten wir Kurvenintegrale über ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, welches in Ω die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Wir untersuchen, welche Forderungen wir an zwei Wege $\vec{\beta}$ und $\vec{\gamma}$ in Ω mit dem gleichen Anfangspunkt und dem gleichen Endpunkt stellen müssen, damit gilt

$$\int_{\vec{\beta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}.$$

Definition 19.36. (homotope Wege)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zwei stetige Wege $\vec{\beta} : [a, b] \rightarrow \Omega$ und $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ mit gemeinsamem Anfangspunkt $\vec{\mathbf{a}}$ und gemeinsamem Endpunkt $\vec{\mathbf{b}}$ (also mit $\vec{\beta}(a) = \vec{\gamma}(a) = \vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\beta}(b) = \vec{\gamma}(b) = \vec{\mathbf{b}}$) heißen **homotop in Ω** , wenn es eine stetige „Deformationsfunktion“

$$\vec{\mathbf{h}} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$$

gibt, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\vec{\mathbf{h}}(t, 0) = \vec{\beta}(t)$ und $\vec{\mathbf{h}}(t, 1) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in [a, b]$,
- (ii) $\vec{\mathbf{h}}(a, s) = \vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{h}}(b, s) = \vec{\mathbf{b}}$ für alle $s \in [0, 1]$.

Anschauung: Anschaulich bedeutet Homotopie, dass man den Weg $\vec{\beta}$ stetig in den Weg $\vec{\gamma}$ deformieren kann. Dabei müssen der Anfangs- und Endpunkt fest bleiben und die Menge Ω darf nicht verlassen werden. Die Deformation wird durch die Funktion $\vec{\mathbf{h}}$ beschrieben: Für jedes $s \in [0, 1]$ ist $\vec{\mathbf{h}}_s(t) := \vec{\mathbf{h}}(t, s)$, $t \in [a, b]$, ein stetiger Weg in Ω mit Anfangspunkt $\vec{\mathbf{a}}$ und Endpunkt $\vec{\mathbf{b}}$. Dies folgt aus der Stetigkeit von $\vec{\mathbf{h}}$ und Eigenschaft (ii).

Eigenschaft (i) besagt, dass wir die Deformation für $s = 0$ mit dem Weg $\vec{\beta}$ starten und für $s = 1$ mit dem Weg $\vec{\gamma}$ beenden. Jeder Weg $\vec{\mathbf{h}}_s$ stellt ein Zwischenstadium des Deformationsprozesses dar.

Beispiel 19.37. (homotope Wege)

Die Wege

$$\vec{\beta}(t) := \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

sind homotop in \mathbb{R}^2 . Als Deformationsfunktion kann man beispielsweise

$$\vec{h}(t, s) = \begin{bmatrix} t \\ t^{s+1} \end{bmatrix}, \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

wählen.

Satz 19.38. (Invarianz unter Homotopie)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, das in Ω die **Integrierbarkeitsbedingungen** erfüllt. Weiter seien $\vec{\beta} : [a, b] \rightarrow \Omega$ und $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ zwei (stückweise) C^1 -Wege in Ω mit gemeinsamem Anfangspunkt \vec{a} und gemeinsamem Endpunkt \vec{b} .

Falls $\vec{\beta}$ und $\vec{\gamma}$ homotop in Ω sind, so gilt

$$\int_{\vec{\beta}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Sind die beiden Wege $\vec{\beta}$ und $\vec{\gamma}$ geschlossen, so kann auf den gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt verzichtet werden. Wir definieren dazu den Begriff der freien Homotopie.

Definition 19.39. (frei homotope, geschlossene Wege)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zwei stetige, **geschlossene** Wege $\vec{\beta} : [a, b] \rightarrow \Omega$ und $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ heißen **frei homotop in Ω** , wenn es eine stetige „Deformationsfunktion“

$$\vec{h} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$$

gibt, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\vec{h}(t, 0) = \vec{\beta}(t)$ und $\vec{h}(t, 1) = \vec{\gamma}(t)$ für alle $t \in [a, b]$,
- (ii) $\vec{h}(a, s) = \vec{h}(b, s)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Anschaulich bedeutet freie Homotopie, dass man den geschlossenen Weg $\vec{\beta}$ stetig in den geschlossenen Weg $\vec{\gamma}$ deformieren kann. Dabei darf die Eigenschaft „geschlossen“ nicht verloren gehen und die Menge Ω darf nicht verlassen werden. Wie

bei der Homotopie wird die Deformation durch die Funktion $\vec{\mathbf{h}}$ beschrieben: Für jedes $s \in [0, 1]$ ist $\vec{\mathbf{h}}_s(t) := \vec{\mathbf{h}}(t, s)$, $t \in [a, b]$, ein stetiger, geschlossener Weg in Ω . Dies folgt aus der Stetigkeit von $\vec{\mathbf{h}}$ und Eigenschaft (ii). Eigenschaft (i) besagt, dass wir die Deformation für $s = 0$ mit dem geschlossenen Weg $\vec{\beta}$ starten und für $s = 1$ mit dem geschlossenen Weg $\vec{\gamma}$ beenden. Jeder Weg $\vec{\mathbf{h}}_s$ stellt ein Zwischenstadium des Deformationsprozesses dar.

Beispiel 19.40. (frei homotope Wege)

Die geschlossenen Wege

$$\vec{\beta}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

sind frei homotop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$. Als Deformationsfunktion kann man beispielsweise

$$\vec{\mathbf{h}}(t, s) = \begin{bmatrix} (s+1) \cos(t) \\ (s+1) \sin(t) \end{bmatrix}, \quad (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1],$$

wählen.

Für den Sonderfall frei homotoper Wege liefert Satz 19.38 die folgende Aussage.

Satz 19.41. (Invarianz unter freier Homotopie)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld, das in Ω die **Integrierbarkeitsbedingungen** erfüllt. Weiter seien $\vec{\beta} : [a, b] \rightarrow \Omega$ und $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ zwei **geschlossene** (stückweise) \mathcal{C}^1 -Wege in Ω .

Falls $\vec{\beta}$ und $\vec{\gamma}$ **frei homotop** in Ω sind, so gilt

$$\oint_{\vec{\beta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \oint_{\vec{\gamma}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s}.$$

Beispiel 19.42. (Invarianz unter freier Homotopie)

Nach Beispiel 19.24 erfüllt das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix},$$

die Integrabilitätsbedingung auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$, aber dieses Vektorfeld ist nicht konservativ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$. Die geschlossenen Wege

$$\vec{\gamma}_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}, \quad \vec{\gamma}_r(t) := \begin{bmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{bmatrix}, \quad r \in]0, \infty[,$$

sind alle frei homotop, denn für $0 < r_1 < r_2$ überführt die „Deformationsfunktion“

$$\vec{\mathbf{h}} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}, \quad \vec{\mathbf{h}}(t, s) := \begin{bmatrix} (r_1 + s(r_2 - r_1)) \cos(t) \\ (r_1 + s(r_2 - r_1)) \sin(t) \end{bmatrix}$$

den Weg $\vec{\gamma}_{r_1}$ in den Weg $\vec{\gamma}_{r_2}$. Nach Satz 19.41 sollte das Integral

$$\oint_{\vec{\gamma}_r} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s}$$

für alle $r \in]0, \infty[$ denselben Wert haben. Dieses ist in der Tat der Fall, denn für alle $r \in]0, \infty[$ finden wir mit

$$(\gamma_{r,1}(t))^2 + (\gamma_{r,2}(t))^2 = (r \cos(t))^2 + (r \sin(t))^2 = r^2$$

für das skalare Kurvenintegral entlang $\vec{\gamma}_r$ über das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{\gamma}_r} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \underbrace{\left[(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2 \right]}_{= r^2 [\sin^2(t) + \cos^2(t)] = r^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = \left[t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

19.8 Das Integrabilitätskriterium für einfach zusammenhängende Gebiete

Als Vorbereitung für das Integrabilitätskriterium für eine allgemeinere Klasse von Gebieten (als offene Kugeln und offene Quader) brauchen wir noch zwei neue Begriffe.

Definition 19.43. (nullhomotoper Weg; einfach zshgd. Gebiet)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

- (1) Ein geschlossener (stückweiser) \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ heißt **nullhomotop in Ω** , wenn es einen Punkt $\vec{p} \in \Omega$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\vec{\gamma}$ und der durch $\vec{\beta}(t) := \vec{p}$ gegebene konstante Weg **frei homotop** sind.
- (2) Ω heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Weg in Ω nullhomotop ist.

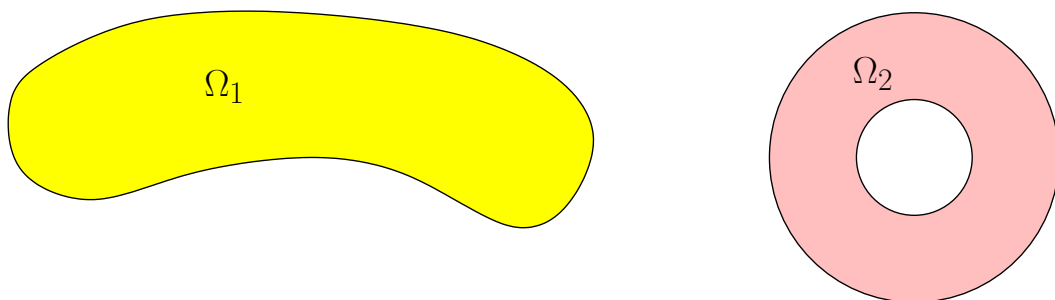
Ein geschlossener (stückweiser) \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma}$ ist **nullhomotop in Ω** , wenn sich $\vec{\gamma}$ innerhalb von Ω „auf einen Punkt $\vec{p} \in \Omega$ zusammenziehen lässt“. Dabei muss \vec{p} nicht auf/in Spur($\vec{\gamma}$) liegen.

Anschaung: Ein Gebiet ist **einfach zusammenhängend**, wenn es keine „durchgehenden Löcher“ hat, die dem Zusammenziehen im Weg stehen. Dieses wird durch die Beispiele weiter unten erläutert.

Betrachten wir einige Beispiele, um uns den Begriff eines einfach zusammenhängenden Gebietes zu veranschaulichen.

Beispiel 19.44. (einfach zusammenhängendes Gebiet)

- (a) Sei $n = 2$, d.h. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.



Das Gebiet Ω_1 im linken Bild oben ist einfach zusammenhängend, denn hier sind alle geschlossenen stückweisen \mathcal{C}^1 -Wege nullhomotop, d.h. sie können jeweils auf einen Punkt zusammengezogen werden. Das Gebiet Ω_2 im rechten Bild oben ist **nicht** einfach zusammenhängend denn alle geschlossenen kreisförmigen Wege in diesem Gebiet mit Zentrum im Zentrum des Kreisrings können nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden.

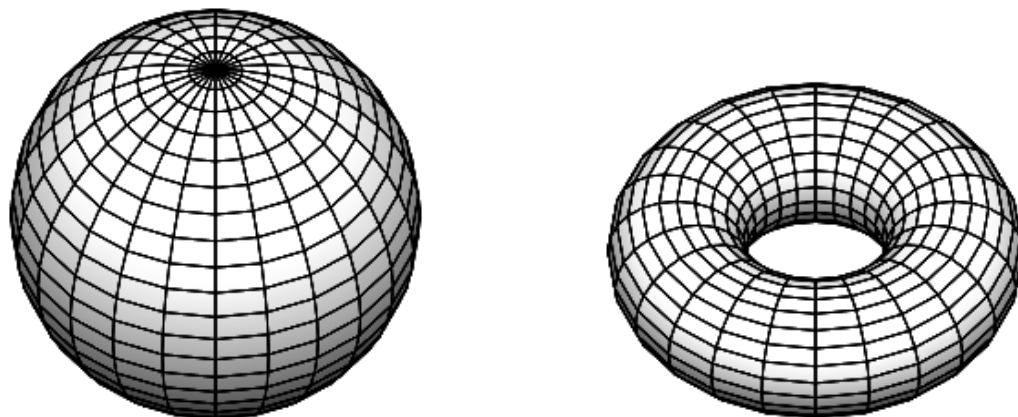
(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend, denn alle geschlossenen \mathcal{C}^1 -Wege, die $(0, 0)$ einmal umlaufen, sind nicht nullhomotop.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ist einfach zusammenhängend, denn alle geschlossenen stückweisen \mathcal{C}^1 -Wege können auf einen Punkt zusammengezogen werden. (*Erklärung:* Dieses Gebiet ist \mathbb{R}^2 ohne die nicht-positive x -Achse.)

(c) Alle offenen Quader sind einfach zusammenhängend.

(d) Sei $n = 3$, d.h. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Das Innere einer Vollkugel ist einfach zusammenhängend, denn hier sind alle stückweisen \mathcal{C}^1 -Wege nullhomotop, d.h. sie können auf einen Punkt zusammengezogen werden.

Das Innere eines Torus (oder eines „Doughnut“) ist **nicht** einfach zusammenhängend, denn \mathcal{C}^1 -Wege auf den Innenkreis oder auf dem Außenkreis des Doughnut können nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden.



(e) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ist einfach zusammenhängend, da das Loch $(0, 0, 0)$ kein Zusammenziehen eines stückweisen \mathcal{C}^1 -Weges verhindern kann.

(f) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend, da die fehlende z -Achse das Zusammenziehen eines stückweisen \mathcal{C}^1 -Weges, der einmal die z -Achse umläuft, verhindert.

Nach dieser Vorbereitung können wir das Integrabilitätskriterium für einfach zusammenhängende Gebiete formulieren.

Satz 19.45. (Integrabilitätskriterium für einfach zshgd. Gebiete)

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *genau dann konservativ* in Ω , wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \text{in } \Omega \text{ für alle } i, k = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt sind.

Beweis von Satz 19.45: Die Richtung „ \Rightarrow “ haben wir bereits in Satz 19.21 bewiesen. Wir zeigen noch die Rückrichtung „ \Leftarrow “:

Sei $\vec{\beta}$ ein beliebiger geschlossener stückweiser \mathcal{C}^1 -Weg in Ω . Da Ω einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{\beta}$ frei homotop zu einem konstanten Weg $\vec{\gamma}$, definiert auf einem Intervall $[a, b]$. Nach Satz 19.41 gilt

$$\oint_{\vec{\beta}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \oint_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \underbrace{\vec{\gamma}'(t)}_{=\vec{0}} dt = 0,$$

wobei $\vec{\gamma}'(t) = \vec{0}$ ist, weil $\vec{\gamma}$ ein konstanter Weg ist. Nach dem Hauptsatz über Kurvenintegrale 19.19 ist \vec{F} konservativ in Ω . \square

19.9 Berechnung von Potentialen

In diesem Teilkapitel betrachten wir die folgende typische Aufgabenstellung:

Aufgabe: Gegeben sei ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass \vec{F} in Ω konservativ ist und bestimmen Sie ein Potential.

Lösungsweg 1: Man verwendet die in Beispiel 19.11 demonstrierte Methode der unbestimmten Integration, um einen Kandidaten für ein Potential Φ zu finden und überprüft, dass $\nabla\Phi = \vec{F}$ in ganz Ω gilt. Damit ist auch gezeigt, dass \vec{F} in Ω konservativ ist.

Lösungsweg 2: Ist Ω einfach zusammenhängend, so weist man zuerst mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung nach, dass \vec{F} in Ω konservativ ist. Dann berechnet man ein Potential mit Hilfe der in Methode 19.20 beschriebenen Vorgehensweise über geeignete Wegintegrale. Dazu muss man einen festen Punkt $\vec{p} \in \Omega$ und zu jedem $\vec{x} \in \Omega$ einen Weg $\vec{\gamma}_{\vec{p}, \vec{x}}$ in Ω von \vec{p} nach \vec{x} wählen, und zwar möglichst

so, dass das Wegintegral $\int_{\gamma_{\vec{p}, \vec{x}}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ einfach zu berechnen ist. Dieses liefert eine Formel für das Potential Φ im Punkt \vec{x} :

$$\Phi(\vec{x}) := \int_{\gamma_{\vec{p}, \vec{x}}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Im Allgemeinen kann diese Vorgehensweise sehr mühsam sein. Es gibt jedoch zwei Standardvarianten:

Beachten Sie, dass sowohl bei Variante 2a als auch bei Variante 2b unten zuerst mit Hilfe der Integrabilitätsbedingungen nachgewiesen werden muss, dass \vec{F} in Ω konservativ ist!

Variante 2a (für sternförmige Gebiete): Aus (19.10) in Satz 19.29 erhalten wir: Sei Ω sternförmig bzgl. \vec{a} . Zu $\vec{x} \in \Omega$ ist $\gamma_{\vec{x}}(t) := \vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})$, $t \in [0, 1]$, die Verbindungsstrecke von \vec{a} nach \vec{x} , die ganz in Ω liegt, da Ω sternförmig bzgl. \vec{a} ist. Dann ist durch

$$\Phi(\vec{x}) := \int_{\gamma_{\vec{x}}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) dt, \quad \vec{x} \in \Omega,$$

ein Potential von \vec{F} gegeben.

Variante 2b (für offene Quader): Sei Ω ein offener Quader, also von der Form $\Omega = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, wobei I_1, I_2, \dots, I_n offene Intervalle in \mathbb{R} sind. Wir wählen einen geeigneten festen Punkt $\vec{a} \in \Omega$. Zu $\vec{x} \in \Omega$ wählen wir dann einen Weg von $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ nach $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, der aus folgenden achsenparallelen Strecken zusammengesetzt ist:

Strecke von $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ nach $(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ parallel zu x_1 -Achse

Strecke von $(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ nach $(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n)$ parallel zu x_2 -Achse

⋮

Strecke von $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a_n)$ nach $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ parallel zu x_n -Achse

Dies ergibt eine Formel der Form

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{x_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, a_{k+1}, \dots, a_n) dt_k.$$

Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ lautet die Formel:

$$n = 2 : \quad \Phi(x, y) = \int_{a_1}^x F_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y F_2(x, t) dt$$

$$n = 3 : \quad \Phi(x, y, z) = \int_{a_1}^x F_1(t, a_2, a_3) dt + \int_{a_2}^y F_2(x, t, a_3) dt + \int_{a_3}^z F_3(x, y, t) dt.$$

Lösungsweg 3: Man errät ein Potential Φ von $\vec{\mathbf{F}}$ und weist nach, dass $\nabla\Phi = \vec{\mathbf{F}}$ in ganz Ω gilt. Hieraus folgt, dass $\vec{\mathbf{F}}$ in Ω konservativ ist.

Beispiel 19.46. (Berechnung des Potentials für konserv. Vektorfeld)

Wir betrachten das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} z \\ z \\ x + y \end{bmatrix}.$$

\mathbb{R}^3 ist ein sternförmiges Gebiet, ein offener Quader und ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so dass Lösungsweg 1, Lösungsweg 2a und Lösungsweg 2b angewendet werden können.

Lösungsweg 1: Ist Φ ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$, so gilt $\nabla\Phi = \vec{\mathbf{F}}$, d.h.

$$(\partial_1\Phi)(x, y, z) = F_1(x, y, z) = z, \quad (\text{I})$$

$$(\partial_2\Phi)(x, y, z) = F_2(x, y, z) = z, \quad (\text{II})$$

$$(\partial_3\Phi)(x, y, z) = F_3(x, y, z) = x + y. \quad (\text{III})$$

Unbestimmte Integration von (I) liefert

$$\Phi(x, y, z) = xz + g(y, z).$$

Wir leiten diese Gleichung nach y ab und vergleichen mit (II):

$$(\partial_2\Phi)(x, y, z) = (\partial_y g)(y, z) \stackrel{(\text{II})}{=} (\partial_y g)(y, z) = z$$

Unbestimmte Integration nach y ergibt $g(y, z) = yz + h(z)$, also

$$\Phi(x, y, z) = xz + yz + h(z).$$

Wir leiten diese Gleichung nach z ab und vergleichen mit (III):

$$(\partial_3\Phi)(x, y, z) = x + y + h'(z) \stackrel{(\text{III})}{=} h'(z) = 0$$

Also ist $h(z) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir als Kandidaten für ein Potential

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := xz + yz + c = (x + y)z + c, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Durch partielles Ableiten überprüft man, dass Φ tatsächlich ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist. In der Tat finden wir für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(\partial_1 \Phi)(x, y, z) &= z = F_1(x, y, z), \\(\partial_2 \Phi)(x, y, z) &= z = F_2(x, y, z), \\(\partial_3 \Phi)(x, y, z) &= x + y = F_3(x, y, z).\end{aligned}$$

Insbesondere ist damit auch gezeigt, dass $\vec{\mathbf{F}}$ in \mathbb{R}^3 konservativ ist.

Lösungsweg 2: $\vec{\mathbf{F}}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen, denn in ganz \mathbb{R}^3 gilt

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_2)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} z = 0 & (\partial_2 F_1)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} z = 0, \\(\partial_1 F_3)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} (x + y) = 1 & (\partial_3 F_1)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} z = 1, \\(\partial_2 F_3)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} (x + y) = 1 & (\partial_3 F_2)(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} z = 1.\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_i F_k = \partial_k F_i$ für alle $i, k = 1, 2, 3$ in ganz \mathbb{R}^3 . Außerdem ist \mathbb{R}^3 ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Nach dem Integrabilitätskriterium für einfach zusammenhängende Gebiete (in Satz 19.45) ist $\vec{\mathbf{F}}$ also konservativ in \mathbb{R}^3 (und damit auch in jeder offenen Teilmenge von \mathbb{R}^3). Wir berechnen ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ mit Hilfe geeigneter Wegintegrale.

Variante 2a: \mathbb{R}^3 ist ein sternförmiges Gebiet bzgl. $\vec{\mathbf{a}} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Die Verbindungsstrecke in \mathbb{R}^3 von $\vec{\mathbf{a}} = (0, 0, 0)$ nach $\vec{\mathbf{p}} = (x, y, z)$ ist

$$\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}(t) := t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t x \\ t y \\ t z \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}'_{\vec{\mathbf{p}}}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \int_{\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_0^1 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(\vec{\mathbf{p}}t)) \cdot \vec{\gamma}'_{\vec{\mathbf{p}}}(t) dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} t z \\ t z \\ t x + t y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 [t z x + t z y + (t x + t y) z] dt = \int_0^1 2 t (x + y) z dt \\ &= \left[t^2 (x + y) z \right]_{t=0}^{t=1} = (x + y) z.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := (x + y) z,$$

ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$.

Variante 2b: \mathbb{R}^3 ist ein offener Quader. Wir wählen den Punkt $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ im offenen Quader \mathbb{R}^3 . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y 0 dt + \int_0^z (x + y) dt = 0 + 0 + \left[(x + y) t \right]_{t=0}^{t=z} = (x + y) z.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := (x + y) z,$$

ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$.

Variante 3: Mit etwas Erfahrung kann man bei diesem Beispiel erraten, dass

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := (x + y) z,$$

ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist. Tatsächlich gilt in \mathbb{R}^3

$$(\nabla\Phi)(x, y, z) = \begin{bmatrix} z \\ z \\ x + y \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{F}}(x, y, z).$$

Beispiel 19.47. (Berechnung des Potentials für konserv. Vektorfeld)

Wir betrachten das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{bmatrix}.$$

$\Omega :=]0, \infty[\times]0, \infty[$ ist ein sternförmiges Gebiet, ein offener Quader und ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so dass Lösungsweg 1, Lösungsweg 2a und Lösungsweg 2b angewendet werden können.

Lösungsweg 1: Ist Φ ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$, so gilt $\nabla\Phi = \vec{\mathbf{F}}$, d.h.

$$(\partial_1\Phi)(x, y) = F_1(x, y) = \frac{1}{x}, \quad (\text{I})$$

$$(\partial_2\Phi)(x, y) = F_2(x, y) = \frac{1}{y}. \quad (\text{II})$$

Unbestimmte Integration von (I) ergibt

$$\Phi(x, y) = \ln(x) + g(y).$$

Wir leiten nach y ab und vergleichen mit (II):

$$(\partial_2 \Phi)(x, y) = g'(y) \quad \stackrel{\text{(II)}}{\implies} \quad g'(y) = \frac{1}{y}$$

Hieraus folgt $g(y) = \ln(y) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Also ist

$$\Phi :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y, z) := \ln(x) + \ln(y) + c = \ln(xy) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

ein Kandidat für ein Potential. Durch partielles Ableiten sieht man, dass Φ tatsächlich ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist. In der Tat gilt für alle $(x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$

$$(\partial_1 \Phi)(x, y) = \frac{1}{x} = F_1(x, y) \quad \text{und} \quad (\partial_2 \Phi)(x, y) = \frac{1}{y} = F_2(x, y).$$

Insbesondere ist damit auch gezeigt, dass $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ ist.

Lösungsweg 2: $\vec{\mathbf{F}}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen, denn

$$(\partial_1 F_2)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{y} = 0, \quad (\partial_2 F_1)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x} = 0,$$

und somit $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ in $]0, \infty[\times]0, \infty[$. Außerdem ist $]0, \infty[\times]0, \infty[$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Nach dem Integrabilitätskriterium für einfach zusammenhängende Gebiete (in Satz 19.45) ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ in $]0, \infty[\times]0, \infty[$. Wir berechnen nun ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}$ mit Hilfe geeigneter Wegintegrale.

Variante 2a: $]0, \infty[\times]0, \infty[$ ist ein sternförmiges Gebiet bzgl. des Punkts $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$. Die Verbindungsstrecke von $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1)$ nach $\vec{\mathbf{p}} = (x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$ ist

$$\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}(t) := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t(x-1) \\ 1+t(y-1) \end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_{\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_0^1 \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}_{\vec{\mathbf{p}}}(t)) \cdot \vec{\gamma}'_{\vec{\mathbf{p}}}(t) dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t(x-1)} \\ \frac{1}{1+t(y-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x-1}{1+t(x-1)} + \frac{y-1}{1+t(y-1)} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\ln(1 + t(x - 1)) + \ln(1 + t(y - 1)) \right]_{t=0}^{t=1} \\
&= [\ln(x) + \ln(y)] - \left[\underbrace{\ln(1)}_{=0} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} \right] = \ln(xy).
\end{aligned}$$

Dabei berechnet sich das Integral mit den Substitutionen

$$s = 1 + t(x - 1) \quad \text{bzw.} \quad s = 1 + t(y - 1)$$

für den ersten bzw. den zweiten Summanden des Integranden. Also ist

$$\Phi :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) := \ln(xy),$$

ein Potential von \vec{F} .

Variante 2b: $]0, \infty[\times]0, \infty[$ ist ein offener Quader. Wir wählen den Punkt $(a_1, a_2) = (1, 1) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$ und erhalten für $(x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y) &= \int_1^x F_1(t, 1) dt + \int_1^y F_2(x, t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt \\
&= \left[\ln(t) \right]_{t=1}^{t=x} + \left[\ln(t) \right]_{t=1}^{t=y} = \ln(x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \ln(y) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \ln(xy).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\Phi :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) := \ln(xy),$$

ein Potential von \vec{F} .

Divergenz, Laplace-Operator und Rotation

In diesem Teilkapitel lernen wir die wichtigen Differentialoperatoren Divergenz und Rotation sowie den Laplace-Operator kennen. Mittels der Divergenz können wir quellenfreie Vektorfelder definieren und mit der Rotation wirbelfreie Vektorfelder. Weiter werden wir mit Hilfe der Rotation auch Wirbelfelder einführen, und wir erhalten weitere Resultate über konservative Vektorfelder. Die Differentialoperatoren Divergenz und Rotation, sowie ihre physikalische Interpretation, spielen später eine ganz wichtige Rolle, wenn wir die Integralsätze von Gauß und Stokes kennenlernen. Dann wird auch die Anschauung hinter den Begriffen „quellenfrei“ und „wirbelfrei“ noch klarer.

20.1 Die Divergenz

Wir lernen zunächst den Differentialoperator Divergenz kennen.

Definition 20.1. (Divergenz; quellenfreies Vektorfeld)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

(1) Das Skalarfeld

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \dots + \partial_n F_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt die **Divergenz von $\vec{\mathbf{F}}$** .

(2) $\vec{\mathbf{F}}$ heißt **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = 0$ auf Ω gilt (also, wenn $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ für alle $\vec{\mathbf{x}} \in \Omega$).

Bemerkung 20.2. (Divergenz)

- (1) Mit der Spur einer Matrix (vgl. Kapitel 13 der HM B) kann man die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{\mathbf{F}}$ auch als die Spur der der Ableitung(smatrix) $\partial \vec{\mathbf{F}}$ auffassen, also $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \operatorname{Spur}(\partial \vec{\mathbf{F}})$.
- (2) In der Literatur findet man manchmal die Bezeichnung $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}$ statt $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$. Dabei steht ∇ („Nabla“) für den formalen „Differentialoperator“

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix}$$

und „ \cdot “ steht für das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n , also

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i.$$

- (3) Hinter dem Begriff „quellenfrei“ steckt eine **physikalische Anschauung**: Beschreibt das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung, so bedeutet $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}}) = 0$, dass im Punkt $\vec{\mathbf{x}}$ **keine Quelle** (Flüssigkeit tritt aus) und **keine Senke** (Flüssigkeit wird abgeleitet) vorliegt.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 20.3. (Divergenz)

Die Divergenz des stetig differenzierbaren Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} y e^{xy} + z^2 \\ x e^{xy} \\ 2 x z \end{bmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) &= (\partial_1 F_1)(x, y, z) + (\partial_2 F_2)(x, y, z) + (\partial_3 F_3)(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (y e^{xy} + z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (2 x z) \\ &= y^2 e^{xy} + x^2 e^{xy} + 2 x. \end{aligned}$$

Beispiel 20.4. (quellenfreies Vektorfeld)

Sei $n \geq 2$, $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ und $K \in \mathbb{R}$. Das Zentralfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) := \frac{K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n} \vec{\mathbf{x}}.$$

ist quellenfrei, denn mit der Produktregel finden wir

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^n (\partial_i F_i)(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{n K}{|\vec{\mathbf{x}}|^{n+1}} \cdot \frac{x_i}{|\vec{\mathbf{x}}|} \cdot x_i + \frac{K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{n K}{|\vec{\mathbf{x}}|^{n+2}} \cdot x_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n}}_{= \frac{nK}{|\vec{\mathbf{x}}|^n}} \\ &= \frac{n K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n} - \frac{n K}{|\vec{\mathbf{x}}|^{n+2}} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \frac{n K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n} - \frac{n K}{|\vec{\mathbf{x}}|^{n+2}} \cdot |\vec{\mathbf{x}}|^2 = 0 \quad \text{für alle } \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung der Produktregel haben wir genutzt, dass gilt

$$\frac{K}{|\vec{\mathbf{x}}|^n} x_i = \frac{K}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2})^n} x_i = K \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right)^{-n} x_i$$

und somit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K}{|\vec{x}|^n} x_i \right) \\ &= -n K \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right)^{-(n+1)} \cdot \frac{2 x_i}{2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \cdot x_i + \frac{K}{|\vec{x}|^n} \\ &= -\frac{n K}{|\vec{x}|^{n+1}} \cdot \frac{x_i}{|\vec{x}|} \cdot x_i + \frac{K}{|\vec{x}|^n}. \end{aligned}$$

Als Letztes halten wir die wichtigsten Rechenregeln für die Divergenz fest.

Satz 20.5. (Rechenregeln für die Divergenz)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils stetig differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- (1) $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$
- (2) $\operatorname{div}(\alpha \vec{F}) = \alpha \operatorname{div} \vec{F}$
- (3) $\operatorname{div}(\Phi \vec{F}) = \Phi (\operatorname{div} \vec{F}) + (\nabla \Phi) \cdot \vec{F}$

Beweis von Satz 20.5: Satz 20.5 (1) und Satz 20.5 (2) folgen direkt aus den üblichen Rechenregeln für Ableitungen. Wir beweisen daher nur Satz 20.5 (3):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Phi \vec{F}) &= \sum_{i=1}^n \partial_i(\Phi F_i) = \sum_{i=1}^n (\partial_i \Phi) F_i + \Phi (\partial_i F_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_i \Phi) F_i + \Phi \sum_{i=1}^n (\partial_i F_i) \\ &= (\nabla \Phi) \cdot \vec{F} + \Phi (\operatorname{div} \vec{F}), \end{aligned}$$

womit Satz 20.5 (3) bewiesen ist. □

20.2 Der Laplace-Operator

In diesem Teilkapitel lernen wir den Laplace-Operator kennen. Dieser kommt in wichtigen partiellen Differentialgleichungen vor, z.B. der Wellengleichung und der Wärmeleitungsgleichung.

Definition 20.6. (Laplace-Operator; harmonisch)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

(1) Wir schreiben

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Δ heißt der **Laplace-Operator**.

(2) f heißt **harmonisch**, wenn $\Delta f = 0$ in Ω gilt, d.h. wenn ∇f quellenfrei ist.

Bemerkung 20.7. (Laplace-Operator)

In der Literatur findet man auch die Bezeichnung ∇^2 für Δ , denn

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f).$$

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 20.8. (Laplace-Operator)

Für das zweimal stetig differenzierbare Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := e^{xyz},$$

liefert die Anwendung des Laplace-Operators

$$\begin{aligned} (\Delta f)(x, y, z) &= \sum_{i=1}^3 (\partial_i^2 f)(x, y, z) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (y z e^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial y} (x z e^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial z} (x y e^{xyz}) \\ &= (y z)^2 e^{xyz} + (x z)^2 e^{xyz} + (x y)^2 e^{xyz} \\ &= (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2) e^{xyz}. \end{aligned}$$

Beispiel 20.9. (harmonisches Potential)

Sie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\vec{x}) := \begin{cases} K \ln(|\vec{x}|) & \text{wenn } n = 2, \\ \frac{K}{2-n} |\vec{x}|^{2-n} & \text{wenn } n \geq 3, \end{cases}$$

das **Newtonsche Potential** oder **Coulombsche Potential** aus Beispiel 19.10. Nach Beispiel 19.10 gilt

$$\nabla \Phi = \frac{K}{|\vec{x}|^n} \vec{x},$$

und nach Beispiel 20.4 ist $\nabla \Phi$ quellenfrei. Also gilt

$$\Delta \Phi = \operatorname{div}(\nabla \Phi) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\},$$

d.h. Φ ist harmonisch.

Der nächste Satz hält die Rechenregeln für den Laplace-Operator fest.

Satz 20.10. (Rechenregeln für den Laplace-Operator)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils zweimal stetig differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- (1) $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$
- (2) $\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f$
- (3) $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f(\Delta g)$

Beweis von Satz 20.10: Wir beweisen diesen Satz in einer Übungsaufgabe. \square

20.3 Spezialfall $n = 3$: Die Rotation

Der Begriff der Rotation ist **nur** für Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^3 mit Werten in \mathbb{R}^3 erklärt.

Definition 20.11. (Rotation; wirbelfreies Vektorfeld)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

(1) Das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} := \begin{bmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt die **Rotation von $\vec{\mathbf{F}}$** .

(2) $\vec{\mathbf{F}}$ heißt **wirbelfrei**, wenn $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$ in Ω ist.

Bemerkung 20.12. (Rotation)

(1) In der Literatur findet man auch die Bezeichnung $\nabla \times \vec{\mathbf{F}}$ für $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}$, denn formal gilt

$$\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}.$$

(2) Die englische Bezeichnung für „Rotation“ ist „curl“.

(3) Auch die **Rotation** und der Begriff „**wirbelfrei**“ haben eine **physikalische Anschauung**:

Ist $(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$, so gibt $(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}})$ die **Richtung der Rotationsachse für lokale Wirbel** um den Punkt $\vec{\mathbf{x}}$ an, wobei die Rotationsachse im Sinne der Rechten-Hand-Regel orientiert ist. Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist um so größer, je größer $|(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}})|$ ist.

Ist $(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, so hat $\vec{\mathbf{F}}$ im Punkt $\vec{\mathbf{x}}$ keinen lokalen Wirbel.

Ist $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$ auf ganz Ω , so hat $\vec{\mathbf{F}}$ in keinem Punkt von Ω einen lokalen Wirbel und ist somit **wirbelfrei**.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 20.13. (Rotation)

Die Rotation des stetig differenzierbaren Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} e^{xy} \\ y \\ x + z \end{bmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} (\partial_2 F_3)(x, y, z) - (\partial_3 F_2)(x, y, z) \\ (\partial_3 F_1)(x, y, z) - (\partial_1 F_3)(x, y, z) \\ (\partial_1 F_2)(x, y, z) - (\partial_2 F_1)(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(x + z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial x}(x + z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ 0 - x e^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -x e^{xy} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$ ist also **nicht** wirbelfrei.

Beispiel 20.14. (wirbelfreies Vektorfeld)

Die Rotation des stetig differenzierbaren Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} y e^{xy} + z^2 \\ x e^{xy} \\ 2 x z \end{bmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} (\partial_2 F_3)(x, y, z) - (\partial_3 F_2)(x, y, z) \\ (\partial_3 F_1)(x, y, z) - (\partial_1 F_3)(x, y, z) \\ (\partial_1 F_2)(x, y, z) - (\partial_2 F_1)(x, y, z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(2 x z) - \frac{\partial}{\partial z}(x e^{xy}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(y e^{xy} + z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2 x z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(y e^{xy} + z^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 2z - 2z \\ e^{xy} + xy e^{xy} - (e^{xy} + xy e^{xy} + 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Also ist das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$ wirbelfrei.

Wir halten die Rechenregeln für die Rotation in einem Satz fest.

Satz 20.15. (Rechenregeln für die Rotation)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, und seien $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\mathbf{G}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils stetig differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- (1) $\text{rot}(\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{G}}) = \text{rot} \vec{\mathbf{F}} + \text{rot} \vec{\mathbf{G}}$
- (2) $\text{rot}(\alpha \vec{\mathbf{F}}) = \alpha \text{rot} \vec{\mathbf{F}}$
- (3) $\text{rot}(\Phi \vec{\mathbf{F}}) = (\nabla \Phi) \times \vec{\mathbf{F}} + \Phi \text{rot} \vec{\mathbf{F}}$
- (4) $\text{div}(\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{G}}) = (\text{rot} \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{G}} - \vec{\mathbf{F}} \cdot (\text{rot} \vec{\mathbf{G}})$
- (5) $\text{rot}(\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{G}}) = (\text{div} \vec{\mathbf{G}}) \vec{\mathbf{F}} - (\text{div} \vec{\mathbf{F}}) \vec{\mathbf{G}} + (\partial \vec{\mathbf{F}}) \vec{\mathbf{G}} - (\partial \vec{\mathbf{G}}) \vec{\mathbf{F}}$
- (6) Ist $\vec{\mathbf{F}}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{\mathbf{F}}) = \nabla(\text{div} \vec{\mathbf{F}}) - \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{bmatrix}.$$

Beweis von Satz 20.15: Wir beweisen die meisten dieser Formeln in Übungsaufgaben. \square

20.4 Die Integrabilitätsbedingung im Fall $n=3$

In diesem Teilkapitel sei ebenso wie im vorigen stets $n = 3$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen.

Satz 20.16. (Integrabilitätsbedingung erfüllt \iff wirbelfrei)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann erfüllt \vec{F} die **Integrabilitätsbedingung**

$$\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \text{für alle } i, k = 1, 2, 3 \quad (20.1)$$

auf ganz Ω **genau dann, wenn \vec{F} wirbelfrei ist.**

Beweis von Satz 20.16: Nach der Definition der Rotation gilt:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \vec{F} \text{ erfüllt (20.1).} \quad \square$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir weiter Folgerungen ziehen.

Satz 20.17. (wirbelfreie Vektorfelder)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen.

- (1) Ist $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so ist das Vektorfeld $\nabla \Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ **wirbelfrei**.
- (2) Ist $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und **konservativ**, so ist \vec{F} **wirbelfrei**.

Beweis von Satz 20.17:

- (1) Da Φ zweimal stetig differenzierbar ist, gilt nach dem Satz von Schwarz (siehe Satz 16.52 im Skript der HM B)

$$\partial_i \partial_k \Phi = \partial_k \partial_i \Phi \quad \text{für alle } i, k \in \{1, 2, 3\} \text{ in ganz } \Omega.$$

Damit erfüllt $\nabla \Phi$ in Ω die Integrabilitätsbedingung (20.1), und nach Satz 20.16 ist $\nabla \Phi$ wirbelfrei.

- (2) Da \vec{F} stetig differenzierbar und konservativ ist, hat \vec{F} ein zweimal stetig differenzierbares Potential Φ mit $\nabla \Phi = \vec{F}$. Die Aussage folgt nun direkt aus Satz 20.17 (1). \square

Insbesondere können wir nun ein spezielles Integrabilitätskriterium für Vektorfelder $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ formulieren.

Satz 20.18. (Integrabilitätskriterium für $n = 3$)

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ist **genau dann konservativ, wenn es wirbelfrei ist.**

Beweis von Satz 20.18: Der Satz folgt, indem man die Aussagen von Satz 20.16, Satz 20.17 und Satz 19.45 kombiniert. Genauer gilt:

- *Beweis von \implies :* Ist $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ, so ist $\vec{\mathbf{F}}$ nach Satz 20.17 (2) wirbelfrei.
- *Beweis von \impliedby :* Ist $\vec{\mathbf{F}}$ wirbelfrei, so erfüllt $\vec{\mathbf{F}}$ nach Satz 20.16 die Integrabilitätsbedingung. Da Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, folgt nach Satz 19.45, dass $\vec{\mathbf{F}}$ konservativ ist. \square

Mit Hilfe von Satz 20.18 können wir nun direkt weitere Beispiele wirbelfreier Vektorfelder angeben.

Beispiel 20.19. (wirbelfreie Vektorfelder)

(a) Das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} z \\ z \\ x + y \end{bmatrix},$$

ist nach Beispiel 19.46 konservativ. Also wissen wir nach Satz 20.17 (2), dass $\vec{\mathbf{F}}$ wirbelfrei ist.

(b) Das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} e^{xy} \\ y \\ x + z \end{bmatrix},$$

aus Beispiel 20.13 hat nach Beispiel 20.13 die Rotation

$$(\text{rot } \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -x e^{xy} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d.h. \vec{F} ist **nicht** wirbelfrei. Also ist \vec{F} nach Satz 20.17 (2) nicht konservativ.

(c) Das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) := \begin{bmatrix} y e^{xy} + z^2 \\ x e^{xy} \\ 2 x z \end{bmatrix},$$

ist nach Beispiel 20.14 wirbelfrei. \mathbb{R}^3 ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Also ist \vec{F} nach Satz 20.18 konservativ.

Zur Übung berechnen wir ein Potential von \vec{F} mit der Formel (siehe Satz 19.32 und Bemerkung 19.34) für die Berechnung des Potential auf offenen Quadern (\mathbb{R}^3 ist ein offener Quader): Sei $\vec{a} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt nach Bemerkung 19.34

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x e^{xt} dt + \int_0^z 2 x t dt \\ &= 0 + \left[e^{xt} \right]_{t=0}^{t=y} + \left[x t^2 \right]_{t=0}^{t=z} \\ &= e^{xy} - e^0 + x z^2 = e^{xy} + x z^2 - 1. \end{aligned}$$

20.5 Der Spezialfall $n = 3$: Wirbelfelder und Vektorpotentiale

In diesem Teilkapitel sei ebenso wie im vorigen stets $n = 3$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen.

Wir können nun mit Hilfe der Rotation sogenannte Wirbelfelder einführen.

Definition 20.20. (Wirbelfeld)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Ein stetiges Vektorfeld $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt ein **Wirbelfeld**, wenn es ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{F} \quad \text{in } \Omega.$$

\vec{G} heißt dann ein **Vektorpotential** von \vec{F} .

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 20.21. (Wirbelfeld)

Das stetige Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} 2y \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix},$$

ist ein Wirbelfeld, denn das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{G}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{G}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix},$$

ist ein Vektorpotential von $\vec{\mathbf{F}}$, da gilt:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{G}})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} (\partial_2 G_3)(x, y, z) - (\partial_3 G_2)(x, y, z) \\ (\partial_3 G_1)(x, y, z) - (\partial_1 G_3)(x, y, z) \\ (\partial_1 G_2)(x, y, z) - (\partial_2 G_1)(x, y, z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2y - 0 \\ 0 - 2x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) \end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Beispielsweise ist aber auch das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{H}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{H}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix},$$

ein Vektorpotential von $\vec{\mathbf{F}}$, wie man durch Berechnen von $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}$ leicht überprüft.

Das Beispiel hat gezeigt, dass ein stetiges Wirbelfeld mehrere Vektorpotentiale haben kann. Tatsächlich gibt der nachfolgende Satz.

Satz 20.22. (Vektorpotentiale und konservative Vektorfelder)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Wirbelfeld. Dann gelten:

- (1) Ist \vec{G} ein Vektorpotential von \vec{F} und ist \vec{K} irgendein in Ω konservatives C^1 -Vektorfeld, dann ist auch $\vec{G} + \vec{K}$ ein Vektorpotential von \vec{F} .
- (2) Ist Ω einfach zusammenhängend und sind \vec{G} und \vec{H} zwei Vektorpotentiale von \vec{F} in Ω , dann ist $\vec{G} - \vec{H}$ ein in Ω konservatives Vektorfeld.

Beweis von Satz 20.22:

- (1) Da \vec{K} in Ω konservativ ist, gilt $\text{rot } \vec{K} = \vec{0}$ in Ω nach Satz 20.17 (2). Also erhalten wir in Ω

$$\text{rot } (\vec{G} + \vec{K}) = \text{rot } \vec{G} + \text{rot } \vec{K} = \vec{F} + \vec{0} = \vec{F},$$

d.h. $\vec{G} + \vec{K}$ ist ein Vektorpotential von \vec{F} .

- (2) Es gilt in Ω

$$\text{rot } (\vec{G} - \vec{H}) = \text{rot } \vec{G} - \text{rot } \vec{H} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0},$$

d.h. $\vec{G} - \vec{H}$ ist in Ω wirbelfrei. Nach Satz 20.16 erfüllt $\vec{G} - \vec{H}$ dann die Integrabilitätsbedingungen in Ω . Da Ω einfach zusammenhängend ist, kann das Integrabilitätskriterium (siehe Satz 19.45) angewendet werden und es folgt, dass $\vec{G} - \vec{H}$ in Ω konservativ ist. \square

Als Nächstes zeigen wir, dass Wirbelfelder notwendigerweise quellenfrei sein müssen. Dazu erinnern wir uns, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} quellenfrei heißt, wenn $\text{div } (\vec{F}) = 0$ gilt.

Satz 20.23. (Wirbelfeld \implies quellenfrei)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, und sei $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt: Ist \vec{F} ein **Wirbelfeld** mit zweimal stetig differenzierbarem Vektorpotential, so ist \vec{F} **quellenfrei**.

Beweis von Satz 20.23: Sei $\vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^2 -Vektorpotential von \vec{F} . Mit

$\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} &= \text{div}(\text{rot } \vec{G}) = \text{div} \begin{pmatrix} \left[\partial_2 G_3 - \partial_3 G_2 \right] \\ \left[\partial_3 G_1 - \partial_1 G_3 \right] \\ \left[\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1 \right] \end{pmatrix} \\ &= \partial_1(\partial_2 G_3 - \partial_3 G_2) + \partial_2(\partial_3 G_1 - \partial_1 G_3) + \partial_3(\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1) \\ &= \partial_1 \partial_2 G_3 - \partial_1 \partial_3 G_2 + \partial_2 \partial_3 G_1 - \partial_2 \partial_1 G_3 + \partial_3 \partial_1 G_2 - \partial_3 \partial_2 G_1 \\ &= (\partial_1 \partial_2 G_3 - \partial_2 \partial_1 G_3) + (\partial_2 \partial_3 G_1 - \partial_3 \partial_2 G_1) + (\partial_1 \partial_3 G_2 - \partial_3 \partial_1 G_2) = 0 \end{aligned}$$

in ganz Ω , denn nach dem Satz von Schwarz (vgl. Satz 16.52 im Skript der HM B) gilt $\partial_i \partial_k f = \partial_k \partial_i f$, wenn die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist. Nach Voraussetzung sind aber \vec{G} und damit G_1, G_2, G_3 zweimal stetig differenzierbar in Ω . \square

Wenn wir zusätzlich voraussetzen, dass das zugrundeliegende Gebiet Ω sternförmig ist, dann können wir auch die Umkehrung der Aussage von Satz 20.23 formulieren und beweisen.

Satz 20.24. (auf sternförmigen Gebiet: quellenfrei \implies Wirbelfeld)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein bzgl. $\vec{a} \in \Omega$ sternförmiges Gebiet und $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt: Ist \vec{F} **quellenfrei**, dann ist \vec{F} ein **Wirbelfeld**.

In diesem Fall ist ein Vektorpotential von \vec{F} gegeben durch

$$\vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{G}(\vec{p}) := \int_0^1 t \vec{F}(\vec{a} + t(\vec{p} - \vec{a})) \times (\vec{p} - \vec{a}) dt.$$

(Dabei ist das Integral komponentenweise zu berechnen.)

Beweisskizze von Satz 20.24: Wir setzen voraus, dass \vec{F} quellenfrei ist, und zeigen, dass \vec{F} dann ein Vektorpotential besitzt. Dazu betrachten wir zuerst den Fall $\vec{a} = \vec{0}$. Sei also

$$\vec{G}(\vec{p}) := \int_0^1 t \vec{F}(t\vec{p}) \times \vec{p} dt, \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \Omega.$$

Wir zeigen, dass $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{G}} = \vec{\mathbf{F}}$ in Ω gilt.

Man kann zeigen, dass es auf Grund der Voraussetzungen erlaubt ist, die Rotation in das Integral zu ziehen:

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{G}})(\vec{\mathbf{p}}) = \int_0^1 t \operatorname{rot} \left(\vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \times \vec{\mathbf{p}} \right) dt. \quad (20.2)$$

Mit der Rechenregel aus Satz 20.15 (5) erhalten wir mit

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{p}} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \text{und} \quad \partial \vec{\mathbf{p}} = \partial \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_3,$$

dass gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \times \vec{\mathbf{p}} \right) &= 3 \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) - t (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(t\vec{\mathbf{p}}) \vec{\mathbf{p}} + t (\partial \vec{\mathbf{F}})(t\vec{\mathbf{p}}) \vec{\mathbf{p}} - \mathbf{E}_3 \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \\ &= 2 \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) + t (\partial \vec{\mathbf{F}})(t\vec{\mathbf{p}}) \vec{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt genutzt haben, dass $\vec{\mathbf{F}}$ quellenfrei ist, also $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = 0$. Einsetzen in (20.2) ergibt

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{G}})(\vec{\mathbf{p}}) &= \int_0^1 \left[2t \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) + t^2 (\partial \vec{\mathbf{F}})(t\vec{\mathbf{p}}) \vec{\mathbf{p}} \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t^2 \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \right) dt = \left[t^2 \vec{\mathbf{F}}(t\vec{\mathbf{p}}) \right]_{t=0}^{t=1} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{p}}), \end{aligned}$$

und wir haben gezeigt, dass $\vec{\mathbf{G}}$ ein Vektorpotential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist.

Ist $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, so setzt man

$$\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{p}}) := \int_0^1 t \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{a}})) \times (\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{a}}) dt, \quad \vec{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \Omega.$$

und rechnet analog. □

Betrachten wir nun ein Beispiel für die Berechnung eines Vektorpotentials eines gegebenen quellenfreien stetig differenzierbaren Vektorfelds auf einem sternförmigen Gebiet.

Beispiel 20.25. (Vektorpotential berechnen)

Betrachten wir

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} z \\ z \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{\mathbf{F}}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und \mathbb{R}^3 ist ein sternförmiges Gebiet bzgl. $\vec{\mathbf{0}}$. Wegen

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + y) = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{in ganz } \mathbb{R}^3$$

ist $\vec{\mathbf{F}}$ quellenfrei in \mathbb{R}^3 . Nach Satz 20.24 ist das Vektorfeld ein Wirbelfeld.

Wir berechnen nun mit der Formel aus Satz 20.24 ein Vektorpotential $\vec{\mathbf{G}}$ von $\vec{\mathbf{F}}$. Mit $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$ ist $\vec{\mathbf{G}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{\mathbf{G}}(x, y, z) := \int_0^1 t \vec{\mathbf{F}}(tx, ty, tz) \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dt.$$

Wir vereinfachen zunächst den Integranden:

$$t \vec{\mathbf{F}}(tx, ty, tz) \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} tz \\ tz \\ tx + ty \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} z^2 - xy - y^2 \\ x^2 + xy - z^2 \\ yz - xz \end{bmatrix}.$$

Einsetzen in das Integral liefert

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{G}}(x, y, z) &= \int_0^1 t^2 \begin{bmatrix} z^2 - xy - y^2 \\ x^2 + xy - z^2 \\ yz - xz \end{bmatrix} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \begin{bmatrix} z^2 - xy - y^2 \\ x^2 + xy - z^2 \\ yz - xz \end{bmatrix} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} z^2 - xy - y^2 \\ x^2 + xy - z^2 \\ yz - xz \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vektorpotential von $\vec{\mathbf{F}}$ ist also durch

$$\vec{\mathbf{G}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{G}}(x, y, z) := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} z^2 - xy - y^2 \\ x^2 + xy - z^2 \\ yz - xz \end{bmatrix},$$

gegeben.

20.6 Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme

Wir erinnern uns zunächst an das, was wir in der Linearen Algebra (siehe Kapitel 12 im Skript der HM B) über Basen, Koordinaten und Basiswechsel gelernt haben:

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine **Basis** von V . Dann hat jeder Vektor $x \in V$ eine **eindeutige Darstellung** bzgl. der Basis B :

$$x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_n b_n,$$

und wir nennen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die **(eindeutig bestimmten) Koordinaten von x bzgl. der Basis B** und

$$\vec{x}_B = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

den **(eindeutig bestimmten) Koordinatenvektor von x bzgl. der Basis B** .

Ist $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ eine andere Basis von V , so hat $x \in V$ ebenfalls eine eindeutig bestimmte Darstellung bzgl. der Basis D ,

$$x = \zeta_1 d_1 + \zeta_2 d_2 + \dots + \zeta_n d_n,$$

mit den (eindeutig bestimmten) Koordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ und dem (eindeutig bestimmten) Koordinatenvektor

$$\vec{x}_D = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir haben gelernt, dass man mit der **Transformationsmatrix** $\mathbf{A}_{D,B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für den Basiswechsel von der Basis B zur Basis D mittels

$$\vec{x}_D = \mathbf{A}_{D,B} \vec{x}_B$$

aus dem Koordinatenvektor von x bzgl. der Basis B den Koordinatenvektor von x bzgl. der Basis D berechnen kann. Das bedeutet, dass die **bijektive Abbildung**

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{f}(\vec{x}) := \mathbf{A}_{D,B} \vec{x},$$

gerade **den Basiswechsel** für die Koordinatenvektoren **von der Basis B zur Basis D durchführt**.

Diese Idee wollen wir nun verallgemeinern.

Definition 20.26. (Diffeomorphismus/Koordinatentransformation)

Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ heißt ein **Diffeomorphismus** oder eine **Koordinatentransformation**, wenn

- (1) $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ **bijektiv** ist,
- (2) \vec{Q} in D **unendlich oft differenzierbar** ist und
- (3) $\det((\partial\vec{Q})(\vec{u})) \neq 0$ für alle $\vec{u} \in D$ ist.

Auf die Voraussetzung in Satz 20.26, dass „ D offen ist“, kann in der Praxis verzichtet werden, sofern \vec{Q} auch auf einer offenen Obermenge von D definiert und dort unendlich oft differenzierbar ist.

Die „üblichen Koordinaten“ für \mathbb{R}^n bzgl. der Standardbasis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ mit

$$\vec{e}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

werden als **kartesische Koordinaten** bezeichnet.

Betrachten wir als Beispiele die wichtigsten Koordinatensysteme für \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 außer den kartesischen Koordinaten.

Beispiel 20.27. (Polarkoordinaten für \mathbb{R}^2)

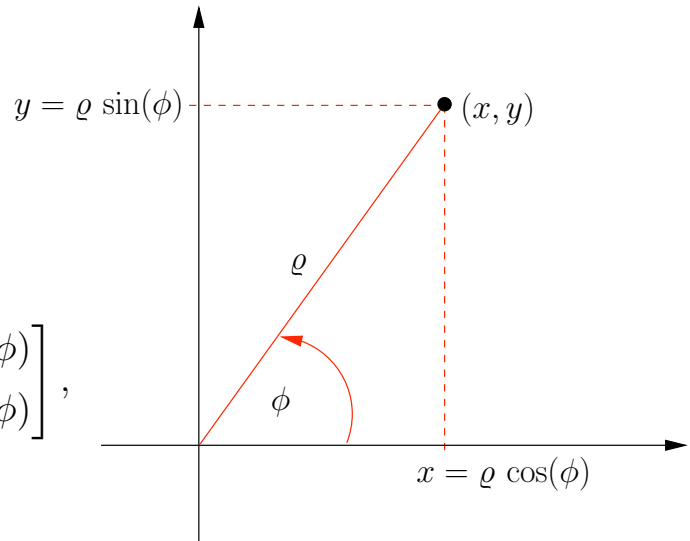
Ebene **Polarkoordinaten** für \mathbb{R}^2 sind wie folgt definiert:

$$\vec{Q}(\varrho, \phi) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[.$$

Seien $D :=]0, \infty[\times [0, 2\pi[$ und $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dann gelten:

- (1) $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ ist bijektiv.
- (2) \vec{Q} ist unendlich oft differenzierbar (sogar auf $]0, \infty[\times \mathbb{R}$).
- (3) Die Ableitung ist

$$(\partial \vec{Q})(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\varrho \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \varrho \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

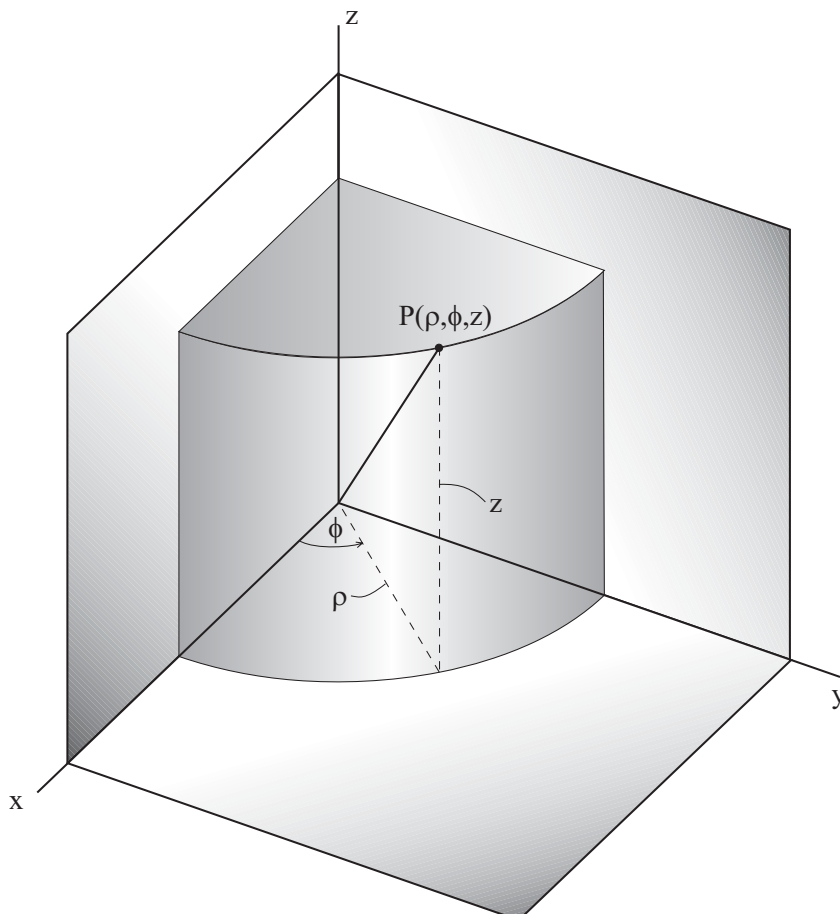


und somit gilt

$$\det((\partial \vec{Q})(\varrho, \phi)) = \varrho \cos^2(\phi) + \varrho \sin^2(\phi) = \varrho \neq 0 \quad \text{da } \varrho > 0.$$

Also ist \vec{Q} eine Koordinatentransformation.

Beispiel 20.28. (Zylinderkoordinaten für \mathbb{R}^3)



$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Zylinderkoordinaten für \mathbb{R}^3 sind wie folgt definiert:

$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi, z) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ z \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Seien $D :=]0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ und $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Dann gelten:

- (1) $\vec{\mathbf{Q}} : D \rightarrow \Omega$ ist bijektiv.
- (2) $\vec{\mathbf{Q}}$ ist unendlich oft differenzierbar (sogar auf $]0, \infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
- (3) Die Ableitung ist

$$(\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi, z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\varrho \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \varrho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und somit gilt (mit Entwickeln nach der dritten Zeile)

$$\begin{aligned} \det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi, z)) &= (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\varrho \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \varrho \cos(\phi) \end{bmatrix} \right) \\ &= \varrho \cos^2(\phi) + \varrho \sin^2(\phi) = \varrho \neq 0 \quad \text{da } \varrho > 0. \end{aligned}$$

Also ist $\vec{\mathbf{Q}}$ eine Koordinatentransformation.

Beispiel 20.29. (Kugelkoordinaten für \mathbb{R}^3)

Kugelkoordinaten für \mathbb{R}^3 sind wie folgt definiert:

$$\vec{\mathbf{Q}}(r, \theta, \phi) := \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad r > 0, \quad \theta \in]0, \pi[, \quad \phi \in [0, 2\pi[.$$

Seien $D :=]0, \infty[\times]0, \pi[\times [0, 2\pi[$ und $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Dann gelten:

- (1) $\vec{\mathbf{Q}} : D \rightarrow \Omega$ ist bijektiv.
- (2) $\vec{\mathbf{Q}}$ ist unendlich oft differenzierbar (sogar auf $]0, \infty[\times]0, \pi[\times \mathbb{R}$).

(3) Die Ableitung ist

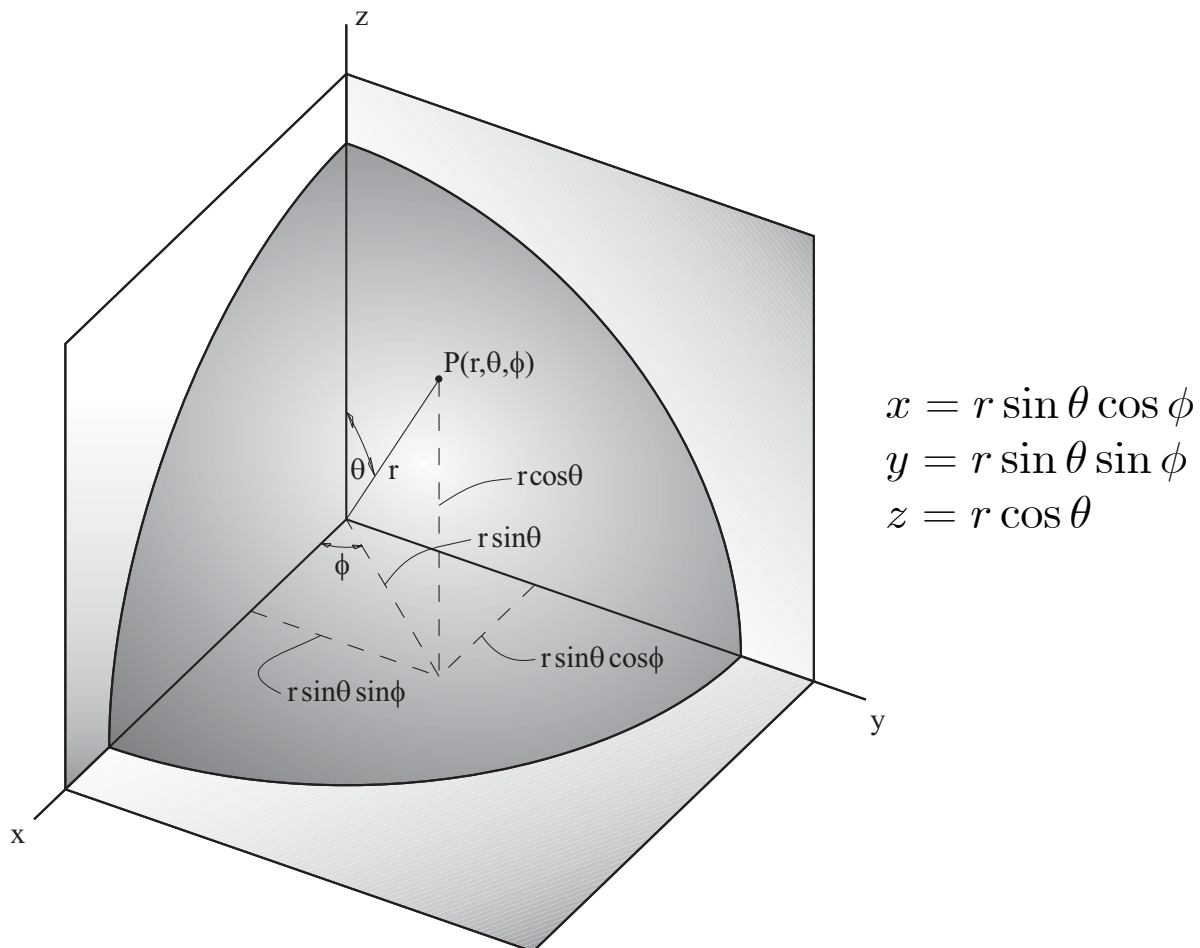
$$(\partial \vec{Q})(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

In einer Übungsaufgabe zeigen wir, dass gilt

$$\det((\partial \vec{Q})(r, \theta, \phi)) = r^2 \sin(\theta) \neq 0$$

für alle $(r, \theta, \phi) \in]0, \infty[\times]0, \pi[\times [0, 2\pi[$.

Also ist \vec{Q} eine Koordinatentransformation.



Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten lassen sich jeweils auch für \mathbb{R}^n mit $n \geq 4$ passend definieren. Kugelkoordinaten für \mathbb{R}^3 sind die Verallgemeinerung der Polarkoordinaten für \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 20.30. (orthogonale Koordinatentransformation)

Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ eine Koordinatentransformation.

- (1) Wegen $\det((\partial\vec{Q})(\vec{u})) \neq 0$ für alle $\vec{u} \in D$ ist $(\partial\vec{Q})(\vec{u})$ für jedes $\vec{u} \in D$ invertierbar, und die Spaltenvektoren

$$\vec{b}_1(\vec{u}) := (\partial_1\vec{Q})(\vec{u}), \quad \vec{b}_2(\vec{u}) := (\partial_2\vec{Q})(\vec{u}), \quad \dots, \quad \vec{b}_n(\vec{u}) := (\partial_n\vec{Q})(\vec{u}),$$

bilden eine **Basis von \mathbb{R}^n** . Beachten Sie, dass diese Basis im Allgemeinen von \vec{u} abhängt.

- (2) \vec{Q} heißt eine **orthogonale Koordinatentransformation**, falls die Vektoren $\vec{b}_1(\vec{u}), \vec{b}_2(\vec{u}), \dots, \vec{b}_n(\vec{u})$ für jedes $\vec{u} \in D$ **paarweise orthogonal** sind. Wir setzen dann

$$\vec{e}_1(\vec{u}) := \frac{\vec{b}_1(\vec{u})}{|\vec{b}_1(\vec{u})|}, \quad \vec{e}_2(\vec{u}) := \frac{\vec{b}_2(\vec{u})}{|\vec{b}_2(\vec{u})|}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n(\vec{u}) := \frac{\vec{b}_n(\vec{u})}{|\vec{b}_n(\vec{u})|}.$$

Dann ist $(\vec{e}_1(\vec{u}), \vec{e}_2(\vec{u}), \dots, \vec{e}_n(\vec{u}))$ für jedes $\vec{u} \in D$ eine **Orthonormalbasis (ONB)** von \mathbb{R}^n .

Betrachten wir einige Beispiele für orthogonale Koordinatentransformationen.

Beispiel 20.31. (orthogonale Koordinatentransformationen)

- (a) Für die **Polarkoordinaten für \mathbb{R}^2** aus Beispiel 20.27,

$$\vec{Q}(\varrho, \phi) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[,$$

haben wir bereits die Ableitung berechnet:

$$(\partial\vec{Q})(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\varrho \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \varrho \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Es gilt also

$$\vec{b}_1 = \vec{b}_1(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \vec{b}_2(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} -\varrho \sin(\phi) \\ \varrho \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

und $\vec{\mathbf{b}}_1 \perp \vec{\mathbf{b}}_2$, d.h. $\vec{\mathbf{Q}}$ ist eine orthogonale Koordinatentransformation. Es gilt

$$|\vec{\mathbf{b}}_1| = 1 \quad \text{und} \quad |\vec{\mathbf{b}}_2| = \varrho.$$

Wir setzen

$$\vec{\mathbf{e}}_\varrho = \vec{\mathbf{e}}_\varrho(\varrho, \phi) := \vec{\mathbf{b}}_1(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\phi = \vec{\mathbf{e}}_\phi(\varrho, \phi) := \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{b}}_2(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Dann ist $(\vec{\mathbf{e}}_\varrho, \vec{\mathbf{e}}_\phi)$ eine Orthonormalbasis für \mathbb{R}^2 .

(b) Für die **Zylinderkoordinaten für \mathbb{R}^3** aus Beispiel 20.28,

$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi, z) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ z \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R},$$

haben wir bereits die Ableitung berechnet:

$$(\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi, z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\varrho \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \varrho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$\vec{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} -\varrho \sin(\phi) \\ \varrho \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

und $\vec{\mathbf{b}}_1 \perp \vec{\mathbf{b}}_2$, $\vec{\mathbf{b}}_1 \perp \vec{\mathbf{b}}_3$ und $\vec{\mathbf{b}}_2 \perp \vec{\mathbf{b}}_3$, d.h. $\vec{\mathbf{Q}}$ ist eine orthogonale Koordinatentransformation. Beachten Sie, dass die Vektoren jeweils von ϱ , ϕ und z abhängen, also $\vec{\mathbf{b}}_1 = \vec{\mathbf{b}}_1(\varrho, \phi, z)$, $\vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{b}}_2(\varrho, \phi, z)$ und $\vec{\mathbf{b}}_3 = \vec{\mathbf{b}}_3(\varrho, \phi, z)$. Es gilt

$$|\vec{\mathbf{b}}_1| = 1, \quad |\vec{\mathbf{b}}_2| = \varrho \quad \text{und} \quad |\vec{\mathbf{b}}_3| = 1.$$

Wir setzen

$$\vec{\mathbf{e}}_\varrho := \vec{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_\phi := \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_z := \vec{\mathbf{b}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $(\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ eine Orthonormalbasis für \mathbb{R}^3 . Beachten Sie, dass die Basisvektoren jeweils von ϱ, ϕ und z abhängen, also $\vec{e}_\varrho = \vec{e}_\varrho(\varrho, \phi, z)$, $\vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi(\varrho, \phi, z)$ und $\vec{e}_z = \vec{e}_z(\varrho, \phi, z)$.

(c) Für die **Kugelkoordinaten für \mathbb{R}^3** aus Beispiel 20.29,

$$\vec{Q}(r, \theta, \phi) := \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad r > 0, \quad \theta \in]0, \pi[, \quad \phi \in [0, 2\pi[,$$

haben wir bereits die Ableitung berechnet:

$$(\partial \vec{Q})(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 = \vec{b}_1(r, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \\ \vec{b}_2 = \vec{b}_2(r, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \end{bmatrix}, \\ \vec{b}_3 = \vec{b}_3(r, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir rechnen in einer Übungsaufgabe nach, dass gilt $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$, $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_3$ und $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_3$, d.h. \vec{Q} ist eine orthogonale Koordinatentransformation. Beachten Sie, dass die Vektoren jeweils von r, θ und ϕ abhängen, also $\vec{b}_1 = \vec{b}_1(r, \theta, \phi)$, $\vec{b}_2 = \vec{b}_2(r, \theta, \phi)$ und $\vec{b}_3 = \vec{b}_3(r, \theta, \phi)$. Es gilt (siehe Übungsaufgabe)

$$|\vec{b}_1| = 1, \quad |\vec{b}_2| = r \quad \text{und} \quad |\vec{b}_3| = r \sin(\theta).$$

Wir setzen also

$$\vec{e}_r := \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_\theta := \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_\phi := \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ eine Orthonormalbasis für \mathbb{R}^3 . Beachten Sie, dass die Basisvektoren jeweils von r, θ und ϕ abhängen, also $\vec{e}_r = \vec{e}_r(r, \theta, \phi)$, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(r, \theta, \phi)$ und $\vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi(r, \theta, \phi)$.

Bemerkung 20.32. („**krumme Koordinatenlinien**“)

Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ eine Koordinatentransformation, und sei ein Punkt $\vec{p} = \vec{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \Omega$ fest gewählt. Dann gehen durch \vec{p} die n **Wege** („**krummen Koordinatenlinien**“) $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_1(t) &= \vec{Q}(u_1 + t, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n), \\ \vec{\gamma}_2(t) &= \vec{Q}(u_1, u_2 + t, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n), \\ &\vdots \\ \vec{\gamma}_n(t) &= \vec{Q}(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n + t).\end{aligned}$$

Ist \vec{Q} eine **orthogonale Koordinatentransformation**, so schneiden sich $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n$ in $t = 0$ im Punkt $\vec{p} = \vec{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{\gamma}_1(0) = \vec{\gamma}_2(0) = \dots = \vec{\gamma}_n(0)$ paarweise orthogonal, d.h. die Tangentialvektoren

$$\vec{\gamma}_1'(0) = \vec{b}_1(\vec{u}), \quad \vec{\gamma}_2'(0) = \vec{b}_2(\vec{u}), \quad \dots, \quad \vec{\gamma}_n'(0) = \vec{b}_n(\vec{u})$$

in $t = 0$ im Punkt $\vec{p} = \vec{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{\gamma}_1(0) = \vec{\gamma}_2(0) = \dots = \vec{\gamma}_n(0)$ stehen **paarweise senkrecht aufeinander**. Dabei sind die Vektoren $\vec{b}_1(\vec{u}), \vec{b}_2(\vec{u}), \dots, \vec{b}_n(\vec{u})$ die orthogonalen Basisvektoren aus Bemerkung 20.30.

Betrachten wir die „**krummen Koordinatenlinien**“ für einige Beispiele.

Beispiel 20.33. („**krumme Koordinatenlinien**“)

(a) Für die **Polarkoordinaten** für \mathbb{R}^2 aus Beispiel 20.27,

$$\vec{Q}(\varrho, \phi) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[,$$

sind die „krummen Koordinatenlinien“ durch den Punkt

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{Q}}(\varrho_0, \phi_0) = \begin{bmatrix} \varrho_0 \cos(\phi_0) \\ \varrho_0 \sin(\phi_0) \end{bmatrix}$$

die folgenden beiden Wege

$$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{bmatrix} (\varrho_0 + t) \cos(\phi_0) \\ (\varrho_0 + t) \sin(\phi_0) \end{bmatrix}, \quad \varrho_0 + t > 0, \quad (\text{Halbgerade})$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{bmatrix} \varrho_0 \cos(\phi_0 + t) \\ \varrho_0 \sin(\phi_0 + t) \end{bmatrix}, \quad \phi_0 + t \in [0, 2\pi[. \quad (\text{Kreislinie})$$

(b) Für die **Zylinderkoordinaten** für \mathbb{R}^3 aus Beispiel 20.28,

$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi, z) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ z \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R},$$

sind die „krummen Koordinatenlinien“ durch den Punkt

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{Q}}(\varrho_0, \phi_0, z_0) = \begin{bmatrix} \varrho_0 \cos(\phi_0) \\ \varrho_0 \sin(\phi_0) \\ z_0 \end{bmatrix}$$

die folgenden drei Wege

$$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{bmatrix} (\varrho_0 + t) \cos(\phi_0) \\ (\varrho_0 + t) \sin(\phi_0) \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \varrho_0 + t > 0, \quad (\text{Halbgerade})$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{bmatrix} \varrho_0 \cos(\phi_0 + t) \\ \varrho_0 \sin(\phi_0 + t) \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \phi_0 + t \in [0, 2\pi[, \quad (\text{Kreislinie})$$

$$\vec{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} \varrho_0 \cos(\phi_0) \\ \varrho_0 \sin(\phi_0) \\ z_0 + t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{Gerade parallel zur } z\text{-Achse})$$

(c) Für die **Kugelkoordinaten für \mathbb{R}^3** aus Beispiel 20.29,

$$\vec{\mathbf{Q}}(r, \theta, \phi) := \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad r > 0, \quad \theta \in]0, \pi[, \quad \phi \in [0, 2\pi[,$$

sind die „krummen Koordinatenlinien“ durch den Punkt

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{Q}}(r_0, \theta_0, \phi_0) = \begin{bmatrix} r_0 \sin(\theta_0) \cos(\phi_0) \\ r_0 \sin(\theta_0) \sin(\phi_0) \\ r_0 \cos(\theta_0) \end{bmatrix}$$

die folgenden drei Wege

$$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{bmatrix} (r_0 + t) \sin(\theta_0) \cos(\phi_0) \\ (r_0 + t) \sin(\theta_0) \sin(\phi_0) \\ (r_0 + t) \cos(\theta_0) \end{bmatrix}, \quad r_0 + t > 0, \quad (\text{Halbgerade})$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{bmatrix} r_0 \sin(\theta_0 + t) \cos(\phi_0) \\ r_0 \sin(\theta_0 + t) \sin(\phi_0) \\ r_0 \cos(\theta_0 + t) \end{bmatrix}, \quad \theta_0 + t \in]0, \pi[, \quad (\text{halbe Kreislinie:} \\ \text{Längenkreis})$$

$$\vec{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} r_0 \sin(\theta_0) \cos(\phi_0 + t) \\ r_0 \sin(\theta_0) \sin(\phi_0 + t) \\ r_0 \cos(\theta_0) \end{bmatrix}, \quad \phi_0 + t \in [0, 2\pi[. \quad (\text{Kreislinie:} \\ \text{Breitenkreis})$$

20.7 Vektoranalysis in Polarkoordinaten

In diesem Teilkapitel wollen wir Skalarfelder und Vektorfelder auf offenen Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ betrachten und diese „in Polarkoordinaten parametrisieren“. Dieses ist manchmal hilfreich, weil die Struktur der Funktion dann einfacher wird. Wollen wir mit der Funktion parametrisiert in Polarkoordinaten arbeiten, so müssen wir für weitere Anwendungen auch wissen, wie man die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Laplace-Operator in Polarkoordinaten berechnet.

Methode 20.34. (Parametrisierung von Funktionen in Polarkoordinaten)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ offen.

- (1) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Dann kann f in Polarkoordinaten wie folgt angegeben werden:

$$f_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = f(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)).$$

Man sagt dann auch f wurde „in Polarkoordinaten parametrisiert“. (Meist wird der Zusatz „PK“ weggelassen und einfach $f(\varrho, \phi)$ geschrieben. Wir bleiben aber der Klarheit halber vorerst bei dieser Schreibweise.)

- (2) Ein Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten sieht so aus:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{\text{PK}}(\varrho, \phi) &= \vec{\mathbf{F}}(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) = \begin{bmatrix} F_1(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) \\ F_2(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (F_1)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \\ (F_2)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \end{bmatrix} = F_\varrho \vec{\mathbf{e}}_\varrho + F_\phi \vec{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_\varrho &= F_\varrho(\varrho, \phi) := \vec{\mathbf{F}}(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varrho \\ &= \begin{bmatrix} (F_1)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \\ (F_2)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \\ &= (F_1)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \cos(\phi) + (F_2)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \sin(\phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_\phi &= F_\phi(\varrho, \phi) := \vec{\mathbf{F}}(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi \\ &= \begin{bmatrix} (F_1)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \\ (F_2)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} \\ &= (F_1)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) (-\sin(\phi)) + (F_2)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) \cos(\phi) \end{aligned}$$

und wobei

$$\vec{\mathbf{e}}_\varrho = \vec{\mathbf{e}}_\varrho(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_\phi = \vec{\mathbf{e}}_\phi(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

die in Beispiel 20.31 (a) eingeführten orthonormalen Basisvektoren von \mathbb{R}^2 sind. Dass man die Koeffizienten(funktionen) F_ϱ und F_ϕ bzgl. der Basis $(\vec{\mathbf{e}}_\varrho, \vec{\mathbf{e}}_\phi)$ so einfach berechnen kann, liegt daran, dass $(\vec{\mathbf{e}}_\varrho, \vec{\mathbf{e}}_\phi)$ eine Orthonormalbasis ist (vgl. Satz 12.65 im Skript der HM B).

Betrachten wir zunächst zwei Beispiele.

Beispiel 20.35. (Parametrisierung von Funktionen in Polarkoordinaten)

(a) Das Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

sieht parametrisiert in Polarkoordinaten wie folgt aus

$$f_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = \ln(\sqrt{\varrho^2 \cos^2(\phi) + \varrho^2 \sin^2(\phi)}) = \ln(\sqrt{\varrho^2}) = \ln(\varrho).$$

(b) Das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

sieht parametrisiert in Polarkoordinaten wie folgt aus

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{\text{PK}}(\varrho, \phi) &= \frac{1}{\varrho^2 \cos^2(\phi) + \varrho^2 \sin^2(\phi)} \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\varrho^2} \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varrho} \cos(\phi) \\ \frac{1}{\varrho} \sin(\phi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bzgl. der Basis $(\vec{\mathbf{e}}_\varrho, \vec{\mathbf{e}}_\phi)$ der Polarkoordinaten finden wir die Komponenten

$$F_\varrho = F_\varrho(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varrho} \cos(\phi) \\ \frac{1}{\varrho} \sin(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} = \frac{1}{\varrho} \cos^2(\phi) + \frac{1}{\varrho} \sin^2(\phi) = \frac{1}{\varrho},$$

$$\begin{aligned} F_\phi = F_\phi(\varrho, \phi) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\varrho} \cos(\phi) \\ \frac{1}{\varrho} \sin(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\varrho} \cos(\phi) \sin(\phi) + \frac{1}{\varrho} \sin(\phi) \cos(\phi) = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = F_\varrho \vec{\mathbf{e}}_\varrho + F_\phi \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{e}}_\varrho + 0 \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{e}}_\varrho.$$

In beiden Beispielen ist die Darstellung der Funktion parametrisiert in Polarkoordinaten viel einfacher.

Hilfssatz 20.36. (Gradient in Polarkoordinaten)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ offen. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$(\nabla f)_{\text{PK}} = \frac{\partial f_{\text{PK}}}{\partial \varrho} \vec{\mathbf{e}}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f_{\text{PK}}}{\partial \phi} \vec{\mathbf{e}}_\phi. \quad (20.3)$$

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 20.37. (Gradient in Polarkoordinaten)

Das Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

parametrisiert in Polarkoordinaten ist nach Beispiel 20.35 (a)

$$f_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = \ln(\varrho).$$

Sein Gradient ist nach Hilfssatz 20.36

$$\begin{aligned} (\nabla f)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) &= \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \ln(\varrho) \right) \vec{\mathbf{e}}_\varrho + \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln(\varrho) \right) \vec{\mathbf{e}}_\phi \\ &= \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{e}}_\varrho + \frac{0}{\varrho} \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{e}}_\varrho = \frac{1}{\varrho} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zur Übung berechnen wir den Gradienten auch noch in kartesischen Koordinaten und parametrisieren erst danach in Polarkoordinaten: (Das Ergebnis ist selbstverständlich das gleiche.)

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

Parametrisieren in Polarkoordinaten unter Nutzung von

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2(\phi) + \varrho^2 \sin^2(\phi) = \varrho^2$$

liefert, dass

$$(\nabla f)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\varrho \cos(\phi)}{\varrho^2} \\ \frac{\varrho \sin(\phi)}{\varrho^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varrho} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}.$$

Die Berechnung mit Hilfssatz 20.36 war deutlich einfacher.

Beweis von Hilfssatz 20.36: Wir berechnen die rechte Seite in (20.3) explizit: Partielles Differenzieren von

$$f_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = f(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi))$$

nach ϱ bzw. ϕ liefert mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} f_{\text{PK}} = (\partial_1 f)_{\text{PK}} \cos(\phi) + (\partial_2 f)_{\text{PK}} \sin(\phi),$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} f_{\text{PK}} = (\partial_1 f)_{\text{PK}} (-\varrho \sin(\phi)) + (\partial_2 f)_{\text{PK}} \varrho \cos(\phi).$$

Einsetzen in die rechte Seite von (20.3) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varrho} f_{\text{PK}} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} f_{\text{PK}} \vec{e}_\phi &= [(\partial_1 f)_{\text{PK}} \cos(\phi) + (\partial_2 f)_{\text{PK}} \sin(\phi)] \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \\ &\quad + [- (\partial_1 f)_{\text{PK}} \sin(\phi) + (\partial_2 f)_{\text{PK}} \cos(\phi)] \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} \\ &= (\partial_1 f)_{\text{PK}} \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) - \sin(\phi) \cos(\phi) \end{bmatrix} \\ &\quad + (\partial_2 f)_{\text{PK}} \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\phi) - \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) \end{bmatrix} \\ &= (\partial_1 f)_{\text{PK}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\partial_2 f)_{\text{PK}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\partial_1 f)_{\text{PK}} \\ (\partial_2 f)_{\text{PK}} \end{bmatrix} = (\nabla f)_{\text{PK}}. \quad \square \end{aligned}$$

Hilfssatz 20.38. (Divergenz in Polarkoordinaten)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ offen. Sei $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$(\operatorname{div} \vec{F})_{\text{PK}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} F_\phi. \quad (20.4)$$

Beweis von Hilfssatz 20.38: Dieses beweisen wir auf einem Übungszettel. \square

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 20.39. (Divergenz in Polarkoordinaten)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

das bereits in Beispiel 20.35 (b) betrachtet wurde. Dort haben wir bereits berechnet:

$$F_\varrho = F_\varrho(\varrho, \phi) = \frac{1}{\varrho} \quad \text{und} \quad F_\phi = F_\phi(\varrho, \phi) = 0.$$

Mit (20.4) finden wir also

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})_{\text{PK}}(\varrho, \phi) &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} F_\phi \\ &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{1}{\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} 0 = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Berechnen wir zur Übung auch noch die Divergenz in kartesischen Koordinaten und parametrisieren danach in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) &= \frac{1(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Also folgt in Polarkoordinaten $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = 0$.

Hilfssatz 20.40. (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ offen. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$(\Delta f)_{\text{PK}} = \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \right)^2 f_{\text{PK}} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} f_{\text{PK}} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 f_{\text{PK}} \quad (20.5)$$

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 20.41. (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)

Das Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

parametrisiert in Polarkoordinaten ist

$$f_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = \ln(\varrho).$$

Mit (20.5) finden wir für Δf in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} (\Delta f)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) &= \left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\right)^2 \ln(\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln(\varrho) + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2 \ln(\varrho) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\varrho} + 0 = -\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} = 0. \end{aligned}$$

Zur Übung berechnen wir Δf zunächst in kartesischen Koordinaten und parametrisieren danach in Polarkoordinaten: Mit den ersten partiellen Ableitungen aus Beispiel 20.37 finden wir

$$\begin{aligned} (\Delta f)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

und somit ist $(\Delta f)_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = 0$.

Beweis von Hilfssatz 20.40: Es gilt $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, und somit ist mit (20.4) und (20.3)

$$\begin{aligned} (\Delta f)_{\text{PK}} &= (\operatorname{div}(\nabla f))_{\text{PK}} \stackrel{(20.4)}{=} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho (\nabla f)_{\varrho}) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\nabla f)_{\phi} \\ &\stackrel{(20.3)}{=} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} f_{\text{PK}} \right) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \phi} f_{\text{PK}} \right) \\ &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} f_{\text{PK}} + \frac{1}{\varrho} \varrho \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \right)^2 f_{\text{PK}} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 f_{\text{PK}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \right)^2 f_{\text{PK}} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} f_{\text{PK}} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 f_{\text{PK}}. \quad \square \end{aligned}$$

Teil VIII

Integration in mehreren Variablen

KAPITEL 21

Das mehrdimensionale Riemann-Integral

Wir wollen jetzt Funktionen in mehreren Variablen integrieren. Als Spezialfall werden wir das Volumen von beschränkten Teilmengen des \mathbb{R}^n berechnen.

Ein physikalisches Beispiel für Mehrfachintegrale ist die Berechnung der Gesamtladung eines Körpers (Volumens) V mit der Ladungsdichte ϱ :

$$\text{Gesamtladung in } V = \iiint_V \varrho \, dV.$$

In diesem Kapitel sei stets $n \in \mathbb{N}$.

21.1 Integrale über Quader

Wir starten mit einem motivierenden Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik.

Physikalische Anwendung 21.1. (Gesamtladung in einem Quader)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $\varrho : Q \rightarrow \mathbb{R}$ die Ladungsdichte in Q .

Aufgabe: Berechnen die Gesamtladung von Q .

Idee: Finde eine Zerlegung von Q in Teilquader Q_1, Q_2, \dots, Q_N , so dass ϱ auf jedem Q_j annähernd konstant $= q_j$ ist. Dann ist die Gesamtladung ungefähr gleich

$$\sum_{j=1}^N q_j v_3(Q_j),$$

wobei $v_3(Q_j)$ das Volumen von Q_j ist. Macht man die Teilquader immer kleiner (und verwendet damit auch immer mehr Teilquader), so erhält man im Grenzübergang ein dreidimensionales Riemann-Integral.

Als Vorbereitung der Einführung des (Riemann-)Integrals über Quader brauchen wir einige Notation.

Notation 21.2. (n -dim Quader; Volumen und Durchmesser solcher Quader)

Seien $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ in \mathbb{R}^n .

(1) $\vec{\mathbf{a}} \leq \vec{\mathbf{b}}$ gilt, wenn $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$.

$\vec{\mathbf{a}} < \vec{\mathbf{b}}$ gilt, wenn $a_i < b_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$.

(Analog: $\vec{\mathbf{a}} \geq \vec{\mathbf{b}}$ gilt, wenn $a_i \geq b_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$. $\vec{\mathbf{a}} > \vec{\mathbf{b}}$ gilt, wenn $a_i > b_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$.)

(2) $Q := [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] := \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mathbf{a}} \leq \vec{\mathbf{x}} \leq \vec{\mathbf{b}} \}$
 $= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$

heißt ein n -dimensionaler (abgeschlossener) Quader. Das Innere dieses Quaders bezeichnen wir mit

$$\overset{\circ}{Q} :=]\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}[:= \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mathbf{a}} < \vec{\mathbf{x}} < \vec{\mathbf{b}} \}$$

$$=]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_n, b_n[.$$

(3) $v_n([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]) := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$,

falls $\vec{\mathbf{a}} \leq \vec{\mathbf{b}}$, ist das n -dimensionale Volumen von $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$.

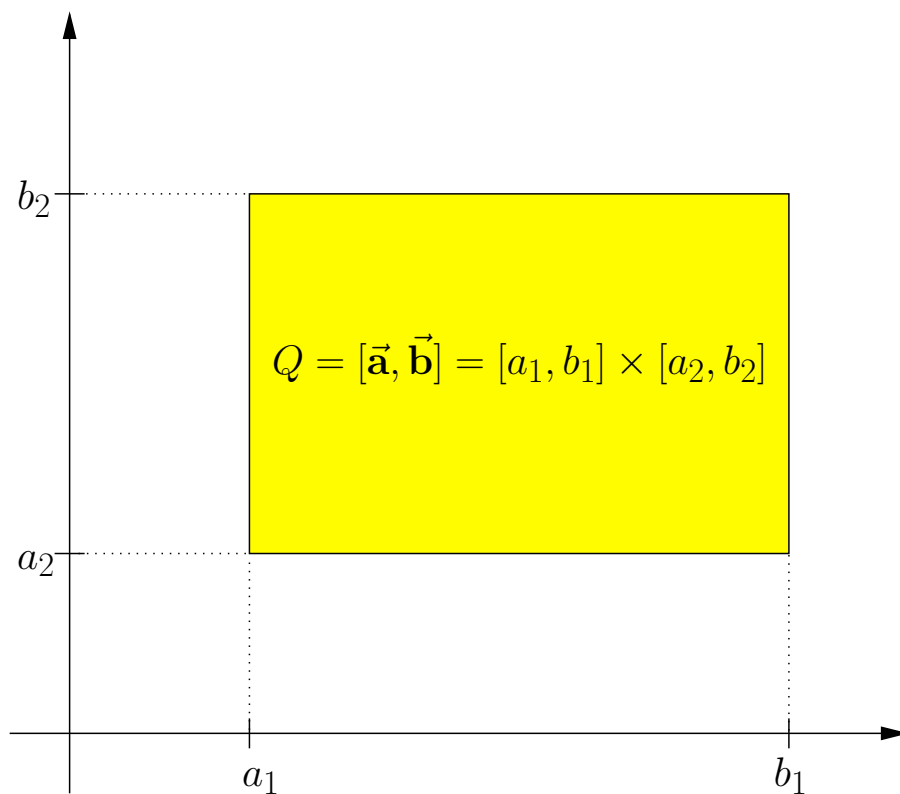
(4) $\text{diam}([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]) := |\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}| = \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right)^{1/2}$,

falls $\vec{\mathbf{a}} \leq \vec{\mathbf{b}}$ heißt der Durchmesser von $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$. („diam“ steht für „diameter“, das englische Wort für Durchmesser.)

Wir halten zunächst einige Überlegungen zu n -dimensionalen Quadern fest.

Bemerkung 21.3. (n -dimensionale Quader und ihr Volumen)

- (1) $n = 1$: Quader = abgeschlossenes Intervall;
Volumen = Intervalllänge = Durchmesser
- (2) $n = 2$: Quader = Rechteck;
Volumen = Flächeninhalt;
Durchmesser = Länge der Diagonale
- (3) Gilt **nicht** $\vec{\mathbf{a}} \leq \vec{\mathbf{b}}$, so ist $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] := \emptyset$. (Die leere Menge \emptyset ist also ein abgeschlossener Quader für jedes n .) Wir definieren $v_n(\emptyset) := 0$ und $\text{diam}(\emptyset) := 0$.



Betrachten wir nun einige Beispiele.

Beispiel 21.4. (n -dimensionale Quader und ihr Volumen)

- (a) Seien $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1)$ und $\vec{\mathbf{b}} = (4, 3)$. Dann ist $\vec{\mathbf{a}} < \vec{\mathbf{b}}$ (da $a_1 = 1 < 4 = b_1$ und $a_2 = 1 < 3 = b_2$). Es gilt also $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = [1, 4] \times [1, 3]$. Wir berechnen

$$v_2([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]) = (4 - 1) \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6,$$

$$\text{diam}([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

(b) Seien $\vec{\mathbf{a}} = (1, 0, -1)$ und $\vec{\mathbf{b}} = (2, 2, 3)$. Dann ist $\vec{\mathbf{a}} < \vec{\mathbf{b}}$ (da $a_1 = 1 < 2 = b_1$, $a_2 = 0 < 2 = b_2$ und $a_3 = -1 < 3 = b_3$). Dann gilt $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = [1, 2] \times [0, 2] \times [-1, 3]$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} v_3([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]) &= (2-1) \cdot (2-0) \cdot (3-(-1)) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8, \\ \text{diam}([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]) &= \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}. \end{aligned}$$

(c) Seien $\vec{\mathbf{a}} = (1, 0, -1)$ und $\vec{\mathbf{b}} = (0, 2, 3)$. Dann gilt **nicht** $\vec{\mathbf{a}} \leq \vec{\mathbf{b}}$, da $a_1 = 1 > 0 = b_1$. Also ist $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = \emptyset$ und $v_3(\emptyset) = 0$ und $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

Nun können wir die Vorbereitungen zur Definition des (Riemann-)Integrals über Quader treffen.

Definition 21.5. (Zerlegung eines n -dimensionalen Quaders)

Sei $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ ein n -dimensionaler Quader. Eine **Zerlegung** $\mathcal{Z} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$ von Q ist eine Menge von Quadern Q_1, Q_2, \dots, Q_N mit

(i) $Q_1, Q_2, \dots, Q_N \subseteq Q$,

(ii) $Q = \bigcup_{k=1}^N Q_k = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_N$,

(iii) $\overset{\circ}{Q}_k \cap \overset{\circ}{Q}_\ell = \emptyset$ für $k \neq \ell$.

In Abbildung 21.1 ist die Zerlegung eines n -dimensionalen Quaders veranschaulicht.

Definition 21.6. (feinere Zerlegung; Feinheit einer Zerlegung)

Sei $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ ein n -dimensionaler Quader.

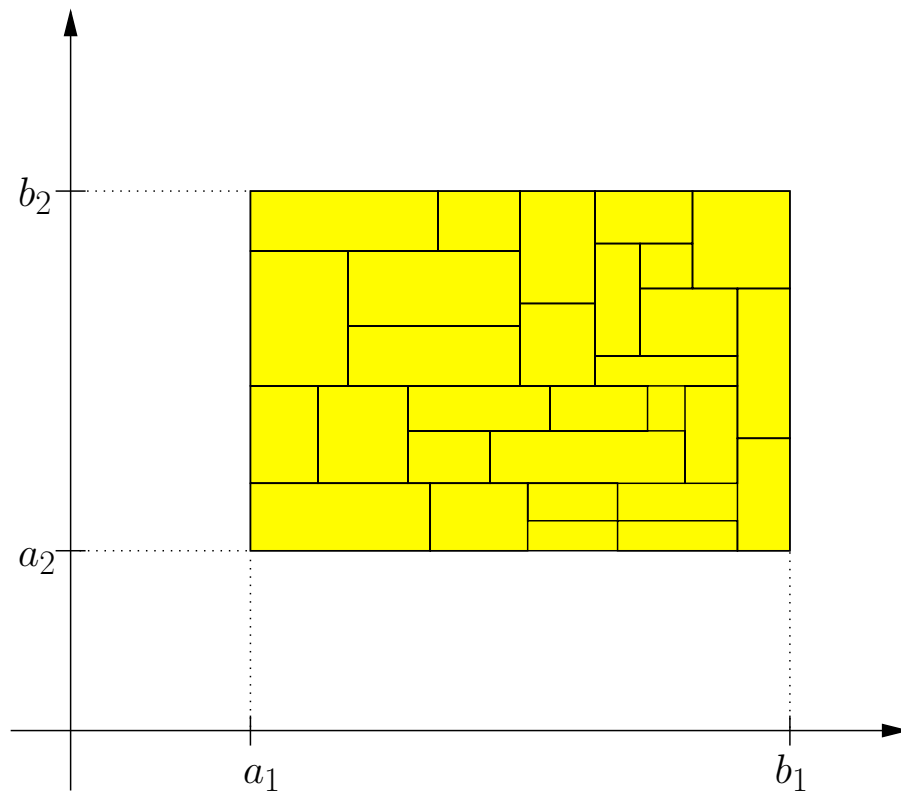


Abbildung 21.1: Zerlegung eines n -dimensionalen Quaders: Die Eigenschaft (iii) bedeutet, dass sich Q_1, Q_2, \dots, Q_N nicht überlappen dürfen.

(1) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}' = \{Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N\}$ von Q heißt **feiner als** $\mathcal{Z} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}$, wenn jedes Q'_j in einem Q_k enthalten ist. Wir schreiben dann: $\mathcal{Z}' \leq \mathcal{Z}$.

(2) Für eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$ von Q nennt man

$$\delta(\mathcal{Z}) = \max_{k=1,2,\dots,N} \text{diam}(Q_k)$$

die **Feinheit** von \mathcal{Z} .

Aus $\mathcal{Z}' \leq \mathcal{Z}$ folgt immer $\delta(\mathcal{Z}') \leq \delta(\mathcal{Z})$. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Zur Erinnerung für die nachfolgende Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(\vec{x})| \leq C \quad \text{für alle } \vec{x} \in D.$$

Definition 21.7. (Riemannsche Zwischensumme)

Seien $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ ein n -dimensionaler Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sei $\mathcal{Z} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$ eine Zerlegung von Q und $X_{\mathcal{Z}} = \{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N\}$ so, dass $\vec{\mathbf{x}}_k \in Q_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Dann heißt

$$S(f; \mathcal{Z}, X_{\mathcal{Z}}) := \sum_{k=1}^N f(\vec{\mathbf{x}}_k) v_n(Q_k)$$

die **Riemannsche Zwischensumme** von f bzgl. \mathcal{Z} und $X_{\mathcal{Z}}$.

Die Idee ist nun in der Riemannschen Zwischensumme immer feinere Zerlegungen zu wählen und so für „geeignete“ (d.h. integrierbare) Funktionen eine immer bessere Annäherung/Approximation des Integrals durch die Riemannschen Zwischensummen zu erhalten. Im Grenzübergang, wenn die Feinheit der Zerlegungen gegen Null strebt, erhalten wir den Wert des Integrals von f über den n -dimensionalen Quader $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$.

Für $n = 1$ stimmt Definition 21.7 mit der Riemannschen Zwischensumme aus Kapitel 8 des Skripts der HM A überein.

Definition 21.8. (Riemann-Integral über Quader)

Seien $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ ein n -dimensionaler Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. f heißt **(Riemann-)integrierbar über Q** , wenn es eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\nu_\varepsilon > 0$, so dass für alle Zerlegungen \mathcal{Z} von Q mit $\delta(\mathcal{Z}) < \nu_\varepsilon$ und alle passenden $X_{\mathcal{Z}}$ gilt:

$$|S(f; \mathcal{Z}, X_{\mathcal{Z}}) - A| < \varepsilon.$$

A heißt dann das **(Riemann-)Integral von f über Q** . Wir schreiben

$$\int_Q f(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}} \quad \text{oder} \quad \int_Q f(x_1, x_2, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

für A .

Bei der Notation $d\vec{\mathbf{x}}$ ist zu beachten, dass es sich um ein **skalares** Volumenelement handelt, im Gegensatz zu dem vektoriellen Linienelement $d\vec{\mathbf{s}}$ bei der

Integration eines Vektorfeldes längs eines Weges.

Auch hier erhalten wir die aus der HM A (siehe Kapitel 8 des Skripts der HM A) bekannte Definition des Riemann-Integrals für Funktionen einer Variablen als Spezialfall für $n = 1$: Ist $n = 1$, d.h. $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist (Riemann-)integrierbar über $[a, b]$, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Weiter sei angemerkt, dass wir das (Riemann-)Integral einer Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ über einen n -dimensionalen Quader Q (wenn es existiert) berechnen können, indem wir eine Folge von immer feiner werdenden Zerlegungen des Quaders betrachten und dann das Integral als Grenzwert der Zwischensummen erhalten.

Mit der Definition des Riemann-Integrals über Quader kann man direkt den folgenden Satz beweisen.

Satz 21.9. (Linearität des Integrals)

Seien $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ ein n -dimensionaler Quader, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und seien $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ **(Riemann-)integrierbar über Q** . Dann ist $\lambda f + \mu g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls **(Riemann-)integrierbar über Q** , und es gilt

$$\int_Q (\lambda f(\vec{\mathbf{x}}) + \mu g(\vec{\mathbf{x}})) d\vec{\mathbf{x}} = \lambda \int_Q f(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}} + \mu \int_Q g(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}}.$$

Insbesondere liefert der vorige Satz für die Sonderfälle $\lambda = \mu = 1$ bzw. $\mu = 0$ die Formeln

$$\begin{aligned} \int_Q (f(\vec{\mathbf{x}}) + g(\vec{\mathbf{x}})) d\vec{\mathbf{x}} &= \int_Q f(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}} + \int_Q g(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}}, \\ \int_Q \lambda f(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}} &= \lambda \int_Q f(\vec{\mathbf{x}}) d\vec{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Als Letztes lernen wir (ohne Beweis) einen nützlichen Satz kennen, der die Integrierbarkeit aller stetigen Funktionen über Quader garantiert.

Satz 21.10. (stetige Funktionen sind über Quader integrierbar)

Seien $Q = [\vec{a}, \vec{b}]$ ein n -dimensionaler Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ *stetig*. Dann ist f **(Riemann-)integrierbar über Q** .

Ab jetzt werden wir der Einfachheit halber immer „**integrierbar**“ statt „**(Riemann-)integrierbar**“ sagen. Ebenso sprechen wir nun einfach vom „**Integral**“ statt vom „**(Riemann-)Integral**“.

Wie in Kapitel 8 der HM A werden wir in den nachfolgenden Teilkapiteln Sätze und Techniken kennenlernen, die es uns erlauben Integrale einer Funktion über n -dimensionale Quader und auch über allgemeinere Mengen zu berechnen. Dabei wird unser Augenmerk zuerst der Verallgemeinerung des Integrals auf sogenannte Jordan-messbare Mengen gelten. Dabei lernen wir verschiedene Hilfsmittel zu Berechnung des Integrals kennen, insbesondere den Satz von Fubini und die Transformationsformel (für $n = 1$ ist dieses die bereits bekannte Substitutionsregel) für die Parametrisierung eines Integrals mit einer geeigneten Koordinatentransformation.

21.2 Der Satz von Fubini

Der sehr wichtige Satz von Fubini ermöglicht es uns, Integrale über n -dimensionale Quader $Q = [\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ in nacheinander folgende Integrale über die einzelnen Intervalle $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, zu zerlegen.

Wir beginnen mit dem Spezialfall $n = 2$, für welchen wir den Satz von Fubini auch beweisen werden.

Satz 21.11. (Satz von Fubini für $n = 2$)

Seien $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

(1) Existiert

$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy$$

für jedes $x \in [a_1, b_1]$, so gilt

$$\int_Q f(x, y) \, d(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx := \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

(2) Existiert

$$G(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx$$

für jedes $y \in [a_2, b_2]$, so gilt

$$\int_Q f(x, y) \, d(x, y) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \, dy := \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 21.12. (Satz von Fubini für $n = 2$)

Sei $Q = [0, 1] \times [0, 2]$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := x$. Dann ist f stetig und somit über Q integrierbar. Wir können

$$\int_Q f(x, y) \, d(x, y) = \int_Q x \, d(x, y)$$

mit dem Satz von Fubini auf zwei Varianten berechnen:

Mit Satz 21.11 (1) erhalten wir

$$\int_Q x \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 x \, dy \, dx = \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=2} \, dx = \int_0^1 2x \, dx = [x^2]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Mit Satz 21.11 (2) erhalten wir

$$\int_Q x \, d(x, y) = \int_0^2 \int_0^1 x \, dx \, dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} \, dy = \int_0^2 \frac{1}{2} \, dy = \left[\frac{1}{2} y \right]_{y=0}^{y=2} = 1.$$

Satz 21.11 beweist man mit Hilfe der Riemannschen Zwischensummen. Wir skizzieren den Beweis.

Beweisidee von Satz 21.11 (1): Nach Definition des Riemann-Integrals über Quader gilt

$$\int_Q f(x, y) \, d(x, y) \approx \sum_j \sum_k f(x_j, y_k) v_2(Q_{j,k}),$$

wobei $\mathcal{Z} = \{Q_{j,k}\}$ eine genügend feine Zerlegung von Q ist $Q_{j,k} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ und $X_{\mathcal{Z}} = \{(x_j, y_k)\}$. Für die rechte Seite finden wir

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k f(x_j, y_k) v_2(Q_{j,k}) &= \sum_j \sum_k f(x_j, y_k) (x_j - x_{j-1}) (y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_j \left[\sum_k f(x_j, y_k) (y_k - y_{k-1}) \right] (x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Da das Integral

$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

für jedes $x \in [a_1, b_1]$ existiert, finden wir

$$\begin{aligned} \sum_j \left[\sum_k f(x_j, y_k) (y_k - y_{k-1}) \right] (x_j - x_{j-1}) &\approx \sum_j \int_{a_2}^{b_2} f(x_j, y) dy (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_j F(x_j) (x_j - x_{j-1}) \\ &\approx \int_{a_1}^{b_1} F(x) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Lässt man die Feinheit $\delta(\mathcal{Z})$ gegen Null gehen, so werden aus den \approx Gleichheitszeichen, und wir erhalten die gewünschte Formel. \square

Beweisidee von Satz 21.11 (2): Der Beweis geht analog, wobei man nur die Rollen von x und y vertauschen muss. \square

Nun formulieren wir die allgemeine Version des Satzes von Fubini für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Satz 21.13. (Satz von Fubini für $n \in \mathbb{N}$)

Seien $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Falls das n -fach Integral

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_n$$

existiert, so ist es gleich $\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x}$.

Wir können den Satz von Fubini auch etwas allgemeiner wie folgt formulieren:

Satz 21.14. (Satz von Fubini)

Seien $\ell, m \in \mathbb{N}$ mit $\ell + m = n$, und seien Q_1 ein ℓ -dimensionaler Quader und Q_2 ein m -dimensionaler Quader. Seien $Q = Q_1 \times Q_2$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

(1) Existiert

$$F(\vec{x}) := \int_{Q_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}$$

für jedes $\vec{x} \in Q_1$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) &= \int_{Q_1} \int_{Q_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} d\vec{x} \\ &:= \int_{Q_1} \left(\int_{Q_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x}. \end{aligned}$$

(2) Existiert

$$G(\vec{y}) := \int_{Q_1} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$$

für jedes $\vec{y} \in Q_2$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) &= \int_{Q_2} \int_{Q_1} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} \\ &:= \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y}. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen in Satz 21.14 ist $Q_1 \times Q_2$ natürlich ein n -dimensionaler Quader.

Betrachten wir ein Beispiel zur Anwendung von Satz 21.13.

Beispiel 21.15. (Satz von Fubini für $n \in \mathbb{N}$)

Sei $Q = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Quader. Das Volumen von Q ist dann

$$\begin{aligned} v_n(Q) &= \int_Q 1 \, d\vec{\mathbf{x}} = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} 1 \, dx_1}_{= b_1 - a_1} dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dx_2 \cdots dx_n \\ &\quad \vdots \\ &= (b_n - a_n) \cdot \dots \cdot (b_2 - a_2) (b_1 - a_1). \end{aligned}$$

Natürlich hat das Volumen des Quaders den Wert, den wir auch für $n = 2$ und $n = 3$ elementar berechnet hätten, also den Wert aus Notation 21.2 (3).

21.3 Integration über beliebige Mengen

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir wollen f über M integrieren, auch wenn M kein Quader ist. Zunächst **setzen wir f auf ganz \mathbb{R}^n fort** und definieren $f_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_M(\vec{\mathbf{x}}) := \begin{cases} f(\vec{\mathbf{x}}) & \text{wenn } \vec{\mathbf{x}} \in M, \\ 0 & \text{wenn } \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{cases}$$

Als Sonderfall der Funktion, die auf M den konstanten Wert 1 hat, erhalten wir

$$1_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1_M(\vec{\mathbf{x}}) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{\mathbf{x}} \in M, \\ 0 & \text{wenn } \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{cases}$$

Man nennt 1_M die **charakteristische Funktion von M** .

Definition 21.16. (Jordan-messbare Menge M ; Volumen von M ; integrierbar über M)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, und sei Q ein n -dimensionaler Quader mit $M \subseteq Q$.

- (1) M heißt **Jordan-messbar**, wenn 1_M über Q integrierbar ist (im Sinne von Definition 21.8).

$$v_n(M) := \int_Q 1_M(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

heißt dann das (n -dimensionale) **Volumen von M** .

- (2) Ist für eine beschränkte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion f_M integrierbar über Q (im Sinne von Definition 21.8), so heißt f **integrierbar über M** . Dann definieren wir

$$\int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} := \int_Q f_M(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Warum macht es Sinn in Definition 21.16 (1)

$$v_n(M) := \int_Q 1_M(\vec{x}) \, d\vec{x} \tag{21.1}$$

als das **Volumen von M** zu definieren? – Dieses macht man sich leicht wie folgt für den Fall $n = 2$ klar, wenn M also ein Flächenstück in \mathbb{R}^2 ist mit der Fläche $v_2(M)$. Die Funktion 1_M hat auf M den Wert 1 und sonst den Wert 0. Stellen Sie sich also vor, dass Sie das Flächenstück M nun in ein Volumen (in \mathbb{R}^3) mit der Höhe 1 umwandeln, indem Sie das Flächenstück mit der „Dicke“ 1 versehen. Dieses Volumen hat dann den Wert $v_2(M) \cdot 1 = v_2(M)$, und dieses Volumen ist gerade das Volumen unter dem Graphen von 1_M , welches wir in (21.1) nach unserem intuitiven Verständnis eines Integrals ausrechnen.

Bemerkung 21.17. (zu Definition 21.16)

Seien die Notation und Voraussetzungen wie in Definition 21.16.

- (1) In Definition 21.16 kommt es **nicht** auf die spezielle Wahl des Quaders Q an, solange $M \subseteq Q$ gilt.
- (2) Es gilt mit Definition 21.16 (2)

$$\int_M 1 \, d\vec{x} = \int_Q 1_M(\vec{x}) \, d\vec{x},$$

und somit gilt in Definition 21.16 (1) auch

$$v_n(M) = \int_M 1 \, d\vec{x}.$$

- (3) **Quader sind Jordan-messbar.** Ist M ein Quader, so stimmt Definition 21.16 (2) mit Definition 21.8 überein, denn wir können $Q = M$ wählen.
- (4) Das Volumen in Definition 21.16 (1) hat die folgende geometrische Interpretation:
- $n = 1$: Volumen = Länge
- $n = 2$: Volumen = Flächeninhalt
- (5) Jordan-messbare Mengen sind per Definition **beschränkt**.

Die meisten beschränkten Mengen, die Ihnen in der Praxis begegnen sind Jordan-messbar: Genauer kann man sagen, **wenn der Rand von M hinreichend glatt ist**, z.B. wenn die Randkurve bzw. Randfläche bzw. der höherdimensionale Rand **stetig und stückweise C^1** ist, **dann ist M Jordan-messbar**. Dabei verstehen wir unter dem „Rand“ von M (wir definieren diesen Begriff später in Teilkapitel 21.5) bei einer Menge in \mathbb{R}^2 ganz anschaulich die Randkurve und bei einem Volumen in \mathbb{R}^3 die Oberfläche.

Betrachten wir einige Beispiele und Gegenbeispiele.

Beispiel 21.18. (Jordan-messbare Mengen)

- (a) **Quader** sind Jordan-messbar, denn: Sei M ein Quader. Dann können wir in Definition 21.16 $Q = M$ wählen, und $1_M = 1_Q$ ist auf $M = Q$ konstant 1 und somit stetig. Wir wissen nach Satz 21.10, dass 1_M über Q integrierbar ist. $v_n(Q)$ in Definition 21.16 (1) liefert dann die Formel für das Volumen des Quaders aus Notation 21.2 (3).

- (b) **Kreise K (also Vollkreise) in \mathbb{R}^2 und Kugeln (also Vollkugeln) K in \mathbb{R}^3 (und \mathbb{R}^n mit $n \geq 4$)** sind Jordan-messbar. Um dieses nachzuweisen nimmt man zunächst einen Quader, der den Kreis bzw. die Kugel enthält. Zerlegt man diesen nun in Teilquader mit immer feiner werdenden Zerlegungen, so kann man über die Definition des Riemann-Integrals für Quader

$$\int_Q 1_K(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

berechnen und findet, so dass K Jordan-messbar ist.

- (c) **Zylinder im \mathbb{R}^3** sind Jordan-messbar. Um dieses nachzuweisen, geht man analog zum vorigen Fall vor.

Beispiel 21.19. (nicht Jordan-messbare Menge)

Seien $M := \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ und $Q := [0, 1]$.

Dann ist M **nicht** Jordan-messbar, d.h. das Integral

$$v_1(M) = \int_{[0,1]} 1_M(x) \, dx$$

existiert nicht! (Der Nachweis ist nicht-trivial.)

Obwohl M nicht Jordan-messbar ist, ist die Funktion $f(\vec{x}) := 0$ für alle $\vec{x} \in M$ aber über M integrierbar mit

$$\int_M f(x) \, dx = \int_{[0,1]} f_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) \, dx = \int_{[0,1]} 0 \, dx = 0,$$

weil $f_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ ist.

Wir halten die wichtigen Rechenregeln für das Integral fest.

Satz 21.20. (Rechenregeln für das Integral)

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ über M integrierbar. Dann gelten:

(1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ über M integrierbar und

$$\int_M [\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})] d\vec{x} = \alpha \int_M f(\vec{x}) d\vec{x} + \beta \int_M g(\vec{x}) d\vec{x}.$$

(2) $f \cdot g$ ist über M integrierbar.

(3) $|f|$ ist über M integrierbar und

$$\left| \int_M f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \int_M |f(\vec{x})| d\vec{x}.$$

(4) Gilt zusätzlich $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in M$, so ist

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_M g(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Wir hatten analoge Eigenschaften bei dem Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen. Die Beweise der Eigenschaften in Satz 21.20 erfolgen unter Nutzung von Definition 21.16 (2) analog zu den Beweisen für das Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen (siehe Kapitel 8 im Skript der HM A), welches in dem obigen Satz natürlich als Sonderfall für $n = 1$ mit enthalten ist.

Bemerkung 21.21. (f integrierbar über $M \not\Rightarrow f$ integrierbar über beliebige Teilmengen von M)

Ist f über M integrierbar und $M_0 \subseteq M$, so braucht f **nicht** über M_0 integrierbar zu sein.

Beispiel: $M = [0, 1]$, $M_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1$. Dann ist f integrierbar über M , aber nach Beispiel 21.19 ist f nicht über M_0 integrierbar.

Es gilt allerdings der folgende Satz.

Satz 21.22. (f integrierbar über $M \Rightarrow f$ integrierbar über Jordan-messbare Teilmengen von M)

Ist f über M integrierbar und $M_0 \subseteq M$ Jordan-messbar, so ist f auch über M_0 integrierbar.

Beweis von Satz 21.22: Sei Q ein n -dimensionaler Quader mit $M_0 \subseteq M \subseteq Q$. Nach Voraussetzung sind f_M und 1_{M_0} integrierbar über Q . Nach Satz 21.20 (2) ist $f_M \cdot 1_{M_0}$ integrierbar über Q . Da

$$f_M(\vec{x}) \cdot 1_{M_0}(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\vec{x}) & \text{wenn } \vec{x} \in M_0, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus M_0 \end{array} \right\} = f_{M_0}(\vec{x}),$$

ist f_{M_0} über Q integrierbar, d.h. f ist integrierbar über M_0 . \square

21.4 Satz von Cavalieri und Integrale über Normalbereiche

In diesem Teilkapitel lernen wir zwei verwandte aber nicht aufeinander aufbauende Ideen kennen: den Satz von Cavalieri und sogenannte Normalbereiche in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 , welche in vielen Fällen eine bequeme Berechnung von Integralen ermöglichen.

Der nachfolgende Satz von Cavalieri ermöglicht oft eine schnelle und elegante Berechnung von Volumina.

Satz 21.23. (Satz von Cavalieri)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $Q = Q_0 \times [a_n, b_n]$ ein n -dimensionaler Quader mit $M \subseteq Q$. (Q_0 ist ein $(n-1)$ -dimensionaler Quader.)

Die „Querschnitte“

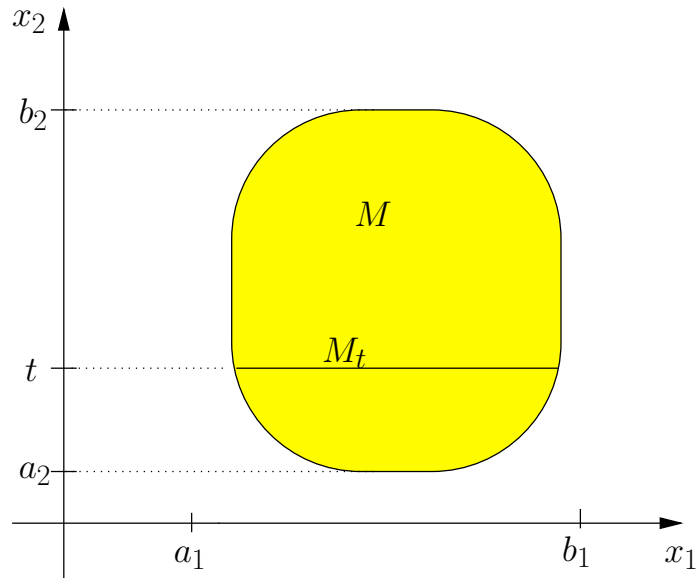
$$M_t = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in Q_0 : (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) \in M\}, \quad t \in [a_n, b_n],$$

seien ebenfalls Jordan-messbar. Dann gilt

$$v_n(M) = \int_{a_n}^{b_n} v_{n-1}(M_t) dt. \quad (21.2)$$

Veranschaulichung des Satzes von Cavalieri:

Man kann (21.2) sich so veranschaulichen, dass M senkrecht zur x_n -Koordinatenachse in $(n - 1)$ -dimensionale „Scheiben“ geschnitten wurde. Die Integration über das Intervall $[a_n, b_n]$ „summiert“ die Flächeninhalte/Volumina dieser Scheiben auf (siehe Bild).

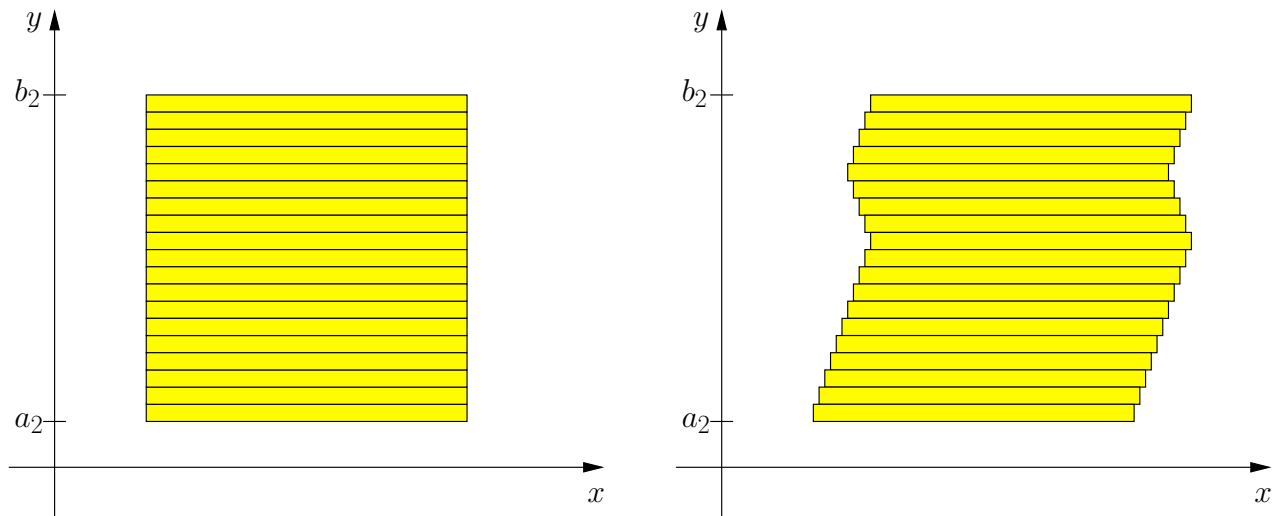


Beweis des Satz 21.23: Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
 v_n(M) &= \int_Q 1_M(\vec{x}) \, d\vec{x} \\
 &= \int_{a_n}^{b_n} \int_{Q_0} 1_M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) \, d(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \, dt \\
 &= \int_{a_n}^{b_n} \int_{Q_0} 1_{M_t}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) \, d(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \, dt \\
 &= \int_{a_n}^{b_n} v_{n-1}(M_t) \, dt.
 \end{aligned}$$

□

Zur besseren **Anschauung des Satzes von Cavalieri** betrachten wir den Fall $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und nutzen das „**Bierdeckel-Prinzip**“ (siehe Bilder auf der nächsten Seite): Wir schneiden unser Volumen senkrecht zur z -Achse (also parallel zur $(x, y, 0)$ -Ebene) in beliebig dünne Scheiben („passend geformte Bierdeckel“) M_k und summieren deren Flächeninhalte $v_2(M_k)$ auf. Wenn wir unser Volumen M dabei senkrecht zur z -Achse durch Drehung oder Verschiebung zu einem Volumen \widetilde{M} deformieren, so dass die Flächeninhalte $v_2(M_k)$ sich dabei nicht ändern, so haben \widetilde{M} und M das gleiche Volumen. Als stetige Deformationen ist dabei alles gestattet, was Sie mit dem „Stapel der Bierdeckel“ anstellen können. An der Veranschaulichung mit den Bierdeckeln sieht man sofort, warum sich da Volumen nicht ändert.



Betrachten wir einige Beispiele zur Anwendung des Satzes von Cavalieri.

Beispiel 21.24. (Satz von Cavalieri)

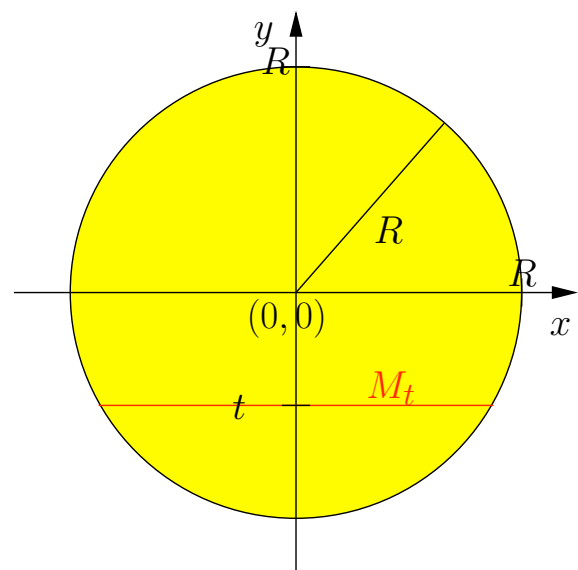
- (a) Sei $R > 0$ und $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Gesucht ist $v_2(M)$.

Wir wollen also das Volumen (d.h. hier den Flächeninhalt) des Vollkreises um $(0, 0)$ mit Radius R berechnen. Dieser ist nach Beispiel 21.18 (b) Jordanmessbar.

Ein „Querschnitt“ des Kreises senkrecht zur y -Achse durch den Punkt $t = y \in [-R, R]$ ist gerade die Länge der Linie von

$$-\sqrt{R^2 - t^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - t^2}$$

also $v_1(M_t) = 2\sqrt{R^2 - t^2}$. Solche Querschnitte (mit Länge ungleich Null) erhalten wir für $-R < t < R$. Nach dem Satz von Cavalieri finden wir also



$$v_2(M) = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - t^2} dt.$$

Mit der Substitution $t = R \sin(u)$, $dt/du = R \cos(u)$, finden wir

$$\begin{aligned} v_2(M) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2(t)} R \cos(u) du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sqrt{R^2 \cos^2(u)} R \cos(u) du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 R^2 \cos^2(u) du. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} &\cos^2(u) - \sin^2(u) = \cos(2u) \\ \iff &\cos^2(u) - (1 - \cos^2(u)) = \cos(2u) \\ \iff &2 \cos^2(u) = 1 + \cos(2u) \end{aligned} \quad (21.3)$$

finden wir

$$\begin{aligned} v_2(M) &= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2u)) du = R^2 \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{u=-\pi/2}^{u=\pi/2} \\ &= R^2 \left(\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right] - \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(-\pi) \right] \right) = \pi R^2. \end{aligned}$$

- (b) Sei $R > 0$ und $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Gesucht ist $v_3(M)$.

Wir wollen also das Volumen der Vollkugel um $(0, 0, 0)$ mit Radius R berechnen. Diese ist nach Beispiel 21.18 (b) Jordan-messbar. Zerschneiden wir diese Vollkugel längs der z -Achse in Scheiben, so erhalten wir für den Schnitt durch $t = z \in [-R, R]$ eine Kreisscheibe M_t mit Radius $\sqrt{R^2 - t^2}$. Nach Beispiel (a) hat diese jeweils die Fläche $v_2(M_t) = \pi (\sqrt{R^2 - t^2})^2 = \pi (R^2 - t^2)$. Also finden wir nach dem Satz von Cavalieri

$$\begin{aligned} v_3(M) &= \int_{-R}^R \pi (R^2 - t^2) dt = \pi \int_{-R}^R (R^2 - t^2) dt = \pi \left[R^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{t=-R}^{t=R} \\ &= \pi \left[R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right] - \pi \left[-R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right] = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Was nun kommt, baut **nicht** auf das Prinzip von Cavalieri auf!

Wir führen zunächst den Begriff eines Normalbereichs in \mathbb{R}^2 ein.

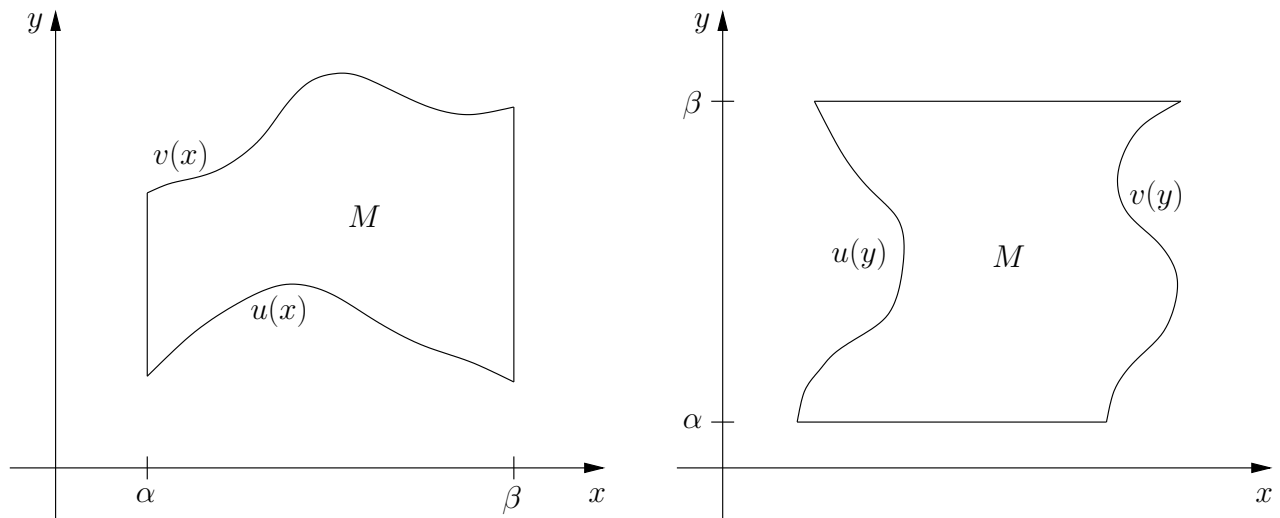


Abbildung 21.2: Ein xy -Normalbereich im linken Bild und ein yx -Normalbereich im rechten Bild.

Definition 21.25. (Normalbereich in \mathbb{R}^2)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge.

- (1) M heißt **xy -Normalbereich**, wenn es reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $u : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

- (2) M heißt **yx -Normalbereich**, wenn es reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $u : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq y \leq \beta, u(y) \leq x \leq v(y)\}.$$

Bemerkung 21.26. (Normalbereich in \mathbb{R}^2)

- (1) xy -Normalbereiche in \mathbb{R}^2 sind Flächenstücke, die einen stetigen Rand haben, der aus den Graphen der stetigen Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ mit $x \in [\alpha, \beta]$ und aus den Geradenstücken (α, y) mit $y \in [u(\alpha), v(\alpha)]$ und (β, y) mit $y \in [u(\beta), v(\beta)]$ besteht (siehe das linke Bild in Abbildung 21.2). Analog kann man yx -Normalbereiche beschreiben.

- (2) xy -Normalbereiche sind Jordan-messbar. Dieses zeigt man mit Hilfe des Riemann-Integrals in einer Variablen: u und v sind stetig und daher über dem Intervall $[\alpha, \beta]$ Riemann-integrierbar. Die zugehörigen Riemann-Summen liefern eine Approximation des Flächeninhalts und damit die Jordan-Messbarkeit (siehe linkes Bild in Abbildung 21.2). Außerdem gilt

$$v_2(M) = \int_{\alpha}^{\beta} (v(x) - u(x)) \, dx.$$

Entsprechendes gilt für yx -Normalbereiche.

Betrachten wir einige Beispiele für Normalbereiche in \mathbb{R}^2 .

Beispiel 21.27. (Normalbereiche in \mathbb{R}^2)

- (a) **achsenparallele Rechtecke:** Rechtecke mit achsenparallelen Seiten sind xy -Normalbereiche und yx -Normalbereiche, denn

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\},$$

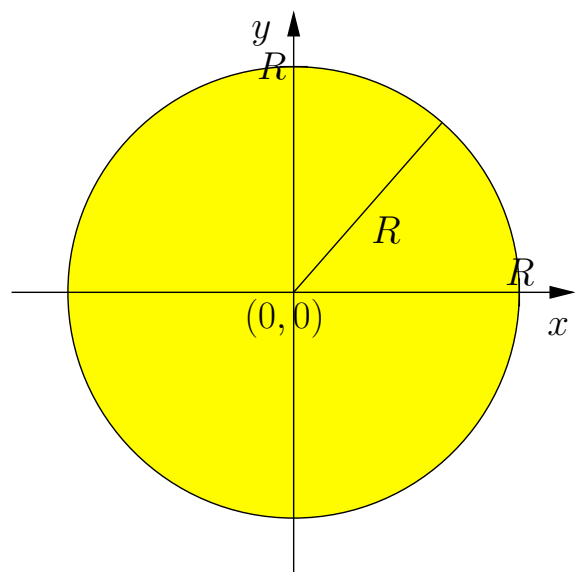
d.h. wir haben $\alpha = a_1$, $\beta = b_1$ und $u(x) = a_2$, $v(x) = b_2$ bzw. $\alpha = a_2$, $\beta = b_2$ und $u(y) = a_1$, $v(y) = b_1$.

- (b) **Kreise, d.h. Vollkreise:**

Kreise mit Mittelpunkt in $(0, 0)$
und Radius R

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

sind sowohl xy -Normalbereiche
als auch yx -Normalbereiche, denn
mit $\alpha = -R$, $\beta = R$ und $u(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $v(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
bzw. $\alpha = -R$, $\beta = R$ und $u(y) = -\sqrt{R^2 - y^2}$, $v(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$
gilt:



$$\begin{aligned} M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \right\}.$$

(c) Sei $0 < r < R$. Der Ring

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

ist **kein** xy -Normalbereich und **kein** yx -Normalbereich.

Wir lernen nun, wie man über Normalbereiche integriert.

Satz 21.28. (Integration über xy -Normalbereiche)

Sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

ein xy -Normalbereich, und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_\alpha^\beta \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Für yx -Normalbereiche gilt ein analoger Satz. Wir formulieren und beweisen diesen auf einem Übungszettel.

Beweis von Satz 21.28: Sei $Q = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ mit $M \subseteq Q$. Dann gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) \, d(x, y) &= \int_Q f_M(x, y) \, d(x, y) = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f_M(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{u(x)}^{v(x)} f_M(x, y) \, dy \, dx = \int_\alpha^\beta \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \, dx. \quad \square \end{aligned}$$

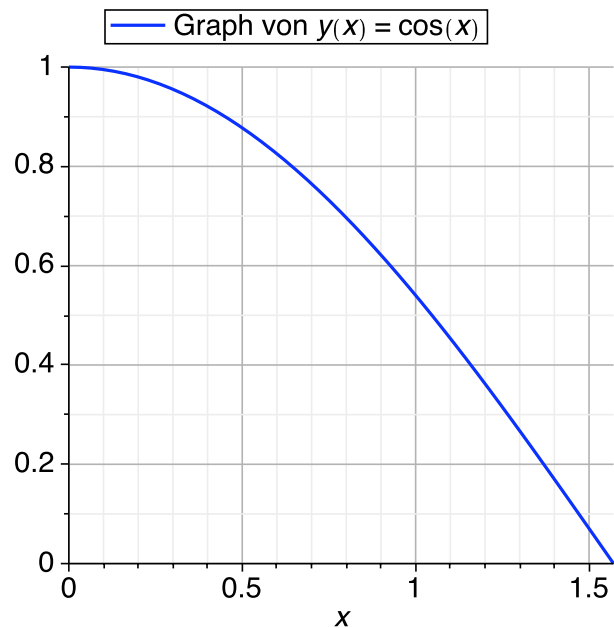
Betrachten wir zwei Beispiele für die Integration über Normalbereiche.

Beispiel 21.29. (Integration über Normalbereiche in \mathbb{R}^2)

(a) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos(x)\}$

ist ein xy -Normalbereich.Die Menge M ist links veranschaulicht. Mit Satz 21.28 finden wir

$$\begin{aligned}
v_2(M) &= \int_M 1 \, d(x, y) \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(x)} 1 \, dy \, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[y \right]_{y=0}^{y=\cos(x)} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx \\
&= \left[\sin(x) \right]_{x=0}^{x=\pi/2} \\
&= \sin(\pi/2) = 1.
\end{aligned}$$



(b) Seien

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x \sin(e^{y^2}).$$

 M ist ein xy -Normalbereich, denn

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

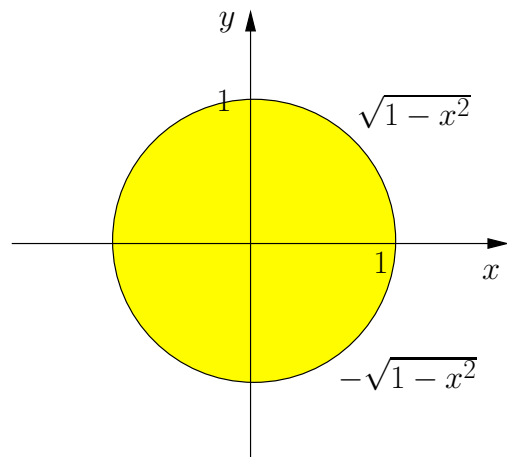
und mit Satz 21.28 finden wir

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \sin(e^{y^2}) \, dy \, dx.$$

Dieses Integral ist nicht elementar integrierbar.

 M ist ein yx -Normalbereich

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\},$$



und mit der Entsprechung von Satz 21.28 für yx -Normalbereiche finden wir

$$\begin{aligned}
 \int_M f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \sin(e^{y^2}) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-1}^1 \sin(e^{y^2}) \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \, dy \\
 &= \int_{-1}^1 \sin(e^{y^2}) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \, dy \\
 &= \int_{-1}^1 \sin(e^{y^2}) \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1-y^2})^2 - \frac{1}{2} (-\sqrt{1-y^2})^2 \right] \, dy \\
 &= \int_{-1}^1 \sin(e^{y^2}) \cdot 0 \, dy = \int_{-1}^1 0 \, dy = 0.
 \end{aligned}$$

Nun führen wir Normalbereiche in \mathbb{R}^3 ein.

Definition 21.30. (Normalbereiche in \mathbb{R}^3)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Menge. M heißt ein **xyz-Normalbereich**, wenn es einen xy -Normalbereich B und stetige Funktionen $s : B \rightarrow \mathbb{R}$, $t : B \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, s(x, y) \leq z \leq t(x, y)\}.$$

Bemerkung 21.31. (Normalbereiche in \mathbb{R}^3)

- (1) Analog definiert man yxz -, xzy -, zxy -, yzx - und zyx -Normalbereiche.
- (2) Normalbereiche in \mathbb{R}^3 sind **Jordan-messbar**.
- (3) Ist M ein xyz -Normalbereich, so gilt

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} \alpha \leq x \leq \beta, \\ u(x) \leq y \leq v(x), \\ s(x, y) \leq z \leq t(x, y) \end{array} \right\},$$

wobei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

die Beschreibung des xy -Normalbereichs B ist. Analog zu Satz 21.28 gilt für integrierbares $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_B \int_{s(x,y)}^{t(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, d(x, y) \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{s(x,y)}^{t(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx. \end{aligned} \quad (21.4)$$

(4) Analoge Formeln zu (21.4) gelten für Integrale über yzx -, xzy -, zxy -, yxz - bzw. zyx -Normalbereiche.

Betrachten wir drei Beispiele für Integrale über Normalbereiche in \mathbb{R}^3

Beispiel 21.32. (Normalbereiche in \mathbb{R}^3)

(a) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq x + y\}$

ist ein xyz -Normalbereich mit

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Für das Integral der über M integrierbaren Funktion $f(x, y, z) := 2x - y - z$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_M (2x - y - z) \, d(x, y, z) &= \int_B \int_0^{x+y} (2x - y - z) \, dz \, d(x, y) \\ &= \int_B \left[2xz - yz - \frac{1}{2}z^2 \right]_{z=0}^{z=x+y} \, d(x, y) \\ &= \int_B \left[2x(x+y) - y(x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 - 0 \right] \, d(x, y) \\ &= \int_B \frac{3}{2}(x^2 - y^2) \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{3}{2}(x^2 - y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2} \left[x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{3}{2} \left[x^2 x^2 - \frac{1}{3}x^6 - 0 \right] \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\frac{3}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^6 \right] dx = \left[\frac{3}{10} x^5 - \frac{1}{14} x^7 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{10} - \frac{1}{14} = \frac{21 - 5}{70} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}.
\end{aligned}$$

(b) Die Menge

$$\begin{aligned}
M &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1, -z \leq x \leq z, \\ -\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

ist ein zxy -Normalbereich. M ist ein auf der Spitze stehender Kegel. Wir berechnen für die integrierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z$,

$$\begin{aligned}
\int_M z \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} z \, dy \, dx \, dz = \int_0^1 \int_{-z}^z \left[z y \right]_{y=-\sqrt{z^2-x^2}}^{y=\sqrt{z^2-x^2}} dx \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-z}^z \left[z \sqrt{z^2-x^2} - (-z \sqrt{z^2-x^2}) \right] dx \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-z}^z 2z \sqrt{z^2-x^2} \, dx \, dz.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned}
x = z \sin(u) &\iff u = \arcsin\left(\frac{x}{z}\right); \\
\frac{dx}{du} = z \cos(u) &\implies dx = z \cos(u) \, du
\end{aligned}$$

finden wir mit den neuen Grenzen $u(-z) = \arcsin(-1) = -\pi/2$, $u(z) = \arcsin(1) = \pi/2$

$$\begin{aligned}
\int_M z \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_{-z}^z 2z \sqrt{z^2-x^2} \, dx \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z \sqrt{z^2 - z^2 \sin^2(u)} z \cos(u) \, du \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z^2 \sqrt{z^2 \cos^2(u)} \cos(u) \, du \, dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z^3 \underbrace{2 \cos^2(u)}_{\substack{= 1 + \cos(2u) \\ \text{nach (21.3)}}} du dz \\
&= \int_0^1 z^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2u)) du dz \\
&= \int_0^1 z^3 \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{u=-\pi/2}^{u=\pi/2} dz \\
&= \int_0^1 z^3 \left(\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right] - \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(-\pi) \right] \right) dz \\
&= \int_0^1 \pi z^3 dz = \left[\frac{\pi}{4} z^4 \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Der Durchschnitt der (unendlich langen) Zylinder

$$\begin{aligned}
Z_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{und} \\
Z_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}
\end{aligned}$$

ist die Menge

$$\begin{aligned}
M &:= Z_1 \cap Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

und diese ist ein xyz -Normalbereich. Das Volumen von M ist

$$\begin{aligned}
v_3(M) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[z \right]_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}} dy dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2 \sqrt{1-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 2 \sqrt{1-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \\
&= \int_{-1}^1 2 \sqrt{1-x^2} \left[y \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 2 \sqrt{1-x^2} 2 \sqrt{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^1 4(1-x^2) dx = \left[4x - \frac{4}{3} x^3 \right]_{x=-1}^{x=1}
\end{aligned}$$

$$= \left[4 - \frac{4}{3} \right] - \left[-4 + \frac{4}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

21.5 Exkurs: Topologische Grundbegriffe

Wir stellen nur einige topologische Grundbegriffe zusammen, die zum Teil schon aus der HM B bekannt sind (siehe Kapitel 16 und 17 des Skripts der HM B). Es ist vor allem wichtig, dass Sie ein intuitives Verständnis für diese topologischen Begriffe entwickeln und somit in der Regel durch „Inspektion“ bestimmen können, ob eine Teilmenge von \mathbb{R}^n offen oder abgeschlossen oder keines von beiden ist und was ihr Rand, ihr Inneres und ihr Abschluss sind.

Definition 21.33. (offene Teilmengen und abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^n)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) M heißt **offen**, wenn es zu jedem $\vec{x} \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U_\varepsilon(\vec{x}) := \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : |\vec{y} - \vec{x}| < \varepsilon \} \subseteq M.$$

(2) M heißt **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Die Menge

$$U_\varepsilon(\vec{x}) := \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : |\vec{y} - \vec{x}| < \varepsilon \}$$

nennen wir die **offene Kugel um \vec{x} mit Radius ε** .

Die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ sind im linken Bild in Abbildung 21.3 illustriert und erklärt.

Bemerkung 21.34. (offene Teilmengen und abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^n)

Aus Definition 21.33 folgen mit $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus M) = M$ direkt:

(1) Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n ist genau dann offen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus M$ abgeschlossen ist.

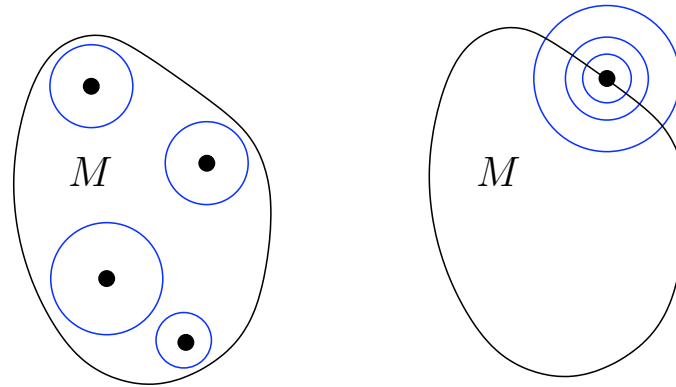


Abbildung 21.3: In beiden Bildern sehen wir eine Menge M , die innerhalb der schwarzen geschlossenen Kurve liegt. Ist diese Menge M offen, so gehört der „Rand“, also die Randkurve, nicht mit zu M , und man kann um jedem Punkt in M eine kleine (offene) Kugel legen, die ganz in der Menge M liegt (linkes Bild). Ist M abgeschlossen, so gehört der „Rand“, also die Randkurve, mit zu M . – Im rechten Bild ist eine typische Situation bei einem Randpunkt zu sehen. Ein Teil jedes (offenen) Balls um den Randpunkt gehört zur Menge M und ein Teil gehört zu $\mathbb{R}^n \setminus M$.

(2) Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Betrachten wir einige Beispiele zu offenen und abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{R}^n .

Beispiel 21.35. (offene bzw. abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^n)

(a) \mathbb{R}^n ist offen; die leere Menge \emptyset ist abgeschlossen.

Erklärung: Für jedes \vec{x} gilt mit jedem $\varepsilon > 0$, das $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$; also ist \mathbb{R}^n offen. Folglich ist $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

Die leere Menge \emptyset ist offen; \mathbb{R}^n ist abgeschlossen.

Erklärung: Die leere Menge \emptyset enthält keine Punkte. Also erfüllen alle Punkte aus der leeren Menge \emptyset die Eigenschaft in der Definition einer offenen Menge, und \emptyset ist offen. Folglich ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$ abgeschlossen.

\mathbb{R}^n und \emptyset sind die einzigen Teilmengen von \mathbb{R}^n , die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

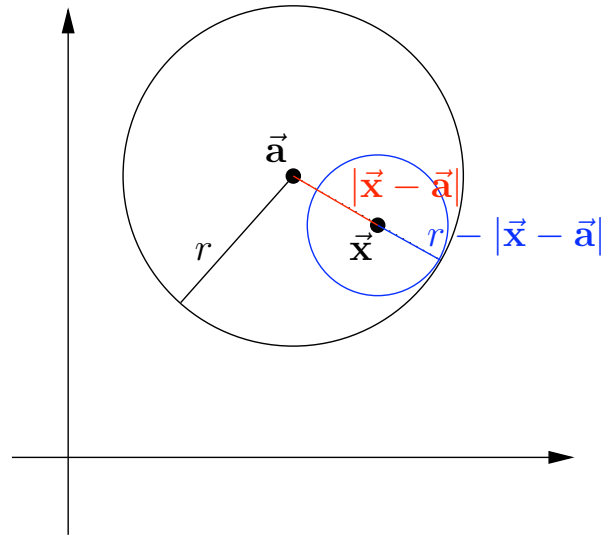
(b) Für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ ist die offene Kugel $U_r(\vec{a})$ offen.

Erklärung: Sei $\vec{x} \in U_r(\vec{a})$ beliebig. Wir zeigen nun, dass die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{x})$ mit $\varepsilon := r - |\vec{x} - \vec{a}|$ ganz in $U_r(\vec{a})$ liegt.

Sei dazu $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x})$ beliebig.
Dann gilt $|\vec{y} - \vec{x}| < \varepsilon$, und mit
der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\vec{y} - \vec{a}| &= |(\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{a})| \\ &\leq \underbrace{|\vec{y} - \vec{x}|}_{< \varepsilon} + |\vec{x} - \vec{a}| \\ &< \varepsilon + |\vec{x} - \vec{a}| \\ &= (r - |\vec{x} - \vec{a}|) + |\vec{x} - \vec{a}| \\ &= r, \end{aligned}$$

also $|\vec{y} - \vec{a}| < r$, d.h. $\vec{y} \in U_r(\vec{a})$.
Da $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x})$ beliebig war,
folgt, dass $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq U_r(\vec{a})$. Also
ist $U_r(\vec{a})$ offen.



(c) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} < \vec{b}$. Der offene n -dimensionale Quader

$$]\vec{a}, \vec{b}[= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n\}$$

ist offen, aber nicht abgeschlossen.

Erklärung: Dieses zeigt man analog zu (b), indem man nachweist, dass für
jedes $\vec{x} \in]\vec{a}, \vec{b}[$ die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{x})$ mit

$$\varepsilon := \min_{i=1,2,\dots,n} (\min \{|x_i - a_i|, |x_i - b_i|\})$$

ganz in $]\vec{a}, \vec{b}[$ liegt.

Der (abgeschlossene) n -dimensionale Quader

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n\}$$

ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Erklärung: Man zeigt, dass $\mathbb{R}^n \setminus [\vec{a}, \vec{b}]$ offen ist, indem man nachweist, dass
für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus [\vec{a}, \vec{b}]$ die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{x})$ mit

$$\varepsilon := \min_{i=1,2,\dots,n} (\min (\{|x_i - a_i|, |x_i - b_i|\} \setminus \{0\}))$$

ganz in $\mathbb{R}^n \setminus [\vec{a}, \vec{b}]$ liegt.

(d) $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist offen.

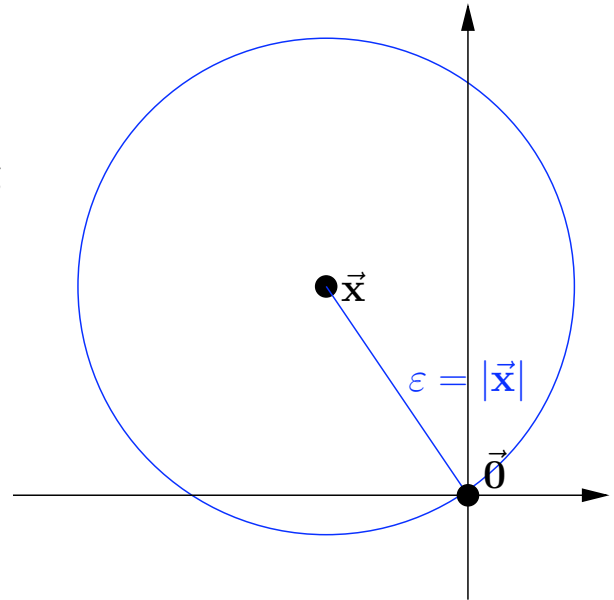
Erklärung: Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ beliebig. Dann ist $\vec{x} \neq \vec{0}$ und somit $|\vec{x}| > 0$. Wir zeigen nun, dass die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{x})$ mit $\varepsilon := |\vec{x}|$ ganz in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ liegt; damit folgt dann, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ offen ist.

Sei also $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x})$ beliebig. Dann gilt

$$|\vec{y} - \vec{x}| < \varepsilon = |\vec{x}|.$$

Mit der unteren Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\vec{y}| &= |\vec{x} + (\vec{y} - \vec{x})| \\ &\geq \left| |\vec{x}| - |\vec{y} - \vec{x}| \right| \\ &\geq |\vec{x}| - \underbrace{|\vec{y} - \vec{x}|}_{< \varepsilon = |\vec{x}|} \\ &> |\vec{x}| - |\vec{x}| = 0, \end{aligned}$$



also $|\vec{y}| > 0$, d.h. $\vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Da \vec{y} aus $U_\varepsilon(\vec{x})$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{x})$ mit $\varepsilon = |\vec{x}|$ ganz in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ liegt. Also ist $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ offen.

(e) $\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

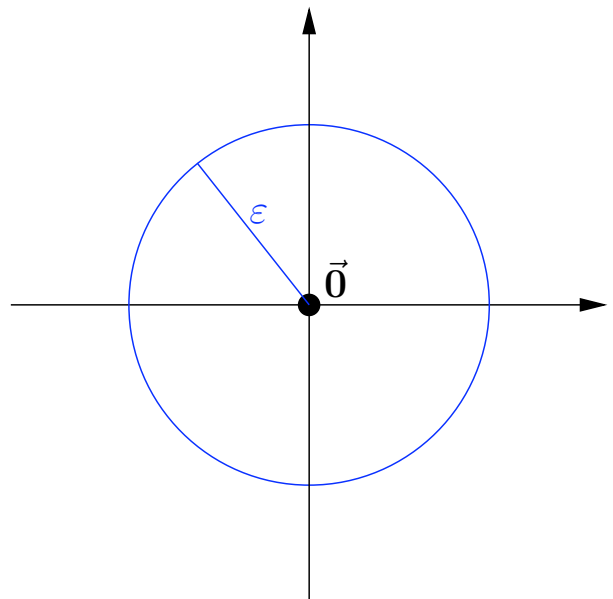
Erklärung: $\{\vec{0}\} = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})$, und $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist nach (d) offen. Also ist $\{\vec{0}\}$ abgeschlossen.

$\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nicht offen.

Erklärung (siehe Skizze nebenan):

Für jeden Radius $\varepsilon > 0$ ist die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{0})$ nicht in $\{\vec{0}\}$ enthalten.

Also gibt es keine offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{0})$ mit $U_\varepsilon(\vec{0}) \subseteq \{\vec{0}\}$, und $\{\vec{0}\}$ ist nicht offen.



(f) $M_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1\}$ und $M_2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| \leq 1\}$ sind beide abgeschlossen, aber nicht offen.

Erklärung: Um zu zeigen, dass beide Mengen abgeschlossen sind, betrachten wir $\mathbb{R}^n \setminus M_1$ bzw. $\mathbb{R}^n \setminus M_2$, und zeigen, dass diese Menge offen ist. – Um zu zeigen, dass M_1 und M_2 nicht offen sind, betrachten wir einen Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{x}| = 1$. Dieser gehört zu M_1 und M_2 . Wir zeigen nun, dass es für ein solches \vec{x} keine offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{x})$ gibt mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq M_1$ bzw. $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq M_2$.

(g) Die Teilmenge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ von \mathbb{R}^1 ist weder abgeschlossen noch offen.

Erklärung: $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist nicht offen, denn: Sei $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und $U_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig. Das Intervall $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ enthält immer irrationale Zahlen. Also kann nicht $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gelten, d.h. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist nicht offen. Dass $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nicht abgeschlossen ist, zeigen wir später.

Wir lernen nun einen nützlichen Satz über abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^n kennen.

Satz 21.36. (Charakterisierung abgeschlossener Teilmengen von \mathbb{R}^n)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind **äquivalent**:

(i) M ist **abgeschlossen**.

(ii) Für jede Folge (\vec{x}_k) in M gilt: Existiert $\vec{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k$ in \mathbb{R}^n , so ist $\vec{x} \in M$.

Beweis von Satz 21.36:

- *Beweis von (i) \Rightarrow (ii):* Nach Voraussetzung ist M abgeschlossen, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist offen. Wir müssen zeigen, dass (ii) gilt.

Sei also (\vec{x}_k) eine beliebige Folge in M , so dass $\vec{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k$ existiert. Wir müssen zeigen, dass $\vec{x} \in M$ ist.

Wäre $\vec{x} \notin M$, so wäre $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Da $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist, gäbe es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$. Da $\vec{x}_k \in M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, würde dann gelten $|\vec{x}_k - \vec{x}| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dieses ist aber ein Widerspruch zur Konvergenz von (\vec{x}_k) gegen \vec{x} . \nexists Also war die Annahme $\vec{x} \notin M$ falsch, und es folgt $\vec{x} \in M$.

- *Beweis von (ii) \Rightarrow (i):* Es gelte (ii). Wir müssen zeigen, dass M abgeschlossen ist, d.h. dass $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Sei also $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M$ beliebig.

Angenommen, es gäbe **kein** $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ würde gelten $U_\varepsilon(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$.

Dann würde zu jedem $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ ein $\vec{x}_k \in M$ mit $|\vec{x}_k - \vec{x}| < \varepsilon_k$ existieren (weil $U_{\varepsilon_k}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ gilt). Damit ist (\vec{x}_k) eine Folge in M mit dem Grenzwert \vec{x} , aber $\vec{x} \notin M$. Dieses ist ein Widerspruch zu (ii). \nexists Also war die Annahme falsch, und es gibt zu jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist offen. \square

Betrachten wir einige Beispiele zur Anwendung von Satz 21.36.

Beispiel 21.37. (Anwendung von Satz 21.36)

(a) Die „abgeschlossene“ Kugel

$$\overline{U_r(\vec{a})} := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| \leq r \}$$

ist abgeschlossen, denn:

Betrachten wir eine beliebige Folge (\vec{x}_k) in $\overline{U_r(\vec{a})}$, die gegen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, also

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x} &\implies \lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}_k - \vec{a}) = \vec{x} - \vec{a} \\ &\implies \lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_k - \vec{a}| = |\vec{x} - \vec{a}|. \end{aligned}$$

Weil $\vec{x}_k \in \overline{U_r(\vec{a})}$ ist gilt $|\vec{x}_k - \vec{a}| \leq r$ und somit auch

$$|\vec{x} - \vec{a}| = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|\vec{x}_k - \vec{a}|}_{\leq r} \leq r.$$

Also gehört \vec{x} zu $\overline{U_r(\vec{a})}$. Nach Satz 21.36 ist $\overline{U_r(\vec{a})}$ somit abgeschlossen.

(b) $K := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1 \}$ ist abgeschlossen. Die Begründung ist weitgehend analog zu (a):

Sei (\vec{x}_k) eine beliebige Folge in K , die gegen ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Dann gilt

$$\vec{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k \implies |\vec{x}| = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|\vec{x}_k|}_{=1} = 1,$$

d.h. $\vec{x} \in K$. Also ist K nach Satz 21.36 abgeschlossen.

(c) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist nicht abgeschlossen.

Sei (x_k) eine Folge in $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, die gegen die irrationale Zahl $x := \sqrt{2} - 1 \in [0, 1]$ konvergiert. Wir wissen, dass es eine solche Folge in $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gibt, weil wir alle irrationalen Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen darstellen können. Da $x = \sqrt{2} - 1$ nicht zu $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gehört, kann $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nach Satz 21.36 nicht abgeschlossen sein.

Wir lernen nun weitere Begriffe kennen.

Definition 21.38. (Rand, Inneres, Abschluss einer Teilmenge von \mathbb{R}^n)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$(1) \partial M := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ enthält } U_\varepsilon(\vec{x}) \\ \text{mindestens einen Punkt von } M \text{ und} \\ \text{mindestens einen Punkt von } \mathbb{R}^n \setminus M \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \\ \text{und } U_\varepsilon(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

heißt der **Rand von M** . Punkte aus ∂M nennen wir auch **Randpunkte von M** .

(2) $\overset{\circ}{M} := M \setminus \partial M$ heißt das **Innere von M** .

(3) $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der **Abschluss von M** .

Im rechten Bild in Abbildung 21.3 ist die typische Situation eines Randpunktes gezeichnet.

Beispiel 21.39. (Rand, Inneres, Abschluss einer Teilmenge von \mathbb{R}^n)

Betrachten wir die Beispiele aus Beispiel 21.35 und geben jeweils den Rand, das Innere und den Abschluss an.

(a) Es gilt $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$, da für alle Punkte \vec{x} in \mathbb{R}^n gilt, dass jedes $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Somit folgt auch $\overset{\circ}{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ und $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$.

Da für alle Punkte \vec{x} in \mathbb{R}^n gilt, dass jedes $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, folgt $\partial \emptyset = \emptyset$. Somit finden wir auch $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

- (b) Für die offene Kugel $U_r(\vec{\mathbf{a}}) = \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : |\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}| < r \}$ um $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$ gilt

$$\partial U_r(\vec{\mathbf{a}}) = \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : |\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}| = r \}, \quad (21.5)$$

$$U_r(\vec{\mathbf{a}})^\circ = \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : |\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}| < r \}, \quad (21.6)$$

$$\overline{U_r(\vec{\mathbf{a}})} = \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : |\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}| \leq r \}. \quad (21.7)$$

Erklärung: Wir zeigen nur (21.5). (21.6) und (21.7) folgen dann direkt aus Definition 21.38.

Sei $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}| = r$. Dann gilt für $\varepsilon > 0$ beliebig, dass $U_\varepsilon(\vec{\mathbf{x}})$ Punkte aus $U_r(\vec{\mathbf{a}})$ und Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus U_r(\vec{\mathbf{a}})$ enthält, denn: Der Einfachheit halber betrachten wir nur $\varepsilon \leq r$. (Es ist klar, dass die gesuchte Eigenschaft dann auch für $r > \varepsilon$ gilt.) Die Punkte $\vec{\mathbf{y}} := \vec{\mathbf{a}} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})$ bzw. $\vec{\mathbf{z}} := \vec{\mathbf{a}} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}})$ erfüllen jeweils

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{x}}| &= \left| \vec{\mathbf{a}} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{x}} \right| \\ &= \left| -\frac{\varepsilon}{2r} (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) \right| = \frac{\varepsilon}{2r} \underbrace{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}|}_{=r} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{x}}| &= \left| \vec{\mathbf{a}} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{x}} \right| \\ &= \left| \frac{\varepsilon}{2r} (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) \right| = \frac{\varepsilon}{2r} \underbrace{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}|}_{=r} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

d.h. $\vec{\mathbf{y}}$ und $\vec{\mathbf{z}}$ sind beide in $U_\varepsilon(\vec{\mathbf{x}})$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{a}}| &= \left| \vec{\mathbf{a}} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{a}} \right| = \left| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) \right| \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right) \underbrace{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}|}_{=r} = r - \frac{\varepsilon}{2} < r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{a}}| &= \left| \vec{\mathbf{a}} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{a}} \right| = \left| \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) \right| \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) \underbrace{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}|}_{=r} = r + \frac{\varepsilon}{2} > r, \end{aligned}$$

d.h. $\vec{\mathbf{y}} \in U_r(\vec{\mathbf{a}})$ und $\vec{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n \setminus U_r(\vec{\mathbf{a}})$. Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ mit $|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}| = r$ ein Randpunkt von $U_r(\vec{\mathbf{a}})$.

(c) Seien $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\mathbf{a}} < \vec{\mathbf{b}}$. Für den offenen n -dimensionalen Quader

$$] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n \}$$

gilt

$$\partial] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] : \begin{array}{l} x_i = a_i \text{ oder } x_i = b_i \\ \text{für ein } i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned}] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [&= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n \} \\ &=] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [} &= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n \} \\ &= [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] . \end{aligned}$$

Seien $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\mathbf{a}} < \vec{\mathbf{b}}$. Für den (abgeschlossenen) n -dimensionalen Quader

$$[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n \}$$

gilt

$$\partial [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] : \begin{array}{l} x_i = a_i \text{ oder } x_i = b_i \\ \text{für ein } i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] &= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n \} \\ &=] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]} &= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n \} \\ &= [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] . \end{aligned}$$

Erklärung: Dieses ist anschaulich klar, da der Rand des Quaders die Randfläche/Oberfläche des Quaders ist. Beim Rand $\partial [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ und $\partial] \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} [$ ist zu beachten, dass „ $x_i = a_i$ oder $x_i = b_i$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ “ bedeutet, dass für **mindestens ein** $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Bedingung $x_i = a_i$ oder $x_i = b_i$ gilt.

Ein formaler Nachweis ist etwas rechenaufwendig.

(d) Für $M := \mathbb{R}^n \setminus \{ \vec{\mathbf{0}} \}$ gilt $\partial M = \{ \vec{\mathbf{0}} \}$, $\overset{\circ}{M} = \mathbb{R}^n \setminus \{ \vec{\mathbf{0}} \}$ und $\overline{M} = \mathbb{R}^n$.

Erklärung: Es gilt $\mathbb{R}^n \setminus M = \{ \vec{\mathbf{0}} \}$. Für $\vec{\mathbf{0}}$ gilt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{\mathbf{0}})$ die Punkte $(\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{ \vec{\mathbf{0}} \}$ und $\vec{\mathbf{0}} \in \{ \vec{\mathbf{0}} \}$

enthält. Also ist $\vec{0}$ ein Randpunkt von $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ offen ist, kann kein Punkt aus $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein Randpunkt von $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ sein. Also folgt $\partial(\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$.

(e) Für $\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\partial\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$, $\overset{\circ}{\{\vec{0}\}} = \emptyset$ und $\overline{\{\vec{0}\}} = \{\vec{0}\}$.

Erklärung: Für $\vec{0}$ gilt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Kugel $U_\varepsilon(\vec{0})$ die Punkte $\vec{0} \in \{\vec{0}\}$ und $(\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ enthält. Also ist $\vec{0}$ ein Randpunkt von $\{\vec{0}\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ offen ist, kann kein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein Randpunkt von $\{\vec{0}\}$ sein. Also folgt $\partial\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$.

(f) Für $M_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1\}$ bzw. $M_2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| \leq 1\}$ gelten

$$\partial M_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1\} = M_1,$$

$$\overset{\circ}{M}_1 = \emptyset,$$

$$\overline{M}_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1\} = M_1,$$

bzw.

$$\partial M_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1\} = M_1,$$

$$\overset{\circ}{M}_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| < 1\},$$

$$\overline{M}_2 = M_2.$$

Nachweis: Wir zeigen dieses in einer Übungsaufgabe.

(g) Für $M := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gilt $\partial M = [0, 1]$, $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ und $\overline{M} = [0, 1]$.

Erklärung: Dieser Beweis ist nicht-trivial und nutzt, dass einerseits die rationalen Zahlen in den reellen Zahlen „dicht liegen“, aber das andererseits in jedem Intervall $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ immer irrationale Zahlen enthalten sind.

Im nächsten Satz halten wir einige Beziehungen zwischen den Eigenschaften einer Menge und ihren Inneren, ihrem Rand und ihrem Abschluss fest. Diese Eigenschaften sollten anschaulich klar sein.

Satz 21.40. (Rand, Inneres und Abschluss einer Teilmenge von \mathbb{R}^n)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gelten:

$$(1) \overset{\circ}{M} \cap \partial M = \emptyset, \overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$$

(2) $\overset{\circ}{M}$ ist offen; \overline{M} ist abgeschlossen.

(3) M ist offen. $\iff M = \overset{\circ}{M}$

(4) M ist abgeschlossen. $\iff M = \overline{M}$

(5) ∂M ist abgeschlossen.

(6) Wenn $M \subseteq A$ ist und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, dann ist $\overline{M} \subseteq A$.

Beweis von Satz 21.40: Wir beweisen die Aussagen des Satzes in einer Übungsaufgabe. \square

21.6 Jordansche Nullmengen

Wir lernen nun den neuen Begriff einer Jordanschen Nullmenge kennen. Als Vorbereitung erinnern wir uns noch einmal daran, wie wir eine Jordan-messbare Menge definiert hatten (siehe Definition 21.16):

Eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-messbar**, wenn es einen n -dimensionalen Quader Q mit $M \subseteq Q$ gibt, so dass die charakteristische Funktion von M ,

$$1_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{x} \in M, \\ 0 & \text{wenn } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M, \end{cases}$$

über Q integrierbar ist. Wir bezeichnen dann

$$v_n(M) := \int_Q 1_M(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

als das **n-dimensionale Volumen von M** .

Nun definieren wir Jordansche Nullmengen.

Definition 21.41. (Jordansche Nullmenge)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt eine **Jordansche Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele n -dimensionale Quader $Q_1, Q_2, \dots, Q_N \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^N Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^N v_n(Q_k) < \varepsilon.$$

Das N (= Anzahl der n -dimensionalen Quader) in Definition 21.41 kann von $\varepsilon > 0$ abhängen und wachsen, wenn $\varepsilon > 0$ kleiner wird.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele für Jordansche Nullmengen, um uns Definition 21.41 klar zu machen.

Beispiel 21.42. (Jordansche Nullmenge)

$$(a) \quad M := [0, 1] \times \{0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \text{ und } y = 0\}$$

ist als Teilmenge von \mathbb{R}^2 eine Jordansche Nullmenge.

Erklärung: Für die 2-dimensionalen Quader

$$Q_\varepsilon := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \text{ und } y \in \left[-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right] \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

gilt $M \subseteq Q_\varepsilon$ und

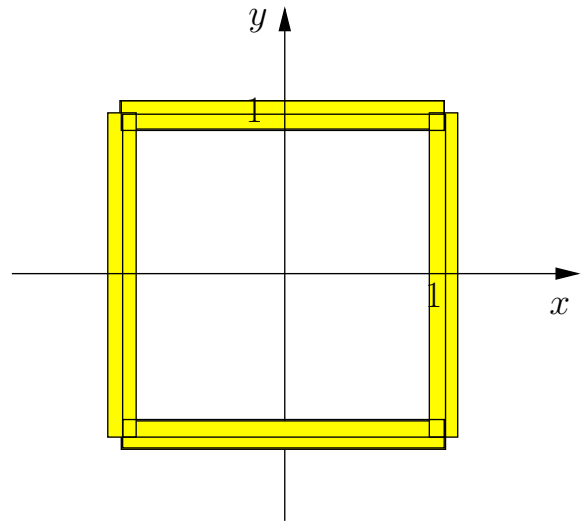
$$v_2(Q_\varepsilon) = (1 - 0) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} - \left(-\frac{\varepsilon}{3}\right) \right) = \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein werden kann, sind die Bedingungen aus Definition 21.41 erfüllt (mit hier nur einem einzigen Quader), und M ist eine Jordansche Nullmenge.

$$(b) \quad M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

ist als Teilmenge von \mathbb{R}^2 eine Jordansche Nullmenge.

Erklärung: Die Menge M ist der Rand des Quadrats mit der Seitenlänge 2 und dem „Mittelpunkt“ in $(0, 0)$. Wir wählen hier analog zum vorigen Beispiel für $\varepsilon > 0$ die vier 2-dimensionalen Quader (siehe Skizze):



$$Q_{1,\varepsilon} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ und } y \in \left[1 - \frac{\varepsilon}{18}, 1 + \frac{\varepsilon}{18}\right] \right\},$$

$$Q_{2,\varepsilon} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ und } y \in \left[-1 - \frac{\varepsilon}{18}, -1 + \frac{\varepsilon}{18}\right] \right\},$$

$$Q_{3,\varepsilon} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[1 - \frac{\varepsilon}{18}, 1 + \frac{\varepsilon}{18}\right] \text{ und } y \in [-1, 1] \right\},$$

$$Q_{4,\varepsilon} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-1 - \frac{\varepsilon}{18}, -1 + \frac{\varepsilon}{18}\right] \text{ und } y \in [-1, 1] \right\}.$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $M \subseteq Q_{1,\varepsilon} \cup Q_{2,\varepsilon} \cup Q_{3,\varepsilon} \cup Q_{4,\varepsilon}$. Weiter gilt

$$v_2(Q_{2,\varepsilon}) = v_2(Q_{4,\varepsilon}) = (1 - (-1)) \cdot \left(-1 + \frac{\varepsilon}{18} - \left(-1 - \frac{\varepsilon}{18}\right)\right) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{9} = \frac{2}{9}\varepsilon,$$

$$v_2(Q_{1,\varepsilon}) = v_2(Q_{3,\varepsilon}) = (1 - (-1)) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{18} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{18}\right)\right) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{9} = \frac{2}{9}\varepsilon,$$

und somit finden wir

$$\sum_{k=1}^4 v_2(Q_{k,\varepsilon}) = 4 \cdot \frac{2}{9}\varepsilon = \frac{8}{9}\varepsilon < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist M nach Definition 21.41 eine Jordansche Nullmenge.

(c) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist in \mathbb{R}^2 eine Jordansche Nullmenge.

Erklärung: M ist der Rand der Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius 1. Diesen können wir mit Rechtecken überdecken. Erhöhen wir die Anzahl der Rechtecke und machen diese immer kleiner, so ist wird der Summe der Flächen dieser Rechtecke beliebig klein. Die genaue Konstruktion der Rechtecke kann mit Hilfe von in M einbeschriebenen und um M umbeschriebenen regelmäßigen n -Ecken erfolgen. Dieses ist nicht schwierig aber technisch etwas aufwendig, und wir gehen daher nicht in die Details.

- (d) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}$ ist in \mathbb{R}^3 eine Jordansche Nullmenge.

Erklärung: Für $\varepsilon > 0$ wählen wir den 3-dimensionalen Quader

$$Q_\varepsilon := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \text{ und } -\frac{\varepsilon}{9} \leq z \leq \frac{\varepsilon}{9}\}$$

Dann ist $M \subseteq Q_\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und

$$v_3(Q_\varepsilon) = (1 - (-1)) \cdot (1 - (-1)) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{9} - \left(-\frac{\varepsilon}{9}\right)\right) = \frac{8}{9} \varepsilon < \varepsilon.$$

Nach Definition 21.41 ist M damit eine Jordansche Nullmenge.

- (e) $M := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\}$ (wobei die $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ sind) ist als Teilmenge von \mathbb{R}^n eine Jordansche Nullmenge.

Erklärung: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen für jeden der N Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ einen Quader mit Volumen $\varepsilon/(2N)$ der diesen Punkt enthält. Die Vereinigung dieser N Quader enthält dann M , und die Summe der Volumina der N Quader ist $N \cdot \varepsilon/(2N) = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist M nach Definition 21.41 eine Jordansche Nullmenge.

Wir sehen an den Beispielen, dass es sich bei Jordanschen Nullmengen **in der Regel um ein beschränktes Objekt in \mathbb{R}^n von niedrigerer Dimension handelt**: eine beschränkte Kurve in \mathbb{R}^2 , eine beschränkte Fläche in \mathbb{R}^3 , endlich viele Punkte in \mathbb{R}^n , ein $(n - 1)$ -dimensionales beschränktes Volumen im \mathbb{R}^n ,

Bemerkung 21.43. (Jordansche Nullmenge)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **Jordansche Nullmenge**. Dann gelten:

- (1) M ist Jordan-messbar und $v_n(M) = 0$.

Erklärung: Für $\varepsilon > 0$ seien $Q_{1,\varepsilon}, Q_{2,\varepsilon}, \dots, Q_{N_\varepsilon,\varepsilon}$ die Quader aus der Definition einer Jordanschen Nullmenge mit

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Q_{k,\varepsilon} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} v_n(Q_{k,\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Wir nehmen nun einen Quader Q mit $M \subseteq Q$ und $\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Q_{k,\varepsilon} \subseteq Q$, der aber nicht von ε abhängt. Q kann mit einer Zerlegung

$$\mathcal{Z}_\varepsilon := \{\tilde{Q}_{1,\varepsilon}, \dots, \tilde{Q}_{K_\varepsilon,\varepsilon}, \tilde{Q}_{K_\varepsilon+1,\varepsilon}, \dots, \tilde{Q}_{L_\varepsilon,\varepsilon}\}$$

in Teilquader zerlegt werden, so dass die Teilquader $\tilde{Q}_{1,\varepsilon}, \dots, \tilde{Q}_{K_\varepsilon,\varepsilon}$ die Jordansche Nullmenge M überdecken und

$$\bigcup_{k=1}^{K_\varepsilon} \tilde{Q}_{k,\varepsilon} = \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Q_{k,\varepsilon}.$$

Damit gilt für die Riemannsche Zwischensumme

$$S(1_M; \mathcal{Z}_\varepsilon, X_{\mathcal{Z}}) \leq \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} v_n(\tilde{Q}_{k,\varepsilon}) \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} v_n(Q_{k,\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Mit Hilfe dieser Überlegung kann man sich mit der Definition des Integrals über die Riemannschen Zwischensummen klarmachen, dass

$$v_n(M) = \int_Q 1_M(\vec{x}) \, d\vec{x} < \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

gilt und das Integral somit Null ist.

- (2) Ist $A \subseteq M$, so ist A ebenfalls eine Jordansche Nullmenge.

Erklärung: Dieses ist klar von der Definition einer Jordanschen Nullmenge, denn die Quader für M in der Eigenschaft einer Jordanschen Nullmenge können direkt für die Teilmenge A verwendet werden.

- (3) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so ist f über M integrierbar und

$$\int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} = 0.$$

Erklärung: Dies kann man sich analog zu (1) überlegen.

Der nächste Satz ist für uns sehr wichtig.

Satz 21.44. (M Jordan-messbar $\iff \partial M$ ist Jordansche Nullmenge)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **Jordan-messbar**, genau dann, wenn der **Rand** ∂M von M eine **Jordansche Nullmenge** ist.

Diesen Satz beweisen wir nicht.

Wir ziehen direkt zwei wichtige Schlussfolgerungen aus diesem Satz.

Folgerung 21.45. (aus Satz 21.44)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **Jordan-messbar** und $\overset{\circ}{M} \subseteq A \subseteq \overline{M}$. Dann ist A **Jordan-messbar**. Insbesondere sind $\overset{\circ}{M}$ und \overline{M} **Jordan-messbar**.

Beweisidee von Satz 21.45: Man zeigt, dass $\partial A = \partial M$ ist. Da M Jordan-messbar ist, wissen wir dann aus Satz 21.44, dass $\partial M = \partial A$ eine Jordansche Nullmenge ist. Nach Satz 21.44 ist damit auch A Jordan-messbar. \square

Folgerung 21.46. (aus Satz 21.44)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ **Jordan-messbar**. Dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ **Jordan-messbar**.

Beweisidee von Satz 21.46: Es gilt $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A \setminus B) \subseteq \partial A \cup \partial B$. Da A und B Jordan-messbar sind, sind ∂A und ∂B nach Satz 21.44 Jordansche Nullmengen. Man kann sich überlegen, dass $\partial A \cup \partial B$ damit auch eine Jordansche Nullmenge ist. Nach Bemerkung 21.43 (2) sind somit auch $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A \setminus B)$ Jordansche Nullmengen, und nach Satz 21.44 folgt, dass $A \cup B, A \cap B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar sind. \square

Satz 21.47. (Integration über Jordan-messbare Mengen)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ **Jordan-messbar** und $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ über A und über B integrierbar. Dann ist f auch über $A \cup B, A \cap B$ und $A \setminus B$ integrierbar, und es gilt:

$$(1) \int_{A \cup B} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_B f(\vec{x}) \, d\vec{x} - \int_{A \cap B} f(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

$$(2) \text{ Ist } B \subseteq A, \text{ so gilt: } \int_{A \setminus B} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} - \int_B f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Beweis von Satz 21.47: Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

- *Schritt 1:* Wir zeigen (1) für den Fall, dass $A \cap B = \emptyset$.

Sei dazu Q ein n -dimensionaler Quader mit $A \cup B \subseteq Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_B f(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_Q f_A(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_Q f_B(\vec{x}) \, d\vec{x} \\ &= \int_Q (f_A(\vec{x}) + f_B(\vec{x})) \, d\vec{x} \\ &= \int_Q f_{A \cup B}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{A \cup B} f(\vec{x}) \, d\vec{x}. \end{aligned}$$

- *Schritt 2:* Wir zeigen (2).

Sei $B \subseteq A$, d.h. $A = B \cup (A \setminus B)$ und $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Also folgt aus Schritt 1

$$\int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_B f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{A \setminus B} f(\vec{x}) \, d\vec{x},$$

und Umsortieren liefert (2).

- *Schritt 3:* Wir zeigen (1).

Es gilt $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ mit $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ und $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ mit $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Nach Schritt 1 finden wir somit

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_B f(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{(A \setminus B) \cup (A \cap B)} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{(B \setminus A) \cup (A \cap B)} f(\vec{x}) \, d\vec{x} \\ &= \int_{A \setminus B} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{A \cap B} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{B \setminus A} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{A \cap B} f(\vec{x}) \, d\vec{x}. \end{aligned}$$

Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ und $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ und $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ können wir nach Schritt 1 die ersten drei Integrale „zusammenfassen“ mittels

$$\int_{A \setminus B} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{A \cap B} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{B \setminus A} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{A \cup B} f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Einsetzen in die obige Formel und Umstellen liefert (1). □

Wir ziehen aus dem Satz einige nützliche Folgerungen.

Für den Fall, dass $f(\vec{x}) = 1$ für alle \vec{x} ist, erhalten wir als Sonderfall von Satz 21.47 die erste Folgerung.

Folgerung 21.48. (aus Satz 21.47)

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so gilt:

- (1) $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$
 (2) Ist $B \subseteq A$, so gilt: $v_n(A \setminus B) = v_n(A) - v_n(B)$.

Folgerung 21.49. (aus Folgerung 21.45 und Satz 21.47)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $\overset{\circ}{M} \subseteq A \subseteq \overline{M}$. Ist $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ über M integrierbar, so ist f auch über A integrierbar und

$$\int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Insbesondere gilt:

$$(1) \int_{\overset{\circ}{M}} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\overline{M}} f(\vec{x}) \, d\vec{x},$$

$$(2) v_n(M) = v_n(A) = v_n(\overset{\circ}{M}) = v_n(\overline{M}).$$

Beweis von Folgerung 21.49: Aus Folgerung 21.45 wissen wir bereits, dass A auch Jordan-messbar ist und dass damit ∂A eine Jordansche Nullmenge ist. Weiter gilt $A = \overset{\circ}{A} \cup (A \cap \partial A)$ und $\overset{\circ}{A} \cap (A \cap \partial A) = \emptyset$. Weiter sind $\overset{\circ}{A}$ und $A \cap \partial A$ nach Folgerung 21.45 und nach Folgerung 21.46 Jordan-messbar. Nach Satz 21.47 gilt somit

$$\int_A f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\overset{\circ}{A}} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \underbrace{\int_{A \cap \partial A} f(\vec{x}) \, d\vec{x}}_{=0} = \int_{\overset{\circ}{A}} f(\vec{x}) \, d\vec{x}, \quad (21.8)$$

wobei das Integral über $A \cap \partial A$ den Wert Null hat, weil $A \cap \partial A$ als Teilmenge der Jordanschen Nullmenge ∂A ebenfalls eine Jordansche Nullmenge ist.

Da M Jordan-messbar und damit ∂M eine Jordansche Nullmenge ist, zeigt man analog

$$\int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\overset{\circ}{M}} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \underbrace{\int_{M \cap \partial M} f(\vec{x}) \, d\vec{x}}_{=0} = \int_{\overset{\circ}{M}} f(\vec{x}) \, d\vec{x}. \quad (21.9)$$

Aus $\overset{\circ}{M} \subseteq A \subseteq \overline{M}$ folgt, dass $\overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{A}$ ist, und Gleichsetzen der rechten Seiten von (21.8) und (21.9) liefert Aussage (1). Aussage (2) ist ein Sonderfall von Aussage (1) mit $f(x) = 1$. \square

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 21.50. (Integration über Jordan-messbare Mengen)

(a) Sei $0 < r < R$ und

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\} = \overline{U_R(0,0)} \setminus U_r(0,0).$$

(M ist ein abgeschlossener Kreisring um $(0,0)$ mit Innenradius r und Außenradius R .) Die Kreise $\overline{U_R(0,0)}$ und $U_r(0,0)$ sind Jordan-messbar. Nach Folgerung 21.46 ist $M = \overline{U_R(0,0)} \setminus U_r(0,0)$ ebenfalls Jordan-messbar.

Ist $f : \overline{U_R(0,0)} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt nach Satz 21.47 (2) und Folgerung 21.49

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{\overline{U_R(0,0)} \setminus U_r(0,0)} f(x, y) \, d(x, y) \\ &= \int_{\overline{U_R(0,0)}} f(x, y) \, d(x, y) - \int_{U_r(0,0)} f(x, y) \, d(x, y) \\ &= \int_{\overline{U_R(0,0)}} f(x, y) \, d(x, y) - \int_{\overline{U_r(0,0)}} f(x, y) \, d(x, y). \end{aligned}$$

(b) Sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{9}{4} \text{ oder } (x+1)^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}\}$. Dann ist M auch darstellbar als

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ oder } (x-(-1))^2 + y^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\}$$

$$= \overline{U_{3/2}(1, 0)} \cup \overline{U_{3/2}(-1, 0)}.$$

Die Kreise/Vollkreise $\overline{U_{3/2}(1, 0)}$ und $\overline{U_{3/2}(-1, 0)}$ sind Jordan-messbar. Nach Folgerung 21.46 ist $M = \overline{U_{3/2}(1, 0)} \cup \overline{U_{3/2}(-1, 0)}$ ebenfalls Jordan-messbar.

Ist $f : \overline{U_{3/2}(1, 0)} \cup \overline{U_{3/2}(-1, 0)} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt nach Satz 21.47 (1)

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{\overline{U_{3/2}(1, 0)} \cup \overline{U_{3/2}(-1, 0)}} f(x, y) \, d(x, y) \\ &= \int_{\overline{U_{3/2}(1, 0)}} f(x, y) \, d(x, y) + \int_{\overline{U_{3/2}(-1, 0)}} f(x, y) \, d(x, y) \\ &\quad - \int_{\overline{U_{3/2}(1, 0)} \cap \overline{U_{3/2}(-1, 0)}} f(x, y) \, d(x, y). \end{aligned}$$

$\overline{U_{3/2}(1, 0)} \cap \overline{U_{3/2}(-1, 0)}$ ist ein Normalbereich, und wir können das letzte Integral relativ bequem parametrisieren.

Hier kann man allerdings das Integral über $M = \overline{U_{3/2}(1, 0)} \cup \overline{U_{3/2}(-1, 0)}$ auch direkt berechnen, weil M selbst bereits ein Normalbereich ist.

21.7 Die Transformationsformel

In diesem Abschnitt sei $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ eine Koordinatentransformation von dem Gebiet D auf das Gebiet Ω (vgl. Kapitel 20.6). Was passiert mit einem Integral einer integrierbaren Funktion f über eine Jordan-messbare Menge $M \subseteq \Omega$, wenn man das Gebiet mittels der Koordinatentransformation $\vec{Q} : D \rightarrow \Omega$ parametrisiert? Diese Frage beantwortet die sogenannte **Transformationsformel**.

Um uns klar zu machen, worum es im nachfolgenden Satz geht, betrachten wir z.B. eine stetige Funktion $f : \overline{U_1(0, 0)} \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Einheitskreisscheibe

$$\overline{U_1(0, 0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Da $\overline{U_1(0, 0)}$ Jordan-messbar und f stetig ist, existiert das Integral

$$\int_{\overline{U_1(0, 0)}} f(x, y) \, d(x, y),$$

und wir können dieses mit unseren bisherigen Kenntnissen berechnen, indem wir es als Normalbereich auffassen. Hängt der Integrand f aber nur von $x^2 + y^2$ ab, also wenn z.B. gilt $f(x, y) := e^{x^2 + y^2}$, so wäre es sicher viel geschickter Polarkoordinaten zu nutzen:

$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[$$

denn dann ist

$$f_{\text{PK}}(\varrho, \phi) = f(\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi)) = e^{\varrho^2}$$

und

$$M = \overline{\{\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi) : \varrho \in]0, 1], \phi \in [0, 2\pi[\}} \implies M_{\text{PK}} = \overline{]0, 1] \times [0, 2\pi[},$$

d.h. wir haben einen 2-dimensionalen Quader in den Polarkoordinaten (ϱ, ϕ) . (Wir müssen den Abschluss bilden, weil die Polarkoordinaten den Punkt $(0, 0)$ nicht mit erfassen.) – **Wie aber „transformiert“, man nun das Integral, wenn man die Polarkoordinaten nutzt?** Das ist der Inhalt der Transformationsformel!

Satz 21.51. (Transformationsformel)

Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $M \subseteq \Omega$ Jordan-messbar und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Seien $\vec{\mathbf{Q}} : D \rightarrow \Omega$ eine **Koordinatentransformation**, und sei $\widetilde{M} \subseteq D$ mit $M = \vec{\mathbf{Q}}(\widetilde{M})$. Dann ist \widetilde{M} Jordan-messbar und es gilt:

$$\int_M f(\vec{\mathbf{x}}) \, d\vec{\mathbf{x}} = \int_{\widetilde{M}} f(\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) \, |\det(\partial\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}))| \, d\vec{\mathbf{u}}. \quad (21.10)$$

Die Transformationsformel ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel für reellwertige Funktionen einer Variablen.

Auch hier kann in der Praxis darauf verzichtet werden, dass $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sind, solange $\vec{\mathbf{Q}}$ auf einer offenen Obermenge von D unendlich oft differenzierbar ist.

Merkregel 21.52. (für die Transformationsformel)

Schritt 1: Ersetze $\vec{\mathbf{x}}$ durch $\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})$.

Schritt 2: Ersetze $d\vec{\mathbf{x}}$ durch $|\det(\partial\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}))| \, d\vec{\mathbf{u}}$.

Schritt 3: Ersetze $M = \vec{\mathbf{Q}}(\widetilde{M})$ durch \widetilde{M} .

Der Beweis der Transformationsformel ist sehr aufwendig und wird daher in dieser Vorlesung nicht behandelt.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 21.53. (Transformationsformel)

Sei \widetilde{M} Jordan-messbar, und seien $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und

$$M := \vec{\mathbf{a}} + \widetilde{M} := \{ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{x}} : \vec{\mathbf{x}} \in \widetilde{M} \}. \quad (\text{Translation von } \widetilde{M} \text{ um } \vec{\mathbf{a}})$$

Gesucht ist $v_n(M) = v_n(\vec{\mathbf{a}} + \widetilde{M})$.

(„Translation“ bedeutet „Verschiebung“.) Wir erwarten bei einer Translation natürlich, dass das Volumen von $v_n(M) = v_n(\vec{\mathbf{a}} + \widetilde{M})$ gleich dem Volumen $v_n(\widetilde{M})$ ist.

Setze $\vec{\mathbf{Q}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}) := \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{u}}$. Dann ist $\vec{\mathbf{Q}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Koordinatentransformation mit $\partial \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}_n$, d.h. $\det(\partial \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) = \det(\mathbf{E}_n) = 1$ für alle $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$. Dass $\vec{\mathbf{Q}}$ unendlich oft differenzierbar ist, sieht man direkt, und als Translation ist $\vec{\mathbf{Q}}$ auch bijektiv. (*Erklärung:* Wegen $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{u}} \iff \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}$ ist $\vec{\mathbf{Q}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijektiv mit der Umkehrfunktion $\vec{\mathbf{Q}}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\mathbf{Q}}^{-1}(\vec{\mathbf{x}}) := \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}$. $\partial \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}_n$ sieht man durch Nachrechnen, und daraus folgt auch, dass alle höheren partiellen Ableitungen 0 sind. Daraus folgt unmittelbar, dass $\vec{\mathbf{Q}}$ beliebig oft differenzierbar ist. $\det(\partial \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) = \det(\mathbf{E}_n) = 1$ folgt aus Hilfssatz 13.20 im Skript der HM B.)

Wir haben weiter $\vec{\mathbf{Q}}(\widetilde{M}) = \vec{\mathbf{a}} + \widetilde{M} = M$.

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt nach der Transformationsformel

$$\int_M f(\vec{\mathbf{x}}) \, d\vec{\mathbf{x}} = \int_{\widetilde{M}} f(\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) \underbrace{|\det(\partial \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}))|}_{=1} \, d\vec{\mathbf{u}} = \int_{\widetilde{M}} f(\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) \, d\vec{\mathbf{u}}.$$

Insbesondere gilt für $f(\vec{\mathbf{x}}) = 1$ für alle $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

$$v_n(M) = \int_M 1 \, d\vec{\mathbf{x}} = \int_{\widetilde{M}} 1 \, d\vec{\mathbf{u}} = v_n(\widetilde{M}).$$

Wie erwartet ist das Volumen translationsinvariant.

Beispiel 21.54. (Transformationsformel)

(a) $n = 2$: Seien $\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ und $\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ linear unabhängig. Dann ist

$$\vec{\mathbf{Q}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\vec{\mathbf{Q}}(u_1, u_2) := u_1 \vec{\mathbf{a}} + u_2 \vec{\mathbf{b}} = u_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 a_1 + u_2 b_1 \\ u_1 a_2 + u_2 b_2 \end{bmatrix},$$

eine Koordinatentransformation mit

$$(\partial \mathbf{Q})(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} =: \mathbf{A}.$$

Da $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ linear unabhängig sind, ist $((\partial \mathbf{Q})(u_1, u_2)) = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ für alle $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$. $\vec{\mathbf{Q}}$ ist bijektiv, da wir $\vec{\mathbf{Q}}$ als $\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}}$ schreiben können und da solche Funktionen mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ immer bijektiv sind mit der Umkehrfunktion $\vec{\mathbf{Q}}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\mathbf{Q}}^{-1}(\vec{\mathbf{x}}) := \mathbf{A}^{-1} \vec{\mathbf{x}}$ (wegen $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}} \iff \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}^{-1} \vec{\mathbf{x}}$). Dass $\vec{\mathbf{Q}}$ unendlich oft differenzierbar ist, sieht man daran, dass alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung 0 sind.

Seien M Jordan-messbar und $\widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\vec{\mathbf{Q}}(\widetilde{M}) = M$. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_M f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) &= \int_{\widetilde{M}} f(\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) \underbrace{|\det(\partial \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}))|}_{=|\det(\mathbf{A})|} d\vec{\mathbf{u}} \\ &= |\det(\mathbf{A})| \int_{\widetilde{M}} f(\vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}})) d\vec{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

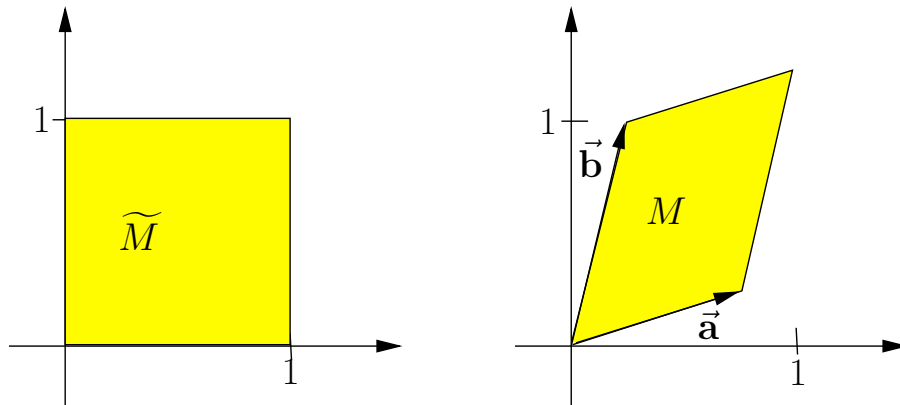
Insbesondere finden wir für $f(x_1, x_2) = 1$, dass $v_2(M) = |\det(\mathbf{A})| v_2(\widetilde{M})$.

Für $\widetilde{M} = [0, 1] \times [0, 1]$ ist (siehe Bilder)

$$M = \vec{\mathbf{Q}}(\widetilde{M}) = \{u_1 \vec{\mathbf{a}} + u_2 \vec{\mathbf{b}} : u_1, u_2 \in [0, 1]\}$$

das von $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ aufgespannte Parallelogramm, und es gilt

$$v_2(M) = |\det(\mathbf{A})| v_2(\widetilde{M}) = |\det(\mathbf{A})| (1 - 0)^2 = |\det(\mathbf{A})|.$$



- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare $n \times n$ -Matrix, d.h. es gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Wir setzen

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{\mathbf{Q}}(\vec{\mathbf{u}}) := \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}}.$$

Bei $\vec{\mathbf{Q}}$ handelt es sich um eine sogenannte „lineare Abbildung“. Wegen $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}} \iff \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}^{-1} \vec{\mathbf{x}}$ ist diese offensichtlich bijektiv. Es gilt dann

$$(\partial \vec{\mathbf{Q}})(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{A},$$

und somit folgt $\det((\partial \mathbf{Q})(\vec{\mathbf{u}})) = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ für alle $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$. Alle höheren partiellen Ableitungen sind 0, und damit ist $\vec{\mathbf{Q}}$ unendlich oft differenzierbar. Damit zeigt man leicht, dass $\vec{\mathbf{Q}}$ eine Koordinatentransformation ist. Mit der Transformationsformel folgt nun, dass für ein Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\mathbf{Q}}(\tilde{M}) = M$ gilt

$$v_n(M) = |\det(\mathbf{A})| v_n(\tilde{M}).$$

Die Details des Nachweises arbeiten wir in einer Übungsaufgabe aus.

In den nächsten drei Teilkapiteln werden wir untersuchen, wie sich die Transformationsformel für die klassischen orthogonalen Koordinatentransformationen Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten auswirkt.

21.8 Ebene Polarkoordinaten

In diesem Teilkapitel betrachten wir die Auswirkung der Transformationsformel für die Parametrisierung eines Integrals mit ebenen Polarkoordinaten, welche wir bereits aus dem vorigen Kapitel kennen (vgl. Beispiel 20.27). Es sei also

$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [\phi_0, \phi_0 + 2\pi[.$$

(Gegenüber Beispiel 20.27 haben wir hier das Definitionsintervall $[0, 2\pi[$ für ϕ um den Winkel ϕ_0 verschoben. Aufgrund der Periodizität von \cos und \sin ändert dieses aber nichts daran, dass eine orthogonale Koordinatentransformation vorliegt. Wir starten bei der Parametrisierung lediglich mit einem anderen Winkel.)

Merkregel 21.55. (Transformation in Polarkoordinaten)

Für die **Polarkoordinaten (PK)** gilt

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos(\phi), \\y &= \varrho \sin(\phi), \\d(x, y) &= \varrho \, d(\varrho, \phi),\end{aligned}$$

d.h. für $M \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und $M_{\text{PK}} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $M = \vec{\mathbf{Q}}(M_{\text{PK}})$ und für stetiges $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Transformationsformel

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_{M_{\text{PK}}} f(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) \, \varrho \, d(\varrho, \phi),$$

weil nach Beispiel 20.27 $|\det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi))| = \det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi)) = \varrho$ ist.

Bemerkung 21.56. (fehlender Punkt $(0, 0)$ in den Polarkoordinaten)

Enthält $M \subseteq \mathbb{R}^2$ den Ursprung $(0, 0)$, so ist die Transformation in Polarkoordinaten nur für $M \setminus \{(0, 0)\}$ möglich. Das ist bei der Integration über M aber kein Problem, da $\{(0, 0)\}$ eine Jordansche Nullmenge ist.

Betrachten wir mehrere Beispiele.

Beispiel 21.57. (Transformation in Polarkoordinaten)

Sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Es handelt sich bei M um einen Viertelkreis (siehe Skizze unten).

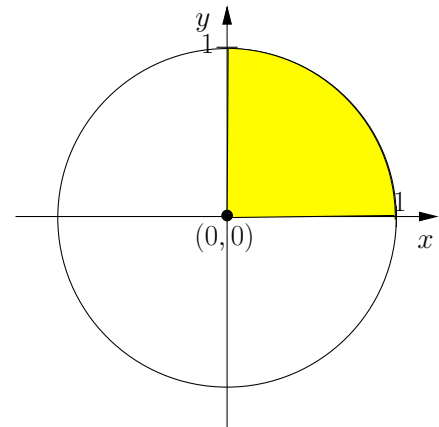
Wir schreiben M (genauer die Menge $M \setminus \{(0, 0)\}$) in Polarkoordinaten:

Hilfsrechnung:

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\iff \varrho \cos(\phi) \geq 0 \iff \cos(\phi) \geq 0 \\ y \geq 0 &\iff \varrho \sin(\phi) \geq 0 \iff \sin(\phi) \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\implies \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 1 &\iff (\varrho \cos(\phi))^2 + (\varrho \sin(\phi))^2 \leq 1 \\ &\iff \varrho^2 \leq 1 \stackrel{\varrho > 0}{\iff} \varrho \in]0, 1]. \end{aligned}$$



Also gilt für die Parametrisierung M_{PK} von M in Polarkoordinaten

$$M_{\text{PK}} = \left\{ (\varrho, \phi) : 0 < \varrho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\} =]0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Wir haben dann $\vec{Q}(M_{\text{PK}}) = M \setminus \{(0,0)\}$, und das Integral

$$\int_M x \, d(x, y)$$

berechnet sich mit der Transformation in Polarkoordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_M x \, d(x, y) &= \int_{M \setminus \{(0,0)\}} x \, d(x, y) \stackrel{\text{PK}}{=} \int_{M_{\text{PK}}} \varrho \cos(\phi) \varrho \, d(\varrho, \phi) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \varrho^2 \cos(\phi) \, d\phi \, d\varrho \\ &= \int_0^1 \varrho^2 \underbrace{\left[\sin(\phi) \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}}_{=1} \, d\varrho \\ &= \int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho \\ &= \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Beispiel 21.58. (Transformation in Polarkoordinaten)

Gesucht ist das Integral

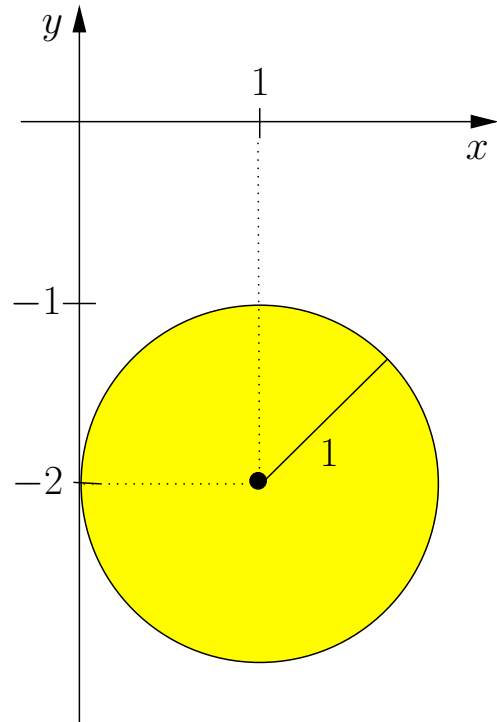
$$\int_M x \, d(x, y),$$

wobei M der Kreis um $(1, -2)$ mit Radius 1 ist.

Wir haben also

$$\begin{aligned} M &= \overline{U_1(1, -2)} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Wir verschieben unsere Polarkoordinaten so, dass der Ursprung $(0, 0)$ in den Punkt $(1, -2)$ übergeht:



$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi) := \begin{bmatrix} 1 + \varrho \cos(\phi) \\ -2 + \varrho \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi[.$$

(Die Verschiebung oder Translation ändert nichts daran, dass eine orthogonale Koordinatentransformation vorliegt.) Da eine Verschiebung als Ableitung die Einheitsmatrix \mathbf{E}_2 hat und da für die „normalen“ Polarkoordinaten $\det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi)) = \varrho$ gilt, finden wir mit der Kettenregel und dem Multiplikationssatz für Determinanten, dass für die verschobenen Polarkoordinaten ebenfalls $\det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi)) = \varrho$ gilt. Also gilt auch $d(x, y) = |\det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi))| d(\varrho, \phi) = \varrho d(\varrho, \phi)$.

Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 &\leq 1 \\ \iff (1 + \varrho \cos(\phi) - 1)^2 + (-2 + \varrho \sin(\phi) + 2)^2 &\leq 1 \\ \iff (\varrho \cos(\phi))^2 + (\varrho \sin(\phi))^2 &\leq 1 \iff \varrho^2 \leq 1 \stackrel{\varrho > 0}{\iff} 0 < \varrho \leq 1 \end{aligned}$$

Also gilt für

$$M_{\text{PK}} = \{(\varrho, \phi) : 0 < \varrho \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi\} =]0, 1] \times [0, 2\pi[$$

und $\vec{\mathbf{Q}}(M_{\text{PK}}) = M \setminus \{(1, -2)\}$. Damit finden wir nach der Transformationsformel

$$\int_M x \, d(x, y) = \int_{M \setminus \{(1, -2)\}} x \, d(x, y) \stackrel{\text{PK}}{=} \int_{M_{\text{PK}}} (1 + \varrho \cos(\phi)) \varrho \, d(\varrho, \phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\varrho + \varrho^2 \cos(\phi)) \, d\phi \, d\varrho = \int_0^1 \left[\varrho \phi + \varrho^2 \sin(\phi) \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\varrho \\
&= \int_0^1 \underbrace{\left[(2\pi \varrho + \varrho^2 \sin(2\pi)) - (0 + \varrho^2 \sin(0)) \right]}_{= 2\pi \varrho} d\varrho \\
&= \int_0^1 2\pi \varrho \, d\varrho = \left[\pi \varrho^2 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} = \pi.
\end{aligned}$$

Im nächsten Beispiel berechnen wir ein eindimensionales Integral mit einem Trick mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Beispiel 21.59. (Transformation in Polarkoordinaten)

Wir wollen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt$$

berechnen. Durch Inspektion oder Probieren überzeugt man sich leicht, dass sich dieses mit den Methoden für das eindimensionale Integral nicht elementar berechnen lässt.

Sei nun $R > 0$ und $M_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
x &= \varrho \cos(\phi), \\
y &= \varrho \sin(\phi), \\
d(x, y) &= \varrho \, d(\varrho, \phi)
\end{aligned}$$

finden wir wegen

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 \leq R^2 &\iff (\varrho \cos(\phi))^2 + (\varrho \sin(\phi))^2 \leq R^2 \\
&\iff \varrho^2 \leq R^2 \stackrel{\varrho > 0}{\iff} 0 < \varrho \leq R,
\end{aligned}$$

dass

$$M_{R, \text{PK}} = \{(\varrho, \phi) : 0 < \varrho \leq R, 0 \leq \phi < 2\pi\} =]0, R] \times [0, 2\pi[.$$

Dann gilt $\vec{\mathbf{Q}}(M_{R, \text{PK}}) = M_R \setminus \{(0, 0)\}$, und mit der Transformationsformel finden wir

$$\int_{M_R} e^{-(x^2+y^2)} \, d(x, y) \stackrel{\text{PK}}{=} \int_{M_{R, \text{PK}}} e^{-\varrho^2} \varrho \, d(\varrho, \phi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\phi \, d\varrho$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[e^{-\varrho^2} \varrho \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\varrho = \int_0^R 2\pi e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho \\
&= \left[-\pi e^{-\varrho^2} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=R} = -\pi e^{-R^2} + \pi e^0 = \pi (1 - e^{-R^2}).
\end{aligned}$$

Bilden wir nun den Grenzübergang für $R \rightarrow \infty$, so geht M_R in \mathbb{R}^2 über, und wir finden

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{M_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

Daraus folgt nun für unser ursprüngliches eindimensionales Integral

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^a e^{-t^2} dt \right)^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) \right] \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{[-a, a]^2} e^{-x^2} e^{-y^2} d(x, y) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{[-a, a]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \pi, \quad \text{also} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

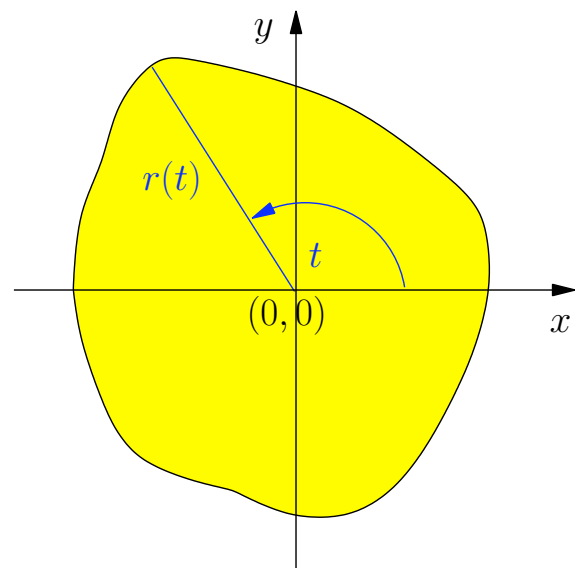
Anwendung 21.60. (Flächeninhalt einer durch eine Kurve berandeten Fläche)

Gegen sei eine geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 durch

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} r(t) \cos(t) \\ r(t) \sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei die Funktion $r : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ stetig und 2π -periodisch ist. Wir berechnen den Inhalt der Fläche M , die von der Kurve $\vec{\gamma}$ eingeschlossen wird.

Dazu beschreiben wir die Fläche in Polarkoordinaten:



$$M \setminus \{(0, 0)\} = \{(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi)) : 0 < \varrho \leq r(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\},$$

$$\text{also } M_{\text{PK}} = \{(\varrho, \phi) : 0 < \varrho \leq r(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\}.$$

Damit berechnet sich die Fläche mit der Transformationsformel wie folgt:

$$\begin{aligned} v_2(M) &= \int_M 1 \, d(x, y) = \int_{M \setminus \{(0,0)\}} 1 \, d(x, y) = \int_{M_{\text{PK}}} \varrho \, d(\varrho, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\phi)} \varrho \, d\varrho \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \varrho^2 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=r(\phi)} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [r(\phi)]^2 \, d\phi, \end{aligned}$$

$$\text{also } v_2(M) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [r(\phi)]^2 \, d\phi.$$

21.9 Zylinderkoordinaten

In diesem Teilkapitel betrachten wir die Auswirkung der Transformationsformel für die Parametrisierung eines Integrals mit den Zylinderkoordinaten, welche wir bereits aus dem vorigen Kapitel kennen (vgl. Beispiel 20.28). Es sei also

$$\vec{\mathbf{Q}}(\varrho, \phi, z) := \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ z \end{bmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \phi \in [\phi_0, \phi_0 + 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(Gegenüber Beispiel 20.28 haben wir hier das Definitionsintervall $[0, 2\pi[$ für ϕ um den Winkel ϕ_0 verschoben. Aufgrund der Periodizität von \cos und \sin ändert dieses aber nichts daran, dass eine orthogonale Koordinatentransformation vorliegt. Wir starten bei der Parametrisierung lediglich mit einem anderen Winkel.)

Merkregel 21.61. (Transformation in Zylinderkoordinaten)

Für die **Zylinderkoordinaten (ZK)** gilt

$$x = \varrho \cos(\phi),$$

$$y = \varrho \sin(\phi),$$

$$z = z,$$

$$d(x, y, z) = \varrho \, d(\varrho, \phi, z),$$

d.h. für $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar und $M_{\text{ZK}} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $M = \vec{\mathbf{Q}}(M_{\text{ZK}})$ und für stetiges $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Transformationsformel

$$\int_M f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{M_{\text{ZK}}} f(\varrho \cos(\phi), \varrho \sin(\phi), z) \varrho \, d(\varrho, \phi, z),$$

weil nach Beispiel 20.28 $|\det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi, z))| = \det((\partial \vec{\mathbf{Q}})(\varrho, \phi, z)) = \varrho$ ist.

Das Volumenelement $d(x, y, z) = \varrho \, d(\varrho, \phi, z)$ ist in Abbildung 21.4 veranschaulicht.

Bemerkung 21.62. (fehlende z -Achse in den Zylinderkoordinaten)

Enthält $M \subseteq \mathbb{R}^3$ einen Teil der z -Achse $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, so ist die Transformation in Zylinderkoordinaten nur für $M \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ möglich. Das ist bei der Integration über M aber kein Problem, da M und $M \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ sich nur um eine Jordansche Nullmenge unterscheiden und somit den gleichen Wert für das Integral haben.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 21.63. (Transformation in Zylinderkoordinaten)

Berechnen Sie das Volumen von

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}.$$

mittels Zylinderkoordinaten.

Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 1 &\iff (\varrho \cos(\phi))^2 + (\varrho \sin(\phi))^2 \leq 1 \\ &\iff \varrho^2 \leq 1 \stackrel{\varrho > 0}{\iff} 0 < \varrho \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - x &\iff 0 \leq z \leq 1 - \varrho \cos(\phi) \end{aligned}$$

Also gilt

$$M_{\text{ZK}} = \{(\varrho, \phi, z) : 0 < \varrho \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq z \leq 1 - \varrho \cos(\phi)\}.$$

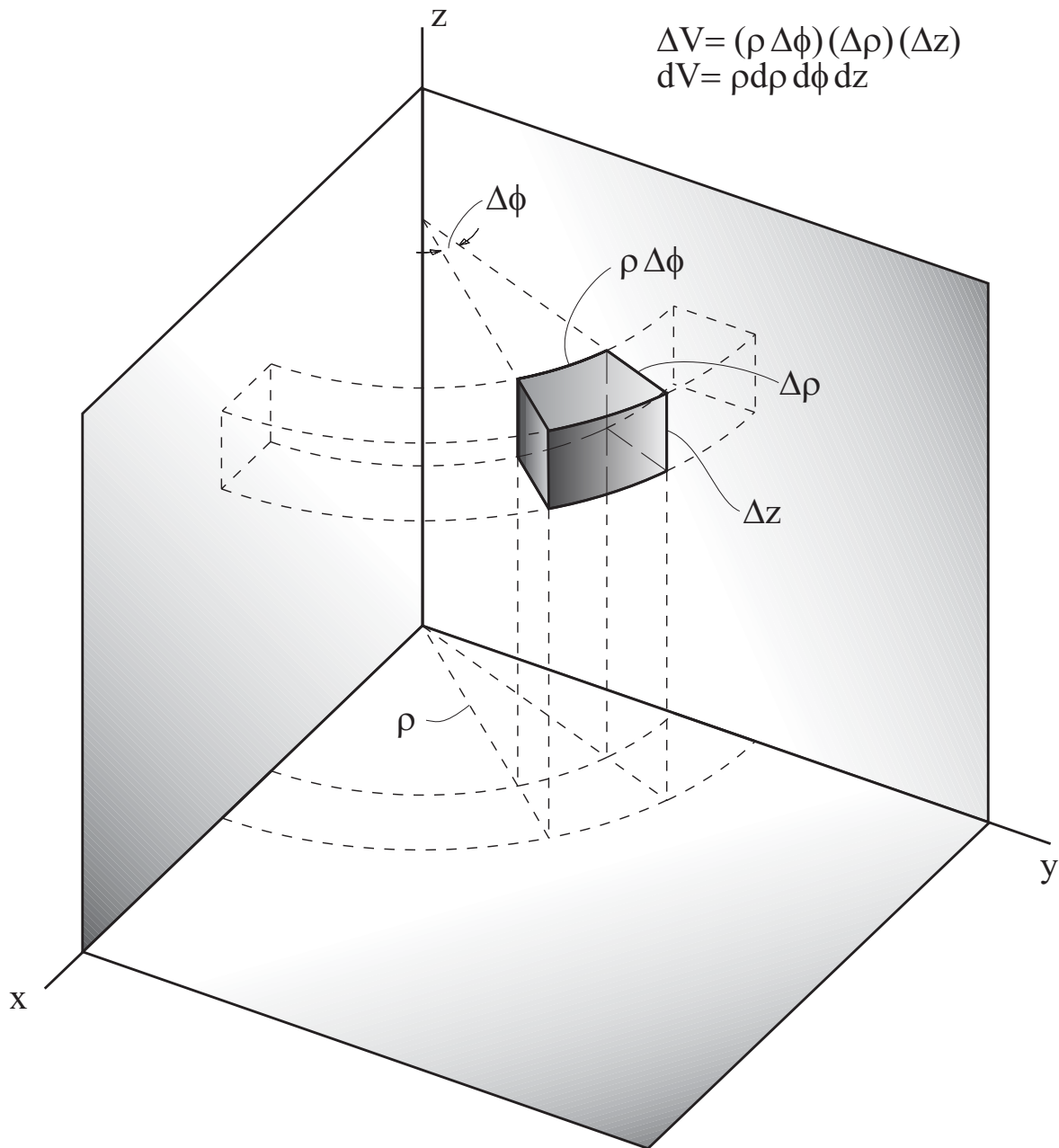


Abbildung 21.4: Veranschaulichung des Volumenelements der Zylinderkoordinaten.

Damit liefert die Transformationsformel

$$\begin{aligned}
 v_3(M) &= \int_M 1 \, d(x, y, z) = \int_{M \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}} 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{ZK}}{=} \int_{M_{\text{ZK}}} \varrho \, d(\varrho, \phi, z) \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\varrho \cos(\phi)} \varrho \, dz \, d\phi \, d\varrho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\varrho z \right]_{z=0}^{z=1-\varrho \cos(\phi)} d\phi \, d\varrho \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho (1 - \varrho \cos(\phi)) \, d\phi \, d\varrho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\varrho - \varrho^2 \cos(\phi)) \, d\phi \, d\varrho
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\varrho \phi - \varrho^2 \sin(\phi) \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\varrho \\
&= \int_0^1 \left[(2\pi \varrho - \varrho^2 \sin(2\pi)) - (0 - \varrho^2 \sin(0)) \right] d\varrho \\
&= \int_0^1 2\pi \varrho d\varrho = \left[\pi \varrho^2 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} = \pi.
\end{aligned}$$

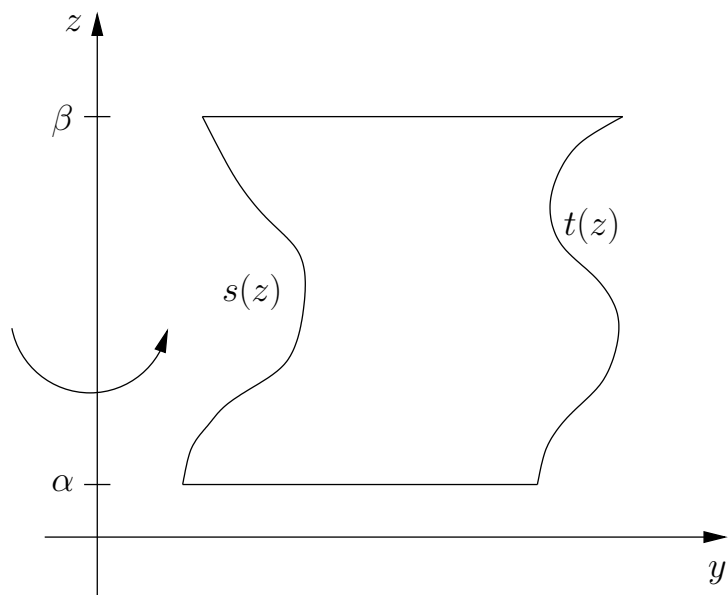
Beispiel 21.64. (Volumen eines Rotationskörpers)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, und seien $s, t : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $0 \leq s(z) \leq t(z)$ für alle $z \in [\alpha, \beta]$. Sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \leq z \leq \beta, s(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq t(z)\}.$$

Wie sieht M aus? Malen

Sie zunächst nur die z -Achse und die y -Achse, und tragen Sie für $\alpha \leq z \leq \beta$ die Graphen von $y = s(z)$ und $y = t(z)$ ein und schließen die Fläche zwischen den beiden Graphen unten bzw. oben durch das Geradenstück von $z = \alpha$ bzw. $z = \beta$ ab. Wir rotieren diese Fläche nun um die z -Achse und erhalten so einen **Drehkörper** oder **Rotationskörper**.



Wir leiten nun die Formel für das Volumen $v_3(M)$ her und benutzen dazu Zylinderkoordinaten: Wegen $s(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq t(z)$ gilt

$$s(z) \leq \sqrt{\varrho^2 \cos^2(\phi) + \varrho^2 \sin^2(\phi)} = \varrho \leq t(z),$$

und somit

$$M_{\text{ZK}} = \left\{ (\varrho, \phi, z) : \begin{array}{l} s(z) \leq \varrho \leq t(z), \\ 0 \leq \phi < 2\pi, \\ \alpha \leq z \leq \beta \end{array} \right\} \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Damit finden wir

$$v_3(M) = \int_M 1 d(x, y, z) = \int_{M \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}} 1 d(x, y, z) = \int_{M_{\text{ZK}}} \varrho d(\varrho, \phi, z)$$

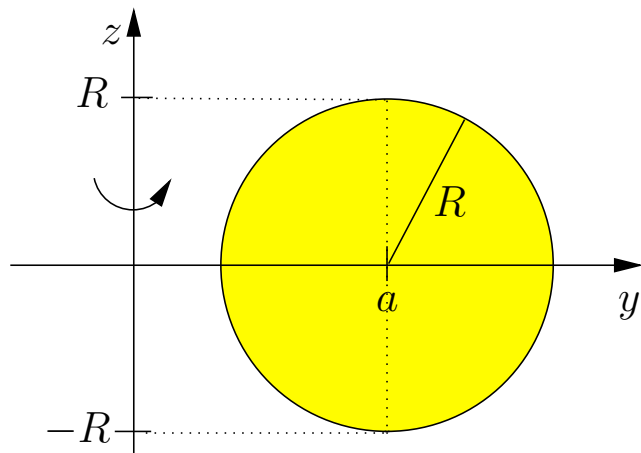
$$\begin{aligned}
&= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{s(z)}^{t(z)} \int_0^{2\pi} \varrho \, d\phi \, d\varrho \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{s(z)}^{t(z)} \left[\varrho \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\varrho \, dz \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{s(z)}^{t(z)} 2\pi \varrho \, d\varrho \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\pi \varrho^2 \right]_{\varrho=s(z)}^{\varrho=t(z)} dz \\
&= \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left[(t(z))^2 - (s(z))^2 \right] dz.
\end{aligned}$$

Als Anwendung berechnen wir das Volumen eines **Torus** (eines „Doughnuts“): Seien $0 < R < a$ und $\alpha = -R$, $\beta = R$, sowie

$$s(z) = a - \sqrt{R^2 - z^2},$$

$$t(z) = a + \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Dann ist das Volumen des Torus nach den obigen Überlegungen



$$\begin{aligned}
v_3(M) &= \pi \int_{-R}^R \left[(a + \sqrt{R^2 - z^2})^2 - (a - \sqrt{R^2 - z^2})^2 \right] dz \\
&= \pi \int_{-R}^R 4a \sqrt{R^2 - z^2} \, dz.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrals nutzen wir zunächst die Substitution $z = R \sin(t)$ mit $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, also $dz/dt = R \cos(t) \iff dz = R \cos(t) dt$, und erhalten

$$\begin{aligned}
\pi \int_{-R}^R 4a \sqrt{R^2 - z^2} \, dz &= 4\pi a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2(t)}}_{= \sqrt{R^2 \cos^2(t)} = R \cos(t)} R \cos(t) \, dt \\
&= 4\pi a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2(t) \, dt.
\end{aligned}$$

Aus dem Additionstheorem für den Cosinus folgt

$$\begin{aligned}
\cos(2t) &= \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2 \cos^2(t) - 1 \\
\iff 2 \cos^2(t) &= \cos(2t) + 1,
\end{aligned}$$

und somit erhalten wir für das Volumen des Torus

$$\begin{aligned} v_3(M) &= 4\pi a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2(t) dt = \pi R^2 a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2 \cos(2t) + 2] dt \\ &= \pi R^2 a \left[\sin(2t) + 2t \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \pi R^2 a \left[(\sin(\pi) + \pi) - (\sin(-\pi) - \pi) \right] \\ &= \pi R^2 a 2\pi = 2\pi^2 R^2 a. \end{aligned}$$

21.10 Kugelkoordinaten

In diesem Teilkapitel betrachten wir die Auswirkung der Transformationsformel für die Parametrisierung eines Integrals mit Kugelkoordinaten, welche wir bereits aus dem vorigen Kapitel kennen (vgl. Beispiel 20.29). Es sei also

$$\vec{\mathbf{Q}}(r, \theta, \phi) := \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad r > 0, \quad \theta \in]0, \pi[, \quad \phi \in [\phi_0, \phi_0 + 2\pi[.$$

(Gegenüber Beispiel 20.29 haben wir hier das Definitionsintervall $[0, 2\pi[$ für ϕ um den Winkel ϕ_0 verschoben. Aufgrund der Periodizität von \cos und \sin ändert dieses aber nichts daran, dass eine orthogonale Koordinatentransformation vorliegt. Wir starten bei der Parametrisierung lediglich mit einem anderen Winkel für ϕ .)

Merkregel 21.65. (Transformation in Kugelkoordinaten)

Für die **Kugelkoordinaten (KK)** gilt

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$z = r \cos(\theta),$$

$$d(x, y, z) = r^2 \sin(\theta) d(r, \theta, \phi),$$

d.h. für $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar und $M_{\text{KK}} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $M = \vec{\mathbf{Q}}(M_{\text{KK}})$ und für stetiges $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Transformationsformel

$$\int_M f(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$= \int_{M_{\text{KK}}} f(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta)) r^2 \sin(\theta) d(r, \theta, \phi),$$

weil nach Beispiel 20.29

$$|\det((\partial \vec{Q})(r, \theta, \phi))| = \det((\partial \vec{Q})(r, \theta, \phi)) = r^2 \sin(\theta)$$

ist. Das Volumenelement $d(x, y, z) = r^2 \sin(\theta) d(r, \theta, \phi)$ ist in Abbildung 21.5 veranschaulicht.

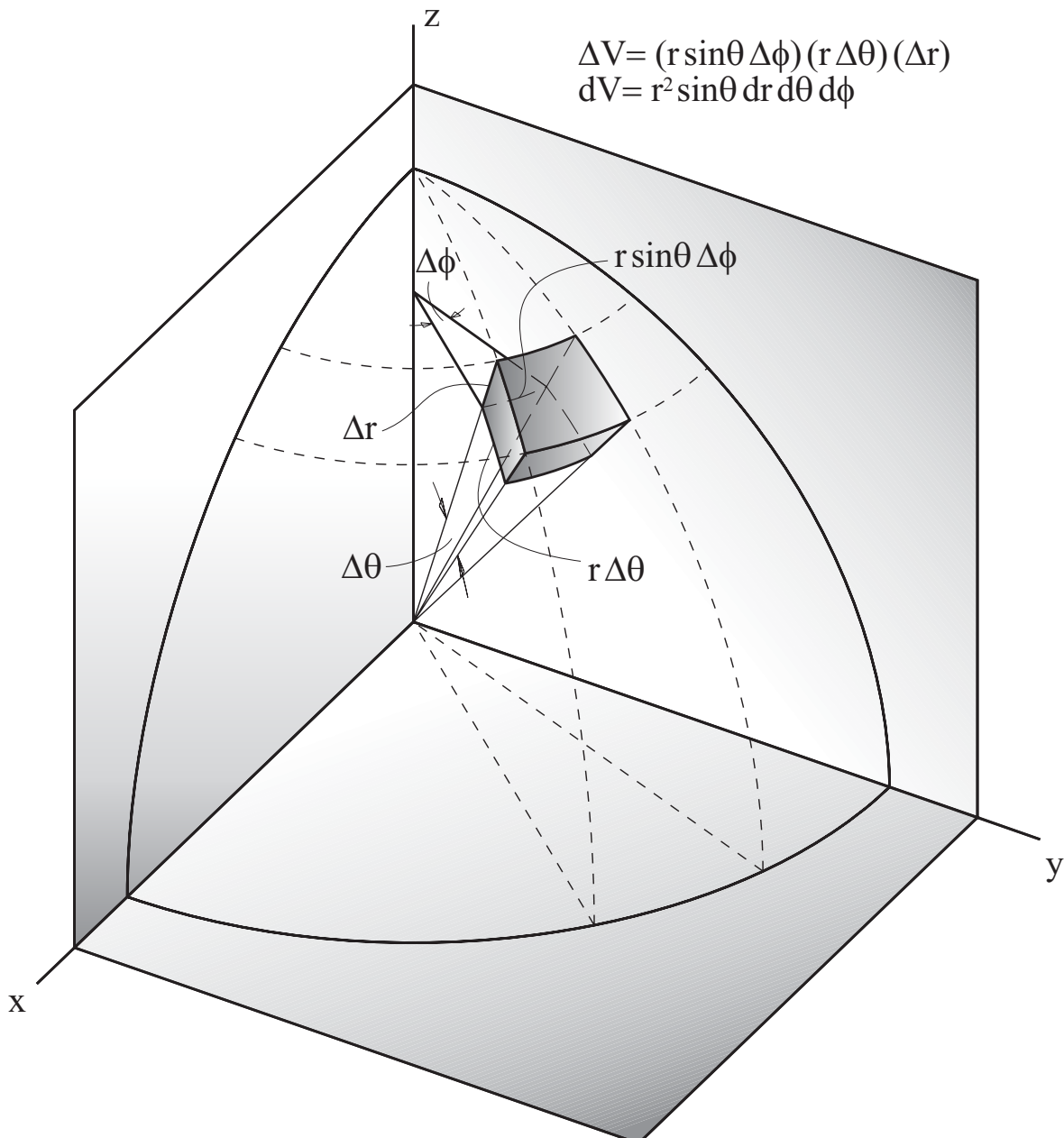


Abbildung 21.5: Veranschaulichung des Volumenelements der Kugelkoordinaten.

Bemerkung 21.66. (fehlende z -Achse in den Kugelkoordinaten)

Enthält $M \subseteq \mathbb{R}^3$ einen Teil der z -Achse $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, so ist die Transformation in Kugelkoordinaten nur für $M \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ möglich. Das ist bei der Integration über M aber kein Problem, da M und $M \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ sich nur um eine Jordansche Nullmenge unterscheiden und somit den gleichen Wert für das Integral liefern.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 21.67. (Transformation in Kugelkoordinaten)

Sei M die Kugel um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$, d.h.

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R\},$$

$$\text{also } M_{\text{KK}} = \{(r, \theta, \phi) : 0 < r \leq R, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\}$$

$$=]0, R] \times]0, \pi[\times [0, 2\pi[.$$

Sei $h : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, d(x, y, z) &= \int_{M \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}} h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, d(x, y, z) \\ &= \int_{M_{\text{KK}}} h(r) r^2 \sin(\theta) \, d(r, \theta, \phi) = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h(r) r^2 \sin(\theta) \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \left[h(r) r^2 \sin(\theta) \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \, d\theta \, dr = \int_0^R \int_0^\pi 2\pi h(r) r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^R \left[-2\pi h(r) r^2 \cos(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \, dr \\ &= \int_0^R \left[-2\pi h(r) r^2 \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \left(-2\pi h(r) r^2 \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right) \right] \, dr \\ &= 4\pi \int_0^R h(r) r^2 \, dr. \end{aligned}$$

Beispiel 21.68. (Transformation in Kugel- und Zylinderkoordinaten)

Gegeben sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

und wir wollen das folgende Integral berechnen

$$\int_M (x^2 + y^2) \, d(x, y, z).$$

Wie sieht M aus? Zersägen wir die Vollkugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius 1 mittels der drei Koordinatenebenen, so erhalten wir 8 gleich große und gleich geformte Kugelsegmente. Dasjenige mit $x \geq 0, y \geq 0$ und $z \geq 0$ ist unser Integrationsbereich M .

(a) Berechnung mittels Kugelkoordinaten:

Hilfsrechnung:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \stackrel{r > 0}{\iff} 0 < r \leq 1,$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \iff r \sin(\theta) \cos(\phi) \geq 0 \stackrel{r \sin(\theta) > 0}{\iff} \cos(\phi) \geq 0 \\ y \geq 0 \iff r \sin(\theta) \sin(\phi) \geq 0 \stackrel{r \sin(\theta) > 0}{\iff} \sin(\phi) \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\implies \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z \geq 0 \iff r \cos(\theta) \geq 0 \iff \cos(\theta) \geq 0 \stackrel{\theta \in]0, \pi[}{\iff} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x^2 + y^2 = (r \sin(\theta) \cos(\phi))^2 + (r \sin(\theta) \sin(\phi))^2 = r^2 \sin^2(\theta).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} M_{\text{KK}} &= \left\{ (r, \theta, \phi) : 0 < r \leq 1, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\ &=]0, 1] \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \int_M (x^2 + y^2) \, d(x, y, z) &= \int_{M_{\text{KK}}} r^2 \sin^2(\theta) r^2 \sin(\theta) \, d(r, \theta, \phi) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^4 \sin^3(\theta) \, d\phi \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[r^4 \sin^3(\theta) \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \, d\theta \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} r^4 \sin^3(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta) \, d\theta \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_{r=0}^{r=1} \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) \, d\theta \right) \\
&= \frac{\pi}{10} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \right) \\
&= \frac{\pi}{10} \left(\left[-\cos(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \left[\frac{1}{3} \cos^3(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \right) \\
&= \frac{\pi}{10} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos(0) \right) \\
&= \frac{\pi}{10} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{15},
\end{aligned}$$

wobei wir zur Berechnung des zweiten Integrals in der vorletzten Zeile die Substitution

$$t = \cos(\theta), \quad \frac{dt}{d\theta} = -\sin(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad dt = -\sin(\theta) \, d\theta$$

benutzt haben.

(b) Berechnung mittels Zylinderkoordinaten

Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\quad \Longleftrightarrow \quad \varrho^2 + z^2 \leq 1, \\
\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\quad \Longleftrightarrow \quad \varrho \cos(\phi) \geq 0 \quad \stackrel{\varrho > 0}{\Longleftrightarrow} \quad \cos(\phi) \geq 0 \\ y \geq 0 &\quad \Longleftrightarrow \quad \varrho \sin(\phi) \geq 0 \quad \stackrel{\varrho > 0}{\Longleftrightarrow} \quad \sin(\phi) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \\
x^2 + y^2 = (\varrho \cos(\phi))^2 + (\varrho \sin(\theta))^2 &= \varrho^2.
\end{aligned}$$

Also finden wir zunächst

$$M_{\text{ZK}} = \left\{ (\varrho, \phi, z) : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \varrho^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

Mit

$$\left(\varrho^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z > 0 \right) \quad \stackrel{\varrho > 0}{\Longleftrightarrow} \quad \left(0 \leq z \leq 1 \text{ und } 0 < \varrho \leq \sqrt{1 - z^2} \right)$$

erhalten wir

$$M_{\text{ZK}} = \left\{ (\varrho, \phi, z) : 0 < \varrho \leq \sqrt{1 - z^2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Damit berechnet sich das Integral wie folgt

$$\begin{aligned} \int_M (x^2 + y^2) \, d(x, y, z) &= \int_{M_{\text{ZK}}} \varrho^2 \varrho \, d(\varrho, \phi, z) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \varrho^3 \, d\varrho \, d\phi \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=\sqrt{1-z^2}} \, d\phi \, dz = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (1 - z^2)^2 \, d\phi \, dz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} (1 - z^2)^2 \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \, dz = \frac{\pi}{8} \int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4) \, dz \\ &= \frac{\pi}{8} \left[z - \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{8} \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right] = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{8}{15} = \frac{\pi}{15}. \end{aligned}$$

Oberflächenintegrale

In diesem Kapitel lernen wir, wie man Oberflächen (also z.B. die Oberfläche einer Kugel (eine Sphäre) oder eine Wellenfläche im \mathbb{R}^3) parametrisiert und ihren Flächeninhalt mittels Integration bestimmt. Allgemeiner lernen wir, wie ein Skalarfeld bzw. ein Vektorfeld über eine Oberfläche integriert wird.

22.1 Definition von Flächenstücken

In diesem Kapitel sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ immer offen und Jordan-messbar, und es sei

$$\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) = \begin{bmatrix} X_1(u, v) \\ X_2(u, v) \\ X_3(u, v) \end{bmatrix},$$

immer stetig differenzierbar. (Dieses bedeutet, dass man $\vec{\mathbf{X}}$ zu einer Funktion auf einer offenen Obermenge Ω von \bar{U} so fortsetzen kann, dass auf Ω alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.) Wir erinnern uns aus der HM B (siehe Kapitel 16 im Skript der HM B), dass die Ableitung von $\vec{\mathbf{X}}$ die Jacobi-Matrix ist:

$$\begin{aligned} (\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \vec{\mathbf{X}}(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} \vec{\mathbf{X}}(u, v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) & (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (\partial_u X_1)(u, v) & (\partial_v X_1)(u, v) \\ (\partial_u X_2)(u, v) & (\partial_v X_2)(u, v) \\ (\partial_u X_3)(u, v) & (\partial_v X_3)(u, v) \end{bmatrix} \quad (3 \times 2\text{-Matrix})$$

Entgegen der aus der HM B üblichen Notation

$$(\partial_1 \vec{X})(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{X}(u, v) \quad \text{und} \quad (\partial_2 \vec{X})(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \vec{X}(u, v)$$

schreiben wir hier

$$(\partial_u \vec{X})(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{X}(u, v) \quad \text{und} \quad (\partial_v \vec{X})(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \vec{X}(u, v),$$

da dieses intuitiver ist und die Variablen der Parameterdarstellungen von Flächenstücken in diesem Kapitel immer u und v heißen werden.

Nun führen die Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes ein.

Definition 22.1. (Parameterdarst. eines glatten Flächenstückes)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar, und sei $\vec{X} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Ist

$$\text{Rang}((\partial \vec{X})(u, v)) = 2 \quad \text{für alle } (u, v) \in U,$$

so heißt

$$S := \{\vec{X}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \bar{U}\}$$

ein **glattes Flächenstück**. (\vec{X}, \bar{U}) heißt dann eine **Parameterdarstellung des glatten Flächenstückes** S mit dem **Parameterbereich** \bar{U} .

Der Buchstabe S für das Flächenstück ist dabei in Anlehnung an die englische Bezeichnung „surface“ für „Fläche“ gewählt. In Abbildung 22.1 ist die Parameterdarstellung eines Flächenstückes veranschaulicht.

Mit unseren Kenntnissen aus der Linearen Algebra können wir die Rang-Bedingung $\text{Rang}((\partial \vec{X})(u, v)) = 2$ auf unterschiedliche Weisen nachweisen (siehe Teilkapitel 12.7 im Skript der HM B):

$$\begin{aligned} \text{Rang}((\partial \vec{X})(u, v)) = 2 & \iff (\partial_u \vec{X})(u, v), (\partial_v \vec{X})(u, v) \\ & \text{sind linear unabhängig.} \\ & \iff (\partial_u \vec{X})(u, v) \times (\partial_v \vec{X})(u, v) \neq \vec{0} \end{aligned}$$

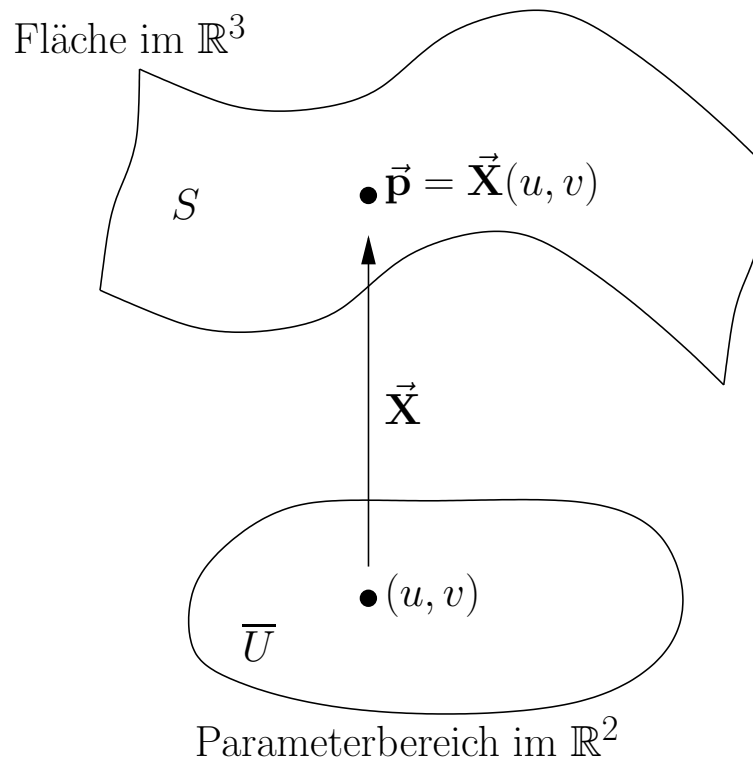


Abbildung 22.1: Veranschaulichung der Parameterdarstellung eines Flächenstückes: Eine ebene „Fläche“ $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (der Parameterbereich) wird auf ein Flächenstück im Raum \mathbb{R}^3 abgebildet.

$$\iff |(\partial_u \vec{X})(u, v) \times (\partial_v \vec{X})(u, v)| > 0$$

Betrachten wir nun einige Beispiele für die Parameterdarstellung von glatten Flächenstücken.

Beispiel 22.2. (Drehflächen)

(a) Sei $R > 0$ fest. Die Funktion

$$\vec{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{X}(u, v) := \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix}, \quad (22.1)$$

ist stetig differenzierbar in $\Omega := \mathbb{R}^2$ mit der Ableitung

$$(\partial \vec{X})(u, v) = \begin{bmatrix} -R \sin(u) & 0 \\ R \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)$ hat für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ den Rang 2, weil die beiden Spaltenvektoren von $(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind.

(Eine alternative Begründung für $\text{Rang}((\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2$ ist:

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

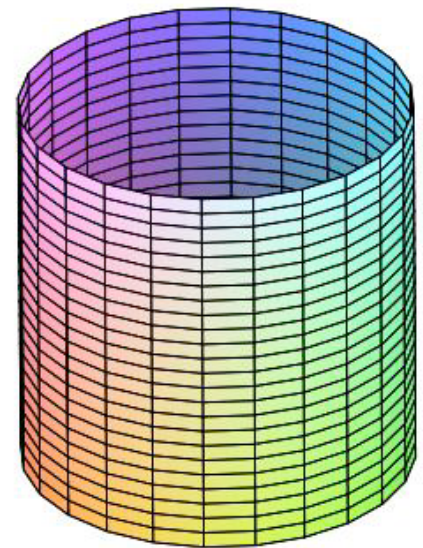
da $R > 0$ ist.)

Bei der durch (22.1) beschriebenen Fläche handelt es sich um den Mantel eines unendlich langen Zylinder mit Radius R mit der z -Achse als Längsachse. Dabei wird wegen der Periodizität des Sinus und des Cosinus allerdings jeder Punkt auf dem Mantel unendlich oft parametrisiert. Dies ist in der Regel nicht sinnvoll, und wir schränken die Definitionsmenge daher ein:

Sei $U :=]0, 2\pi[\times]0, H[$ mit $H > 0$, d.h. $\bar{U} = [0, 2\pi] \times [0, H]$. Dann ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ die Parameterdarstellung des Mantels

$$S := \left\{ \vec{\mathbf{X}}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : [0, 2\pi] \times [0, H] \right\} \\ = \left\{ \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix} : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, H] \right\}$$

eines **Zylinders** mit Radius R und der Höhe H mit dem „Boden“ in der (x, y) -Ebene und der z -Achse als Längsachse. S ist ein glattes Flächenstück im Sinne von Definition 22.1.



(b) Sei $r :]a, b[\rightarrow]0, \infty[$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\vec{\mathbf{X}} : \mathbb{R} \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ v \end{bmatrix},$$

stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} -r(v) \sin(u) & r'(v) \cos(u) \\ r(v) \cos(u) & r'(v) \sin(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$(\partial \vec{X})(u, v)$ hat für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ den Rang 2, weil die beiden Spaltenvektoren von $(\partial \vec{X})(u, v)$ linear unabhängig sind, da $r(v) > 0$ für alle $v \in]a, b[$.

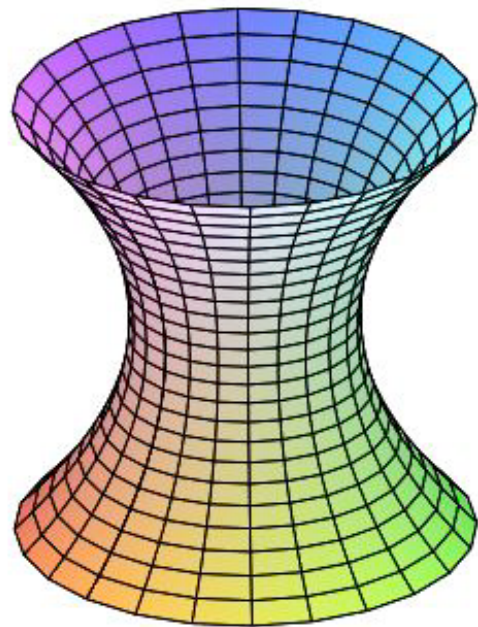
Wählt man $c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < c < d < b$ und $U :=]0, 2\pi[\times]c, d[$, d.h. $\bar{U} = [0, 2\pi] \times [c, d]$, so ist (\vec{X}, \bar{U}) die Parameterdarstellung der **Drehfläche**

$$S := \left\{ \vec{X}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : [0, 2\pi] \times [c, d] \right\} \\ = \left\{ \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ v \end{bmatrix} : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [c, d] \right\},$$

die durch r (eingeschränkt auf $[c, d]$) erzeugt wird.

Genauer: Wir tragen den Graphen von $y = r(z)$ für $z \in [c, d]$ in der (y, z) -Ebene ab und rotieren diesen dann um die z -Achse. So erhalten wir die parametrisierte Drehfläche S . Im Bild nebenan wurde $r(v) := 1 + v^2$ und $[c, d] = [-1, 1]$ verwendet.

Der Zylindermantel aus Beispiel (a) ist natürlich ebenfalls eine Drehfläche mit $r(v) := R$.



Beispiel 22.3. (Graphen von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen)

(a) Sei $R > 0$, und sei

$$\vec{X}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}, \quad u^2 + v^2 \leq R^2.$$

Dann ist \vec{X} stetig differenzierbar in $\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < R^2\}$

(offener Kreis um $(0,0)$ mit Radius R), und die Ableitung ist

$$(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -u(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} & -v(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

$(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)$ hat für alle $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < R^2\}$ den Rang 2, weil die beiden Spaltenvektoren von $(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)$ offensichtlich linear unabhängig sind.

Sei $U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ mit $0 < r < R$, d.h. $\bar{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\} \subseteq \Omega$. Dann ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ die Parameterdarstellung des Flächenstückes

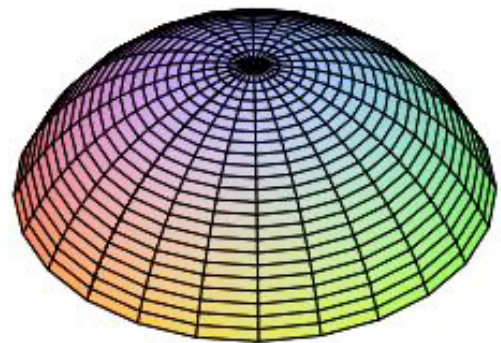
$$\begin{aligned} S &:= \{\vec{\mathbf{X}}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq r^2\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix} : u^2 + v^2 \leq r^2 \right\} \end{aligned}$$

der Oberfläche einer Halbkugel mit Radius R . S ist eine „Kugelkappe“.

Die parametrisierte Fläche ist der Graph der Funktion

$$f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u, v) := \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}.$$

In dem Bild rechts haben wir $r \approx 0,92$ und $R = 1$ gewählt.



- (b) Wir verallgemeinern das vorige Beispiel nun: Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist die Funktion

$$\vec{\mathbf{X}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix},$$

stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ (\partial_u f)(u, v) & (\partial_v f)(u, v) \end{bmatrix}.$$

$(\partial\vec{\mathbf{X}})(u, v)$ hat für alle $(u, v) \in \Omega$ den Rang 2, weil die beiden Spaltenvektoren von $(\partial\vec{\mathbf{X}})(u, v)$ offensichtlich linear unabhängig sind.

Sei $U \subseteq \Omega$ Jordan-messbar mit $\bar{U} \subseteq \Omega$. Dann ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ eine Parameterdarstellung des **glatten Flächenstückes**

$$S := \left\{ \vec{\mathbf{X}}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \bar{U} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix} : (u, v) \in \bar{U} \right\}$$

des Graphen von f .

Beispiel 22.4. (Kugeloberfläche/Sphäre)

Sei $R > 0$, und sei

$$\vec{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{\mathbf{X}}$ in \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar mit

$$(\partial\vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} R \cos(u) \cos(v) & -R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \sin(v) & R \sin(u) \cos(v) \\ -R \sin(u) & 0 \end{bmatrix}.$$

Für welche $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist $\text{Rang}((\partial\vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2$?

$$\begin{aligned} (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) &= \begin{bmatrix} R \cos(u) \cos(v) \\ R \cos(u) \sin(v) \\ -R \sin(u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R \sin(u) \sin(v) \\ R \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R^2 \sin^2(u) \cos(v) \\ R^2 \sin^2(u) \sin(v) \\ R^2 \sin(u) \cos(u) \end{bmatrix} = R^2 \sin(u) \begin{bmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir bei der Berechnung der dritten Komponente

$$\begin{aligned} &R^2 \cos(u) \sin(u) \cos^2(v) + R^2 \cos(u) \sin(u) \sin^2(v) \\ &= R^2 \cos(u) \sin(u) [\cos^2(v) + \sin^2(v)] \end{aligned}$$

$$= R^2 \sin(u) \cos(u)$$

genutzt haben. Somit gilt

$$\begin{aligned} & |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \\ &= \sqrt{R^4 \sin^2(u) [\sin^2(u) \cos^2(v) + \sin^2(u) \sin^2(v) + \cos^2(u)]} \\ &= \sqrt{R^4 \sin^2(u) [\sin^2(u) (\cos^2(v) + \sin^2(v)) + \cos^2(u)]} \\ &= \sqrt{R^4 \sin^2(u) [\sin^2(u) + \cos^2(u)]} \\ &= \sqrt{R^4 \sin^2(u)} = R^2 |\sin(u)|. \end{aligned}$$

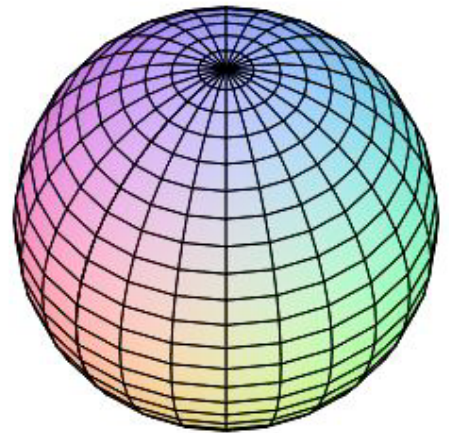
Es gilt

$$R^2 |\sin(u)| = 0 \quad \iff \quad \sin(u) = 0 \quad \iff \quad u \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Also gilt $\text{Rang}((\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2$ für alle $(u, v) \in \Omega :=]0, \pi[\times \mathbb{R}$.

Wir wählen nun den Parameterbereich so, dass $U \subseteq \Omega$. Für $U =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, d.h. $\bar{U} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ eine Parameterdarstellung der **Kugeloberfläche** oder **Sphäre**

$$\begin{aligned} S &:= \{ \vec{\mathbf{X}}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix} : (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \right\} \end{aligned}$$



um $(0, 0, 0)$ mit Radius R .

22.2 Tangentialvektoren und Einheitsnormalenvektoren

Wir lernen nun die wichtigen Begriffe des Tangentialraums, der Tangentialebene und eines Einheitsnormalenvektors kennen. Hier spielt unser Wissen aus der Linearen Algebra (siehe Kapitel 11 bis 13 im Skript der HM B) eine wichtige Rolle.

Definition 22.5. (Tangentialraum, Tangentialebene, Einheitsnormalenvektor)

Sei (\vec{X}, \bar{U}) (mit $\vec{X} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar) eine Parameterdarstellung eines Flächenstücks S . Sei $(u_0, v_0) \in U$, und sei $\vec{p} = \vec{X}(u_0, v_0)$ der zugehörige Punkt auf dem Flächenstück S .

- (1) **Tangentialraum:** Da die Vektoren $(\partial_u \vec{X})(u_0, v_0)$ und $(\partial_v \vec{X})(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, spannen Sie einen zweidimensionalen Untervektorraum von \mathbb{R}^3 auf, den **Tangentialraum an das Flächenstück S in $\vec{p} = \vec{X}(u_0, v_0)$:**

$$T_S(\vec{p}) = \text{LH}((\partial_u \vec{X})(u_0, v_0), (\partial_v \vec{X})(u_0, v_0))$$

(Dabei ist $\text{LH}(\dots)$ die lineare Hülle (= Span) der angegebenen Vektoren, also die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren.)

- (2) **Tangentialebene:** „Klebt“ man den Tangentialraum $T_S(\vec{p})$ an den Punkt \vec{p} , so erhält man eine **Tangentialebene $E_S(\vec{p})$ an S in \vec{p} .**

$$E_S(\vec{p}) := \{ \vec{p} + s (\partial_u \vec{X})(u_0, v_0) + t (\partial_v \vec{X})(u_0, v_0) : s, t \in \mathbb{R} \}$$

und

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{p} + s (\partial_u \vec{X})(u_0, v_0) + t (\partial_v \vec{X})(u_0, v_0), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

ist eine **Parameterdarstellung von $E_S(\vec{p})$.**

- (3) **Einheitsnormalenvektoren:** Es gibt genau zwei Vektoren $\vec{N}_S(\vec{p})$, $\vec{\tilde{N}}_S(\vec{p})$ der Länge 1, die auf $T_S(\vec{p})$ und $E_S(\vec{p})$ senkrecht stehen. Man nennt sie die **Einheitsnormalenvektoren des Flächenstückes S in $\vec{p} = \vec{X}(u_0, v_0)$** , und man kann sie einfach mit dem Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) bestimmen:

$$\vec{N}_S(\vec{p}) := \frac{(\partial_u \vec{X})(u_0, v_0) \times (\partial_v \vec{X})(u_0, v_0)}{|(\partial_u \vec{X})(u_0, v_0) \times (\partial_v \vec{X})(u_0, v_0)|},$$

$$\vec{\tilde{N}}_S(\vec{p}) := -\vec{N}_S(\vec{p}) = \frac{(\partial_v \vec{X})(u_0, v_0) \times (\partial_u \vec{X})(u_0, v_0)}{|(\partial_v \vec{X})(u_0, v_0) \times (\partial_u \vec{X})(u_0, v_0)|}.$$

(Meistens stellt man sich $\vec{N}_S(\vec{p})$ und $\vec{\tilde{N}}_S(\vec{p}) = -\vec{N}_S(\vec{p})$ als an den Punkt $\vec{p} = \vec{X}(u_0, v_0)$ angeheftet vor. Wir werden ab jetzt statt $\vec{\tilde{N}}_S(\vec{p})$ direkt $-\vec{N}_S(\vec{p})$ schreiben.)

Anschaulich **berührt die Tangentialebene** $E_S(\vec{\mathbf{p}})$ eines Flächenstückes S **im Punkt** $\vec{\mathbf{p}} \in M$ **das Flächenstück** S „**tangential**“. Dieses ist so zu verstehen, dass für jede Kurve in S durch den Punkt $\vec{\mathbf{p}}$ der Ableitungsvektor der Kurve im Punkt $\vec{\mathbf{p}}$ in der Tangentialebene liegt.

Zur Übung bestimmen wir die Tangentialräume, Tangentialebenen und Einheitsnormalenvektoren der Beispiele für die Flächenstücke aus dem vorigen Teilkapitel.

Beispiel 22.6. (Kugeloberfläche/Sphäre, vgl. Beispiel 22.4)

Wir betrachten die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche (oder Sphäre) S um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$ aus Beispiel 22.4:

$$\vec{\mathbf{X}} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}.$$

In Beispiel 22.4 hatten wir bereits berechnet, dass

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} R \cos(u) \cos(v) \\ R \cos(u) \sin(v) \\ -R \sin(u) \end{bmatrix}, \quad (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} -R \sin(u) \sin(v) \\ R \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ist der Tangentialraum von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$

$$T_S(\vec{\mathbf{p}}) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} R \cos(u) \cos(v) \\ R \cos(u) \sin(v) \\ -R \sin(u) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R \sin(u) \sin(v) \\ R \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

und die Tangentialebene von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ ist

$$E_S(\vec{\mathbf{p}}) = \left\{ \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} R \cos(u) \cos(v) \\ R \cos(u) \sin(v) \\ -R \sin(u) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -R \sin(u) \sin(v) \\ R \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Tangentialebene von S in $\vec{\mathbf{p}}$ auf dem „Stützvektor“

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v) = \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}$$

senkrecht steht. Dieses entspricht unserer Anschauung, denn die auf $\vec{\mathbf{p}}$ senkrecht stehende Ebene berührt die Kugeloberfläche S gerade tangential.

Weiter hatten wir in Beispiel 22.4 bereits berechnet, dass

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2(u) \cos(v) \\ R^2 \sin^2(u) \sin(v) \\ R^2 \sin(u) \cos(u) \end{bmatrix} = R^2 \sin(u) \begin{bmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix},$$

und somit

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R^2 |\sin(u)|.$$

Für $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ sind die beiden Einheitsnormalenvektoren von S also

$$\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) := \begin{bmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \vec{\mathbf{p}} \quad \text{und} \quad -\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) = -\frac{1}{R} \vec{\mathbf{p}}.$$

Beispiel 22.7. (Drehflächen; vgl. Beispiel 22.2)

- (a) Wir betrachten die Parameterdarstellung des Mantel S des Zylinders aus Beispiel 22.2 (a):

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, H]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix},$$

wobei $R > 0$ und $H > 0$ der Radius bzw. die Höhe sind. Wir hatten in Beispiel 22.2 (a) bereits berechnet, dass

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} -R \sin(u) \\ R \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind. Damit berechnen wir

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} -R \sin(u) \\ R \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R.$$

Somit ist der Tangentialraum von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in U$ mit $U :=]0, 2\pi[\times]0, H[$ gegeben durch

$$T_S(\vec{\mathbf{p}}) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} -R \sin(u) \\ R \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

und die Tangentialebene von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]0, H[$ ist

$$E_S(\vec{\mathbf{p}}) = \left\{ \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -R \sin(u) \\ R \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ sind die beiden Einheitsnormalenvektoren von S also

$$\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) := \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad -\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) = - \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Tangentialebene von S in $\vec{\mathbf{p}}$ in der Tat in $\vec{\mathbf{p}}$ tangential zum Mantel S des Zylinders ist.

- (b) Seien $a < c < d < b$ und $r :]a, b[\rightarrow]0, \infty[$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Parameterdarstellung der Drehfläche S aus Beispiel 22.2 (b):

$$\vec{\mathbf{X}} : [0, 2\pi] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ v \end{bmatrix}.$$

In Beispiel 22.2 (b) hatten wir bereits die partiellen Ableitungen berechnet:

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} r'(v) \cos(u) \\ r'(v) \sin(u) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Also ist der Tangentialraum von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]c, d[$ durch

$$T_S(\vec{\mathbf{p}}) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r'(v) \cos(u) \\ r'(v) \sin(u) \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

gegeben, und die Tangentialebene von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]c, d[$ ist

$$E_S(\vec{\mathbf{p}}) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ v \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r'(v) \cos(u) \\ r'(v) \sin(u) \\ 1 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) &= \begin{bmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r'(v) \cos(u) \\ r'(v) \sin(u) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ -r'(v) r(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \\ &= \sqrt{(r(v))^2 \cos^2(u) + (r(v))^2 \sin^2(u) + (r(v))^2 (r'(v))^2} \\ &= \sqrt{(r(v))^2 + (r(v))^2 (r'(v))^2} \\ &= r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2}. \end{aligned}$$

Für $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]c, d[$ sind die beiden Einheitsnormalenvektoren von S also

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + (r'(v))^2}} \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ -r'(v) \end{bmatrix}, \\ -\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) &= -\frac{1}{\sqrt{1 + (r'(v))^2}} \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ -r'(v) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel 22.8. (Graphen von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen)

(a) Sei $0 < r < R$. Der Graph der stetig differenzierbaren Funktion

$$f : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u, v) := \sqrt{R^2 - u^2 - v^2},$$

ist das Flächenstück S aus Beispiel 22.3 (a) mit der Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{X}} : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}.$$

Nach Beispiel 22.3 (a) hat diese die partiellen Ableitungen

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}, \quad (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}.$$

Also ist der Tangentialraum von S im Punkt $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit (u, v) aus $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ durch

$$T_S(\vec{\mathbf{p}}) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix} \right)$$

gegeben, und die Tangentialebene von S im Punkt $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit (u, v) aus $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ ist

$$E_S(\vec{\mathbf{p}}) = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir berechnen

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| &= \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + (R^2 - u^2 - v^2)}{R^2 - u^2 - v^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - u^2 - v^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}. \end{aligned}$$

Für $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ sind die beiden Einheitsnormalenvektoren von S also

$$\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}, \quad -\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) = -\frac{1}{R} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}.$$

- (b) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $U \subseteq \Omega$ offen und Jordan-messbar mit $\bar{U} \subseteq \Omega$. Der Graph (als glattes Flächenstück S) der stetig differenzierbaren Funktion $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ hat nach Beispiel 22.3 (b) die Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (\partial_u f)(u, v) \end{bmatrix}, \quad (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\partial_v f)(u, v) \end{bmatrix}.$$

Also ist der Tangentialraum von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in U$ durch

$$T_S(\vec{\mathbf{p}}) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (\partial_u f)(u, v) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\partial_v f)(u, v) \end{bmatrix} \right)$$

gegeben, und die Tangentialebene von S in $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in U$ ist

$$E_S(\vec{\mathbf{p}}) = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (\partial_u f)(u, v) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\partial_v f)(u, v) \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (\partial_u f)(u, v) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\partial_v f)(u, v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\partial_u f)(u, v) \\ -(\partial_v f)(u, v) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = \sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2}.$$

Für $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in U$ sind die beiden Einheitsnormalenvektoren von S also

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2}} \begin{bmatrix} -(\partial_u f)(u, v) \\ -(\partial_v f)(u, v) \\ 1 \end{bmatrix}, \\ -\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) &= -\frac{1}{\sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2}} \begin{bmatrix} -(\partial_u f)(u, v) \\ -(\partial_v f)(u, v) \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

22.3 Flächeninhalt von Flächenstücken

In diesem Teilkapitel lernen wir, wie man den Flächeninhalt eines glatten Flächenstücks berechnet.

Als Motivation erinnern wir uns an die Interpretation der Norm (oder Länge) des Kreuzprodukts zweier linear unabhängiger Vektoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$: Die reelle Zahl

$$|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}| \cdot \sin(\alpha),$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ ist, ist der **Flächeninhalt des von $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ aufgespannten Parallelogramms**.

Definition 22.9. (Flächeninhalt eines glatten Flächenstücks)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar, und sei $\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$. Weiter sei $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U **injektiv**.

$$\mathcal{O}(S) := \int_{\bar{U}} |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v)$$

heißt der **Flächeninhalt** von S , vorausgesetzt das Integral existiert.

Der Flächeninhalt eines Flächenstückes **hängt nicht von der bei der Berechnung verwendeten Parameterdarstellung des Flächenstückes ab**.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 22.10. (Kugeloberfläche, vgl. Beispiele 22.4 und 22.6)

Wir betrachten die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche (oder Sphäre) S um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$ aus Beispielen 22.4 und 22.6:

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, \pi] \times [0, 2\pi]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{\mathbf{X}}$ auf $U :=]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ injektiv. Dieses ist anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass das Bild $\vec{\mathbf{X}}(]0, \pi[\times]0, 2\pi[)$ gerade die Kugeloberfläche S ohne den Längengrad mit 0 Grad und ohne den Nord- und Südpol ist, und dass jeder Punkt in $\vec{\mathbf{X}}(]0, \pi[\times]0, 2\pi[)$ durch genau ein Parameterpaar $(u, v) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ als $\vec{\mathbf{X}}(u, v)$ dargestellt wird. Nach Beispiel 22.6 gilt

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R^2 |\sin(u)|.$$

Damit ist die Oberfläche der Sphäre S

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(S) &= \int_{\bar{U}} |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v) = \int_{\bar{U}} R^2 |\sin(u)| \, d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 |\sin(u)| \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin(u) \, du \, dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{2\pi} R^2 \, dv \right) \left(\int_0^\pi \sin(u) \, du \right) = \left[R^2 v \right]_{v=0}^{v=2\pi} \cdot \left[-\cos(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} \\
&= 2\pi R^2 \cdot [-(-1) - (-1)] = 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

Beispiel 22.11. (Drehflächen; vgl. Beispiele 22.2 und 22.7)

- (a) Wir betrachten die Parameterdarstellung des Mantel S des Zylinders aus Beispielen 22.2 (a) und 22.7 (a):

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, H]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix},$$

wobei $R > 0$ und $H > 0$ der Radius bzw. die Höhe sind. Das Bild von $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $]0, 2\pi[\times]0, H[$ ist der Mantel der Zylinders ohne den unteren und oberen Rand und ohne die „Schnittkante“ $\{(R, 0, v) : v \in [0, H]\}$, wobei jeder Punkt im Bild eindeutig einem Parameterpaar $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]0, H[$ zugeordnet werden kann. Also ist $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf den offenen Quader $]0, 2\pi[\times]0, H[$ injektiv. Aus Beispiel 22.7 (a) wissen wir, dass gilt

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R.$$

Somit ist der Flächeninhalt des Zylindermantels S

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(S) &= \int_{\bar{U}} |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v) = \int_{\bar{U}} R \, d(u, v) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^H R \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \left[R v \right]_{v=0}^{v=H} \, du = \int_0^{2\pi} R H \, du \\
&= \left[R H u \right]_{u=0}^{u=2\pi} = 2\pi R H.
\end{aligned}$$

- (b) Seien $a < c < d < b$ und $r :]a, b[\rightarrow]0, \infty[$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Parameterdarstellung der Drehfläche S aus Beispielen 22.2 (b) und 22.7 (b):

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [c, d]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ v \end{bmatrix}.$$

Analog zu dem vorigen Beispiel des Zylindermantels macht man sich klar, dass $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $U :=]0, 2\pi[\times]c, d[$ injektiv ist. In Beispiel 22.7 (b) hatten wir bereits berechnet:

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2}.$$

Also ist der Flächeninhalt der Drehfläche S

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(S) &= \int_{\bar{U}} |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2} \, d(u, v) = \int_c^d \int_0^{2\pi} r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2} \, du \, dv \\ &= \int_c^d \left[r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2} u \right]_{u=0}^{u=2\pi} \, dv = 2\pi \int_c^d r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2} \, dv. \end{aligned}$$

Beispiel 22.12. (Graphen von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen)

(a) Sei $0 < r < R$. Der Graph der stetig differenzierbaren Funktion

$$f : \underbrace{\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u, v) := \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}.$$

ist das Flächenstück S aus Beispielen 22.3 (a) und 22.8 (a) mit der Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}.$$

Betrachtet man nur die ersten beiden Komponenten von $\vec{\mathbf{X}}$, so erhält man die Identitätsabbildung, und diese ist (auf ganz \mathbb{R}^2) injektiv. Also ist auch $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ (in Formelnotation schreiben wir $\vec{\mathbf{X}}|_U$ für „ $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U “) injektiv.

Nach Beispiel 22.8 (a) ist

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2}.$$

Somit ist der Flächeninhalt von S

$$\mathcal{O}(S) = \int_{\bar{U}} |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v)$$

$$= \int_{\bar{U}} R (R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} d(u, v).$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir Polarkoordinaten, also mit $u = \varrho \cos(\phi)$, $v = \varrho \sin(\phi)$

$$R (R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} = R (R^2 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \stackrel{\text{PK}}{=} R (R^2 - \varrho^2)^{-1/2},$$

$$d(u, v) \stackrel{\text{PK}}{=} \varrho d\varrho d\phi,$$

$$\bar{U}_{\text{PK}} = \{(\varrho, \phi) : 0 \leq \varrho \leq r, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(S) &= \int_{\bar{U}} R (R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} d(u, v) \stackrel{\text{PK}}{=} \int_{\bar{U}_{\text{PK}}} R (R^2 - \varrho^2)^{-1/2} \varrho d\varrho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r R (R^2 - \varrho^2)^{-1/2} \varrho d\varrho d\phi = \int_0^{2\pi} \left[-R (R^2 - \varrho^2)^{1/2} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=r} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-R (R^2 - r^2)^{1/2} + R^2 \right] d\phi = \int_0^{2\pi} R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) d\phi \\ &= \left[R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}). \end{aligned}$$

Dabei wurde das erste Integral mit der Substitution

$$t = R^2 - \varrho^2, \quad \frac{dt}{d\varrho} = -2\varrho \quad \implies \quad -\frac{1}{2} dt = \varrho d\varrho$$

wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \int R (R^2 - \varrho^2)^{-1/2} \varrho d\varrho &= \left[\int R t^{-1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) dt \right]_{t=R^2-\varrho^2} \\ &= \left[-R t^{1/2} + c \right]_{t=R^2-\varrho^2} = -R (R^2 - \varrho^2)^{1/2} + c. \end{aligned}$$

Wir machen noch eine Beobachtung: Für $r \rightarrow R$ erhält man eine obere Halbkugeloberfläche (Hemisphäre) mit Radius R mit dem Flächeninhalt

$$\lim_{r \rightarrow R} 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) = 2\pi R^2.$$

Dieses stimmt mit dem Ergebnis aus Beispiel 22.10, dass der Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel mit Radius R gerade $4\pi R^2 = 2 \cdot 2\pi R^2$ ist, überein.

- (b) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $U \subseteq \Omega$ offen und Jordan-messbar mit $\bar{U} \subseteq \Omega$. Der Graph (als glattes Flächenstück S) einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ hat nach Beispielen 22.3 (b) und 22.8 (b) die Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}.$$

Betrachtet man nur die ersten beiden Komponenten von $\vec{\mathbf{X}}$, so erhält man die Identitätsabbildung, und diese ist (auf ganz \mathbb{R}^2) injektiv. Also ist auch $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U injektiv. Nach Beispiel 22.8 (b) ist

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = \sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2}.$$

Somit ist der Flächeninhalt von S

$$\mathcal{O}(S) = \int_{\bar{U}} \sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2} \, d(u, v).$$

Bemerkung 22.13. (Parametrisierung mit Zylinderkoordinaten)

- (1) Verwendet man bei der Parametrisierung eines glatten Flächenstücks **Zylinderkoordinaten mit festem Radius** $\varrho > 0$ (wie in Beispiel 22.11 (a)), also

$$\vec{\mathbf{X}}(\phi, z) = \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ z \end{bmatrix},$$

wobei $(\phi, z) \in \bar{U} \subseteq [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, so gilt

$$(\partial_\phi \vec{\mathbf{X}})(\phi, z) \times (\partial_z \vec{\mathbf{X}})(\phi, z) = \begin{bmatrix} -\varrho \sin(\phi) \\ \varrho \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies |(\partial_\phi \vec{\mathbf{X}})(\phi, z) \times (\partial_z \vec{\mathbf{X}})(\phi, z)| = \sqrt{\varrho^2 \cos^2(\phi) + \varrho^2 \sin^2(\phi)} = \varrho.$$

Also erhält man das skalare Oberflächenelement

$$d\sigma = \varrho \, d(\phi, z),$$

welches in Abbildung 22.2 veranschaulicht ist.

- (2) Verwendet man bei der Parametrisierung eines glatten Flächenstücks **Zylinderkoordinaten mit einer festen z -Koordinate**, also

$$\vec{\mathbf{X}}(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \varrho \cos(\phi) \\ \varrho \sin(\phi) \\ z \end{bmatrix},$$

wobei $(\varrho, \phi) \in \bar{U} \subseteq [0, \infty[\times [0, 2\pi]$, so gilt

$$(\partial_\varrho \vec{\mathbf{X}})(\varrho, \phi) \times (\partial_\phi \vec{\mathbf{X}})(\varrho, \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\varrho \sin(\phi) \\ \varrho \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varrho \end{bmatrix}$$

$$\implies |(\partial_\varrho \vec{\mathbf{X}})(\varrho, \phi) \times (\partial_\phi \vec{\mathbf{X}})(\varrho, \phi)| = \sqrt{\varrho^2} = \varrho.$$

Also erhält man das skalare Oberflächenelement

$$d\sigma = \varrho d(\varrho, \phi),$$

welches in Abbildung 22.2 veranschaulicht ist.

Bemerkung 22.14. (Parametrisierung mit Kugelkoordinaten)

Verwendet man bei der Parametrisierung eines glatten Flächenstücks **Kugelkoordinaten mit festem Radius $r > 0$** (wie in Beispiel 22.10), also

$$\vec{\mathbf{X}}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

wobei $(\theta, \phi) \in \bar{U} \subseteq [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, so gilt

$$\begin{aligned} (\partial_\theta \vec{\mathbf{X}})(\theta, \phi) \times (\partial_\phi \vec{\mathbf{X}})(\theta, \phi) &= \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r^2 \sin^2(\theta) \cos(\phi) \\ r^2 \sin^2(\theta) \sin(\phi) \\ r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| (\partial_\theta \vec{X})(\theta, \phi) \times (\partial_\phi \vec{X})(\theta, \phi) \right| = \sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} = r^2 \sin(\theta).$$

Also erhält man das skalare Flächenelement

$$d\sigma = r^2 \sin(\theta) d(\theta, \phi),$$

welches in Abbildung 22.3 veranschaulicht ist.

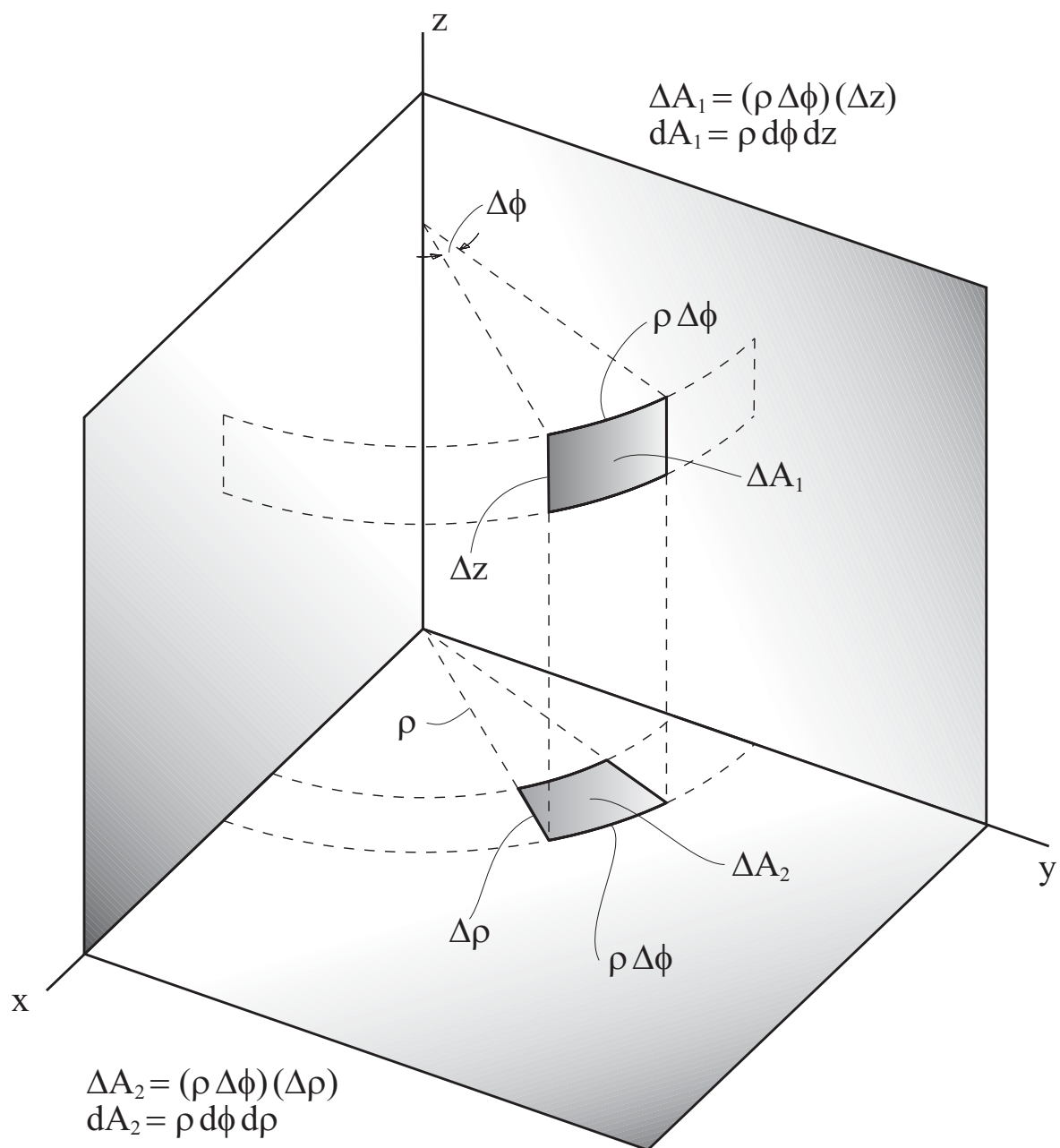
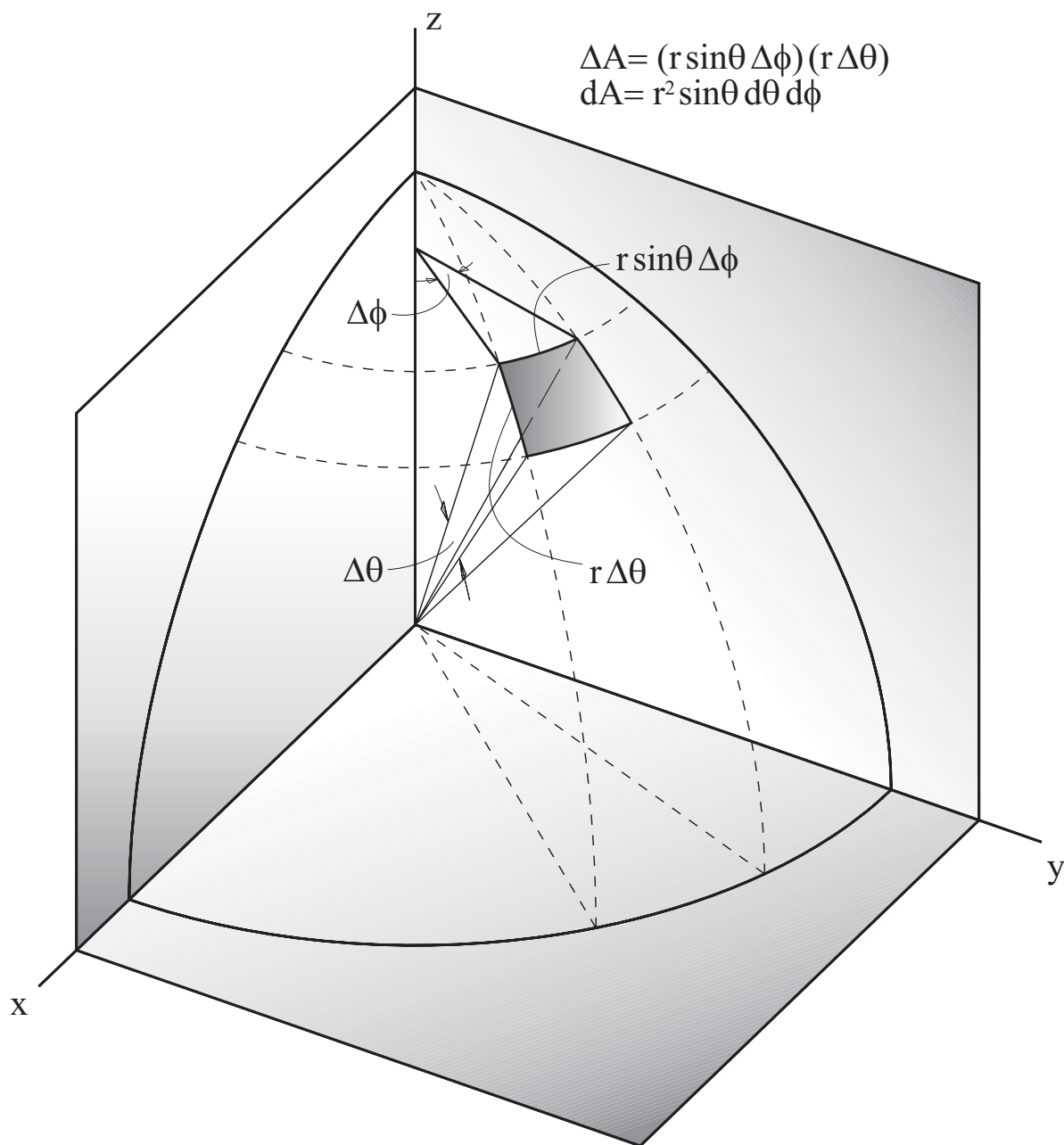


Abbildung 22.2: Flächenelemente in Zylinderkoordinaten für einen festen Radius $\rho > 0$ bzw. eine feste z -Koordinate

Abbildung 22.3: Oberflächenelement in Kugelkoordinaten für festen Radius $r > 0$

Wir schließen das Teilkapitel mit einer alternativen (aber äquivalenten) Formel zur Berechnung des Flächeninhalts ab.

Bemerkung 22.15. (andere Formel für $|(\partial_u \vec{X})(u, v) \times (\partial_v \vec{X})(u, v)|$: Gramsche Determinante)

Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 22.9. Die Lagrange-Identität für das Kreuzprodukt (vgl. Kapitel 2 im Skript der HM A)

liefert für $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|^2 &= |\vec{\mathbf{a}}|^2 |\vec{\mathbf{b}}|^2 - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2 \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} |\vec{\mathbf{a}}|^2 & \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} & |\vec{\mathbf{b}}|^2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} & \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} & \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (22.2)$$

Setzen wir also

$$\begin{aligned} g_{1,1}(u, v) &:= |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v)|^2 = (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \cdot (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v), \\ g_{2,2}(u, v) &:= |(\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)|^2 = (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) \cdot (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v), \\ g_{2,1}(u, v) &:= (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \cdot (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v), \\ g_{1,2}(u, v) &:= (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) \cdot (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v), \end{aligned}$$

so ist die Matrix

$$\mathbf{G}(u, v) := \begin{bmatrix} g_{1,1}(u, v) & g_{1,2}(u, v) \\ g_{2,1}(u, v) & g_{2,2}(u, v) \end{bmatrix}$$

symmetrisch, und es gilt nach (22.2)

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)|^2 = \det(\mathbf{G}(u, v)) \quad \text{für alle } (u, v) \in U.$$

$\det(\mathbf{G}(u, v))$ heißt die **Gramsche Determinante**. Es folgt also

$$\mathcal{O}(S) = \int_{\bar{U}} \sqrt{\det(\mathbf{G}(u, v))} \, d(u, v).$$

22.4 Oberflächenintegral eines Skalarfeldes

Nun lernen wir, wie man beliebige Skalarfelder über ein glattes Flächenstück S integriert. (Bis jetzt haben wir nur Flächeninhalte also Oberflächenintegrale des Skalarfeldes $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{\mathbf{x}}) = 1$ für alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$, betrachtet.)

Definition 22.16. (Oberflächenintegral eines Skalarfeldes über ein glattes Flächenstück)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar, und sei $\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$. Weiter sei $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U **injektiv**. Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Falls das Integral auf der rechten Seite existiert, heißt

$$\int_S f \, d\sigma := \int_{\bar{U}} f(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v)$$

das **Oberflächenintegral von f über S** .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 22.17. (Kugeloberfläche, vgl. Beispiele 22.4, 22.6 und 22.10)

Wir betrachten die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche (oder Sphäre) S um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$ aus Beispielen 22.4, 22.6 und 22.10:

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, \pi] \times [0, 2\pi]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{\mathbf{X}}$ auf $U :=]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ injektiv (vgl. Beispiel 22.10). Nach Beispiel 22.6 gilt

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R^2 |\sin(u)|.$$

Das Integral des Skalarfeldes

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := (x^2 + y^2) z,$$

über die Kugeloberfläche S ist

$$\int_S f \, d\sigma = \int_{\bar{U}} f(R \sin(u) \cos(v), R \sin(u) \sin(v), R \cos(u)) R^2 |\sin(u)| \, d(u, v).$$

Wir berechnen vorab das Skalarfeld in der Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} & f(R \sin(u) \cos(v), R \sin(u) \sin(v), R \cos(u)) \\ &= [R^2 \sin^2(u) \cos^2(v) + R^2 \sin^2(u) \sin^2(v)] R \cos(u) \end{aligned}$$

$$= [R^2 \sin^2(u)] R \cos(u) = R^3 \sin^2(u) \cos(u).$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma &= \int_{\bar{U}} R^3 \sin^2(u) \cos(u) R^2 |\sin(u)| \, d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^5 \sin^3(u) \cos(u) \, du \, dv \\ &= \left(\int_0^{2\pi} R^5 \, dv \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin^3(u) \cos(u) \, du \right) \\ &= [R^5 v]_{v=0}^{v=2\pi} \cdot \left[\frac{1}{4} \sin^4(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} \\ &= 2\pi R [\sin(\pi) - \sin(0)] = 2\pi R^5 \cdot [0 - 0] = 0, \end{aligned}$$

wobei wir bei der Berechnung des zweiten Integrals die Substitution

$$t = \sin(u), \quad \frac{dt}{du} = \cos(u) \implies dt = \cos(u) \, du,$$

genutzt haben, also

$$\int \sin^3(u) \cos(u) \, du = \left[\int t^3 \, dt \right]_{t=\sin(u)} = \left[\frac{1}{4} t^4 + c \right]_{t=\sin(u)} = \frac{1}{4} \sin^4(u) + c.$$

Beispiel 22.18. (Drehflächen; vgl. Beispiele 22.2, 22.7 und 22.11)

- (a) Wir betrachten die Parameterdarstellung des Mantel S des Zylinders aus Beispielen 22.2 (a), 22.7 (a) und 22.11 (a):

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, H]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix},$$

wobei $R > 0$ und $H > 0$ der Radius bzw. die Höhe sind. Nach Beispiel 22.11 (a) ist $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $]0, 2\pi[\times]0, H[$ injektiv. Aus Beispiel 22.7 (a) wissen wir, dass

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R.$$

Somit ist das Oberflächenintegral des Skalarfeldes

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := e^z,$$

über den Zylindermantel S

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma &= \int_{\bar{U}} e^v R \, d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^H R e^v \, dv \, du \\ &= \left(\int_0^{2\pi} R \, du \right) \left(\int_0^H e^v \, dv \right) = [R u]_{u=0}^{2\pi} \cdot [e^v]_{v=0}^{u=H} \\ &= 2\pi R \cdot [e^H - e^0] = 2\pi R [e^H - 1]. \end{aligned}$$

- (b) Seien $a < c < d < b$ und $r :]a, b[\rightarrow]0, \infty[$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Parameterdarstellung der Drehfläche S aus Beispielen 22.2 (b), 22.7 (b) und 22.11 (b):

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [c, d]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} r(v) \cos(u) \\ r(v) \sin(u) \\ v \end{bmatrix}.$$

Nach Beispiel 22.11 (b) ist $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $U :=]0, 2\pi[\times]c, d[$ injektiv. In Beispiel 22.7 (b) hatten wir bereits berechnet:

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2}.$$

Das Oberflächenintegral eines Skalarfeldes $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ über die Drehfläche S ist also

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma &= \int_{\bar{U}} f(r(v) \cos(u), r(v) \sin(u), v) r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2} \, d(u, v) \\ &= \int_c^d \int_0^{2\pi} f(r(v) \cos(u), r(v) \sin(u), v) r(v) \sqrt{1 + (r'(v))^2} \, du \, dv. \end{aligned}$$

Beispiel 22.19. (Graphen von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen)

- (a) Sei $0 < r < R$. Der Graph der stetig differenzierbaren Funktion

$$f : \underbrace{\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u, v) := \sqrt{R^2 - u^2 - v^2},$$

ist die Fläche S aus Beispielen 22.3 (a), 22.8 (a) und 22.12 (a) mit der

Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}.$$

Nach Beispiel 22.12 (a) ist die Parameterdarstellung $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ injektiv. Nach Beispiel 22.8 (a) ist

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = R(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2}.$$

Somit ist das Oberflächenintegral des Skalarfeldes

$$g : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) := z,$$

über die Fläche S

$$\begin{aligned} \int_S g \, d\sigma &= \int_{\bar{U}} g(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) R(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} \, d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} R(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} \, d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} R \, d(u, v) = R \int_{\bar{U}} d(u, v) = R v_2(\bar{U}). \end{aligned}$$

Der Kreis \bar{U} mit Radius r hat aber den Flächeninhalt $v_2(\bar{U}) = \pi r^2$. Also gilt

$$\int_S g \, d\sigma = \int_{\bar{U}} g(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) R(R^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} \, d(u, v) = R \pi r^2.$$

- (b) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $U \subseteq \Omega$ offen und Jordan-messbar mit $\bar{U} \subseteq \Omega$. Der Graph (als glattes Flächenstück S) einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ hat nach Beispielen 22.3 (b), 22.8 (b) und 22.12 (b) die Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}.$$

Nach Beispiel 22.12 (b) ist $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U injektiv. Nach Beispiel 22.8 (b) ist

$$|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| = \sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2}.$$

Somit ist das Oberflächenintegral eines Skalarfeldes $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ über S

$$\int_S g \, d\sigma = \int_{\bar{U}} g(u, v, f(u, v)) \sqrt{1 + ((\partial_u f)(u, v))^2 + ((\partial_v f)(u, v))^2} \, d(u, v).$$

Betrachten wir abschließend noch ein weiteres Beispiel, bei dem man erst einmal eine Parametrisierung für die gegebene Fläche finden muss.

Beispiel 22.20. (Oberflächenintegral eines Skalarfeldes)

Es seien

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = y\}$$

und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := e^{x^2+y^2}$. Gesucht ist das Oberflächenintegral $\int_S f \, d\sigma$.

Wir wählen für S die folgende Parameterdarstellung:

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{\{(u, v,) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq 1\}}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ v \end{bmatrix}.$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar. Es gilt

$$(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und man sieht an der linearen Unabhängigkeit der beiden Spaltenvektoren, dass $\text{Rang}((\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (und damit für alle $(u, v) \in U$) gilt. Also ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ eine Parameterdarstellung des glatten Flächenstücks S . Weiter ist die Parameterdarstellung von S auf $U := \{(u, v,) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 < 1\}$ injektiv, denn aus $\vec{\mathbf{X}}(u, v) = \vec{\mathbf{X}}(s, t)$ folgt direkt $u = s$ und $v = t$ (d.h. die Gleichung $\vec{\mathbf{X}}(u, v) = \vec{\mathbf{y}}$ hat für jedes $\vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ höchstens eine Lösung). Mit

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies |(\partial_u \vec{X})(u, v) \times (\partial_v \vec{X})(u, v)| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

erhalten wir

$$\int_S f \, d\sigma = \int_{\bar{U}} e^{u^2+v^2} \sqrt{2} \, d(u, v) = \sqrt{2} \int_{\bar{U}} e^{u^2+v^2} \, d(u, v).$$

Zur Berechnung des Integrals über \bar{U} verwenden wir Polarkoordinaten:

$$u = \varrho \cos(\phi), \quad v = \varrho \sin(\phi), \quad d(u, v) = \varrho \, d(\varrho, \phi),$$

$$\bar{U}_{\text{PK}} = \{(\varrho, \phi) : 0 < \varrho \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi\} =]0, 1] \times [0, 2\pi[.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma &= \sqrt{2} \int_{\bar{U}} e^{u^2+v^2} \, d(u, v) \stackrel{(\text{PK})}{=} \sqrt{2} \int_{\bar{U}_{\text{PK}}} e^{\varrho^2} \varrho \, d(\varrho, \phi) \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\phi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} e^{\varrho^2} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e - 1) \, d\phi = \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} (e - 1) \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = \sqrt{2} \pi (e - 1). \end{aligned}$$

Dabei wurde das erste Integral mit der Substitution

$$t = \varrho^2, \quad \frac{dt}{d\varrho} = 2\varrho \implies \frac{1}{2} dt = \varrho \, d\varrho,$$

also

$$\int e^{\varrho^2} \varrho \, d\varrho = \left[\int e^t \frac{1}{2} dt \right]_{t=\varrho^2} = \left[\frac{1}{2} e^t + c \right]_{t=\varrho^2} = \frac{1}{2} e^{\varrho^2} + c$$

berechnet.

Alternativ kann man S auch wie folgt mittels Polarkoordinaten parametrisieren:

$$\vec{X} : \underbrace{\{(u, v) \in \mathbb{R}^3 : u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]\}}_{= [0, 1] \times [0, 2\pi] = \bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{X}(u, v) := \begin{bmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ u \sin(v) \end{bmatrix}.$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar. Es gilt

$$(\partial \vec{X})(u, v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -u \sin(v) \\ \sin(v) & u \cos(v) \\ \sin(v) & u \cos(v) \end{bmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) &= \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ \sin(v) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ u \cos(v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(v) u \cos(v) - \sin(v) u \cos(v) \\ -u \sin^2(v) - u \cos^2(v) \\ u \cos^2(v) + u \sin^2(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u \\ u \end{bmatrix} \\ \implies |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| &= \sqrt{0^2 + (-u)^2 + u^2} = \sqrt{2u^2} = \sqrt{2} u. \end{aligned}$$

Auf $U :=]0, 1[\times]0, 2\pi[$ gilt immer $u \neq 0$ und somit folgt $\text{Rang}((\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2$ für alle $(u, v) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[$. Also ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ eine zulässige Parameterdarstellung für S . Da wir die Parameterdarstellung von (x, y) mit Hilfe der Polarkoordinaten definiert haben, ist mit unserem Verständnis der Polarkoordinaten klar, dass $\vec{\mathbf{X}}$ auf $U =]0, 1[\times]0, 2\pi[$ injektiv ist.

Mit

$$x^2 + y^2 = (u \cos(v))^2 + (u \sin(v))^2 = u^2 \quad \implies \quad f(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) = e^{u^2}$$

berechnet sich das Oberflächenintegral zu

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma &= \int_{\bar{U}} e^{u^2} \sqrt{2} u \, d(u, v) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{u^2} u \, du \, dv = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} e^{u^2} \right]_{u=0}^{u=1} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e - 1) \, dv = \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} (e - 1) v \right]_{v=0}^{v=2\pi} = \sqrt{2} \pi (e - 1). \end{aligned}$$

Dabei wurde das erste Integral mit der Substitution

$$t = u^2, \quad \frac{dt}{du} = 2u \quad \implies \quad \frac{1}{2} dt = u \, du,$$

also

$$\int e^{u^2} u \, du = \left[\int e^t \frac{1}{2} dt \right]_{t=u^2} = \left[\frac{1}{2} e^t + c \right]_{t=u^2} = \frac{1}{2} e^{u^2} + c$$

berechnet.

Wir erhalten natürlich mit beiden Parameterdarstellungen von S da gleiche Ergebnis für das Oberflächenintegral, aber wir bemerken, dass die erste Parameterdarstellung weniger Rechenaufwand erforderte.

22.5 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

In diesem Teilkapitel lernen wir, wie man ein Vektorfeld über eine Flächenstück integriert. Bevor wir das Integral eines Vektorfeldes über ein Flächenstück definieren, stellen wir einige Vorüberlegungen an.

Bemerkung 22.21. (Einheitsnormalenvektorfeld und Orientierung)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar, und sei $\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$. In Definition 22.5 (3) haben wir bereits den Einheitsnormalenvektor der Fläche S im Punkt $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{X}}(u, v)$ mit $(u, v) \in U$ kennengelernt:

$$\vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) := \frac{(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)}{|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)|}.$$

Fassen wir $\vec{\mathbf{N}}_S$ als Funktion auf der Fläche S auf, also $\vec{\mathbf{N}}_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, so erhalten wir ein stetiges Vektorfeld, genannt das **Einheitsnormalenvektorfeld von S** . Durch $\vec{\mathbf{N}}_S$ erhält das Flächenstück eine sogenannte „**Orientierung**“.

Stimmt $\vec{\mathbf{N}}_S$ nicht mit der gewünschten Orientierung überein, so kann man das leicht beheben, indem man u und v vertauscht, d.h. statt der Parameterdarstellung $\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ betrachtet man die Parameterdarstellung $\vec{\mathbf{Y}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{\mathbf{Y}}(u, v) := \vec{\mathbf{X}}(v, u)$. Ist eine Orientierung des Flächenstückes S vorgegeben, so wählt man die Parameterdarstellung von S so, dass das Einheitsnormalenvektorfeld $\vec{\mathbf{N}}_S$ mit dieser Orientierung übereinstimmt.

Ist das Flächenstück die Randfläche eines dreidimensionalen Körpers, so wählt man die Parameterdarstellung (und damit die Orientierung) so, dass das $\vec{\mathbf{N}}_S$ nach außen zeigt. $\vec{\mathbf{N}}_S$ heißt dann **das äußere Einheitsnormalenvektorfeld**.

Machen wir uns kurz an einem Beispiel den Begriff der Orientierung klar: Eine Vollkugel im \mathbb{R}^3 hat als Rand eine Kugeloberfläche oder Sphäre. Da die Orientierung hier so gewählt werden soll, dass das Einheitsnormalenvektorfeld nach außen zeigt, wählt man hier z.B. eine Parameterdarstellung mit Kugelkoordinaten. In Beispiel 22.6 haben wir für die Kugeloberfläche S der Kugel um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$ die beiden Einheitsnormalenvektoren berechnet. Das von $\vec{\mathbf{N}}_S$ in Beispiel 22.6 gebildete Vektorfeld ist das äußere Einheitsnormalenvektorfeld von S . Es zeigt, wie gefordert, nach außen.

Motivation und physikalische Interpretation: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordannmessbar, und sei $\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$. Weiter sei $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U injektiv. Das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibe eine Flüssigkeitsströmung in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch das Flächenstück S hindurch tritt (d.h. $S \subseteq \Omega$).

Stellen Sie sich zum Beispiel vor, dass S eine Kugeloberfläche ist, die sich im Wasser befindet, und dass $\vec{\mathbf{F}}$ das Geschwindigkeitsfeld der Wasserströmung beschreibt.

Interessieren wir uns nun für die Strömung **durch** die Fläche S , so ist nur die Komponente von $\vec{\mathbf{F}}$ in Richtung des Einheitsnormalenfeldes interessant, also

$$a(\vec{\mathbf{p}}) := \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{p}}) \cdot \vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}), \quad \vec{\mathbf{p}} \in S.$$

$a(\vec{\mathbf{p}})$ ist die Komponente von $\vec{\mathbf{F}}$ in Richtung von $\vec{\mathbf{N}}_S$ und beschreibt den „**Durchfluss**“ von $\vec{\mathbf{F}}$ durch das Flächenstück S in Normalenrichtung im Punkt $\vec{\mathbf{p}}$.

Bei dem Beispiel mit der Kugeloberfläche in der Wasserströmung ist $a(\vec{\mathbf{p}})$ also die Komponente des Geschwindigkeitsfeldes der Wasserströmung, die im Punkt $\vec{\mathbf{p}}$ in die radiale Richtung zeigt.

Der (gesamte) „**Fluss**“ von $\vec{\mathbf{F}}$ durch das Flächenstück S ist dann das **Oberflächenintegral**

$$\begin{aligned} \int_S a \, d\sigma &= \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| \, d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)] \, d(u, v), \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) &= \frac{(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)}{|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)|} \\ \implies \vec{\mathbf{N}}_S(\vec{\mathbf{p}}) |(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)| &= (\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) \end{aligned}$$

genutzt haben.

In dem Beispiel der Kugeloberfläche in der Wasserströmung „summieren“ wir also die Flüsse durch die Kugeloberfläche in Radialrichtung auf. Strömt Wasser in einem Punkt der Kugeloberfläche nach außen aus der Kugel hinaus, so geht dieses mit einem positiven Vorzeichen ein. Strömt Wasser in einem Punkt der Kugeloberfläche in die Kugel hinein, so geht dieses mit einem negativen Vorzeichen ein.

Man kann sich anschaulich überlegen, dass bei einer Strömung mit konstanter Geschwindigkeit in einer festen Richtung durch die Kugel(oberfläche) der Fluss Null sein sollte, weil genauso viel Wasser durch die Kugeloberfläche hineinströmt wie auch durch die Kugeloberfläche herausströmt. Wird innerhalb der Kugel dagegen durch einen Schlauch Wasser eingespeist, so sollte mehr Wasser aus der Kugel herausströmen als hineinströmt und wir erwarten, dass der Fluss positiv ist. In der Kugel liegt eine Quelle vor. Diese Quelle ist natürlich in der Formel für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{\mathbf{F}}$ reflektiert.

Analoge Beispiele kann man sich mit magnetischen Feldern und Ladungsquellen überlegen.

Definition 22.22. (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes über ein glattes Flächenstück)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar, und sei $\vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$. Weiter sei $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf U **injektiv**. Sei $\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Falls das Integral auf der rechten Seite existiert, heißt

$$\int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathcal{O}} := \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)] d(u, v)$$

das **Oberflächenintegral** (oder **Flussintegral**) von $\vec{\mathbf{F}}$ über S .

Das Oberflächenintegral (oder Flussintegral) eines Vektorfeldes $\vec{\mathbf{F}}$ über ein Flächenstück S misst den **Fluss des Vektorfeldes durch die Fläche S** .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 22.23. (Kugeloberfläche/Sphäre, vgl. Beisp. 22.4, 22.6, 22.10)

Wir betrachten die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche (oder Sphäre) S um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$ aus Beispielen 22.4, 22.6 und 22.10:

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, \pi] \times [0, 2\pi]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{\mathbf{X}}$ auf $U :=]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ injektiv (vgl. Beispiel 22.10). Nach Beispiel 22.6 gilt

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = R^2 \sin(u) \begin{bmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix} = R \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v).$$

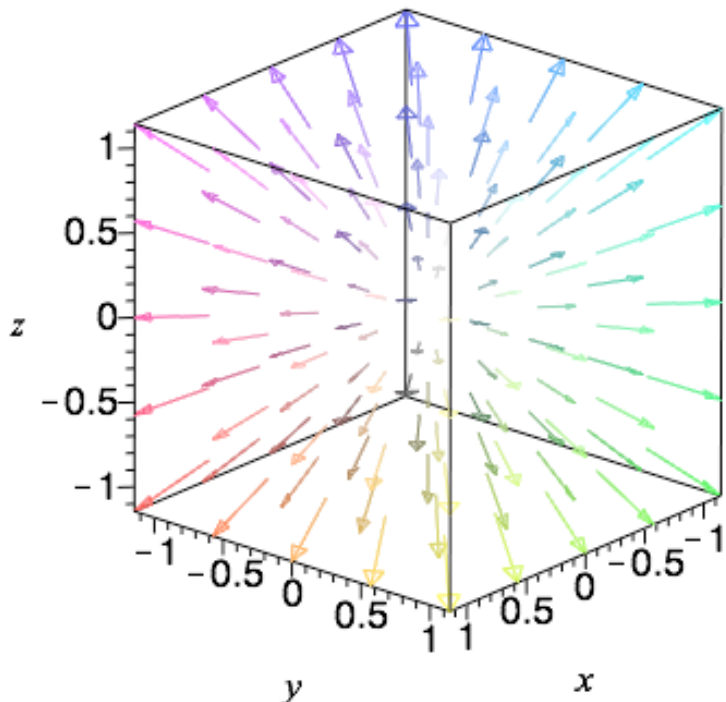
(a) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{p}}) := \vec{\mathbf{p}},$$

über die Kugeloberfläche S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathcal{O}} &= \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot R \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{X}}(u, v) \cdot R \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} R \sin(u) \underbrace{|\vec{\mathbf{X}}(u, v)|^2}_{=R^2} d(u, v) = \int_{\bar{U}} R^3 \sin(u) d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^3 \sin(u) du dv = \left(\int_0^{2\pi} R^3 dv \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin(u) du \right) \\ &= \left[R^3 v \right]_{v=0}^{v=2\pi} \cdot \left[-\cos(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} = 2\pi R^3 \cdot [-(-1) - (-1)] = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung? – Bei dem Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{p}}) = \vec{\mathbf{p}}$ strömt Flüssigkeit in die radiale Richtung (also in Richtung der Einheitsnormalen $\vec{\mathbf{N}}_S$) durch die Kugeloberfläche S nach außen. Daher erwarten wir einen positiven Wert des Oberflächenintegrals. Das Ergebnis ist nach unserer Anschauung sinnvoll.



(b) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

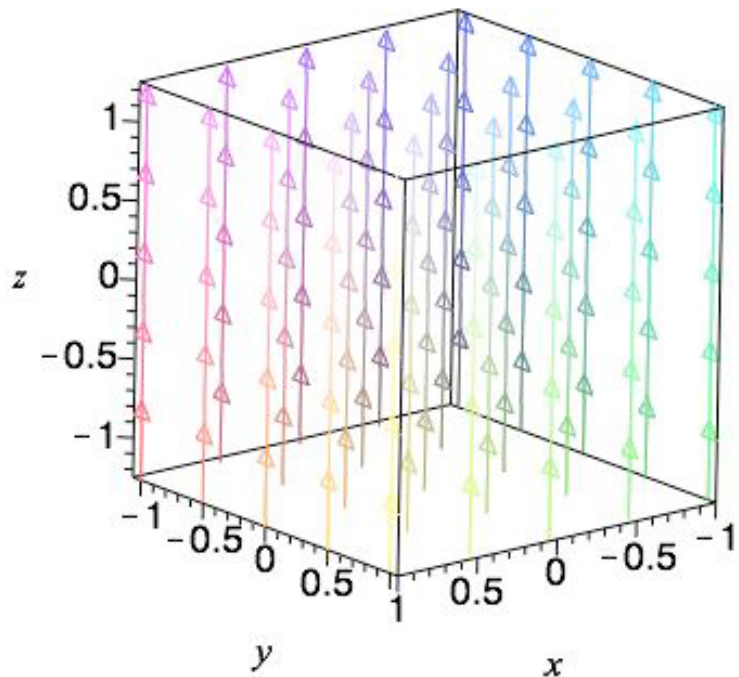
$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \vec{\mathbf{e}}_3,$$

also über die Kugeloberfläche S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\overline{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot R \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) \, d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot R \sin(u) \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix} \, d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} R^2 \sin(u) \cos(u) \, d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin(u) \cos(u) \, du \, dv \\ &= \left(\int_0^{2\pi} R^2 \, dv \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin(u) \cos(u) \, du \right) = \left[R^2 v \right]_{v=0}^{v=2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} \\ &= 2\pi R^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2(\pi) - \frac{1}{2} \sin^2(0) \right] = 2\pi R^2 [0 - 0] = 0. \end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung?

Bei einem konstanten Vektorfeld strömt dieselbe Menge Flüssigkeit in das Volumen hinein, die auch herausströmt. Also erwarten wir, dass der gesamte Fluss durch die Oberfläche null ist. Dieses ist der Fall.



Dabei haben wir bei der Berechnung des zweiten Integrals die Substitution

$$t = \sin(u), \quad \frac{dt}{du} = \cos(u) \quad \Longrightarrow \quad dt = \cos(u) \, du$$

genutzt, also

$$\int \sin(u) \cos(u) du = \left[\int t dt \right]_{t=\sin(u)} = \left[\frac{1}{2} t^2 + c \right]_{t=\sin(u)} = \frac{1}{2} \sin^2(u) + c.$$

(c) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := e^{z^2} \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{z^2} \end{bmatrix},$$

über die Kugeloberfläche S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\overline{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot R \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{R^2 \cos^2(u)} \end{bmatrix} \cdot R \sin(u) \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix} d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} R^2 e^{R^2 \cos^2(u)} \sin(u) \cos(u) d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 e^{R^2 \cos^2(u)} \sin(u) \cos(u) du dv \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1 dv \right) \cdot \left(\int_0^\pi e^{R^2 \cos^2(u)} R^2 \sin(u) \cos(u) du \right) \\ &= \left[v \right]_{v=0}^{v=2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{R^2 \cos^2(u)} \right]_{u=0}^{u=\pi} \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{R^2 \cos^2(\pi)} - \left(-\frac{1}{2} e^{R^2 \cos^2(0)} \right) \right] \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{R^2(-1)^2} + \frac{1}{2} e^{R^2 1^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der Berechnung des zweiten Integrals die Substitution

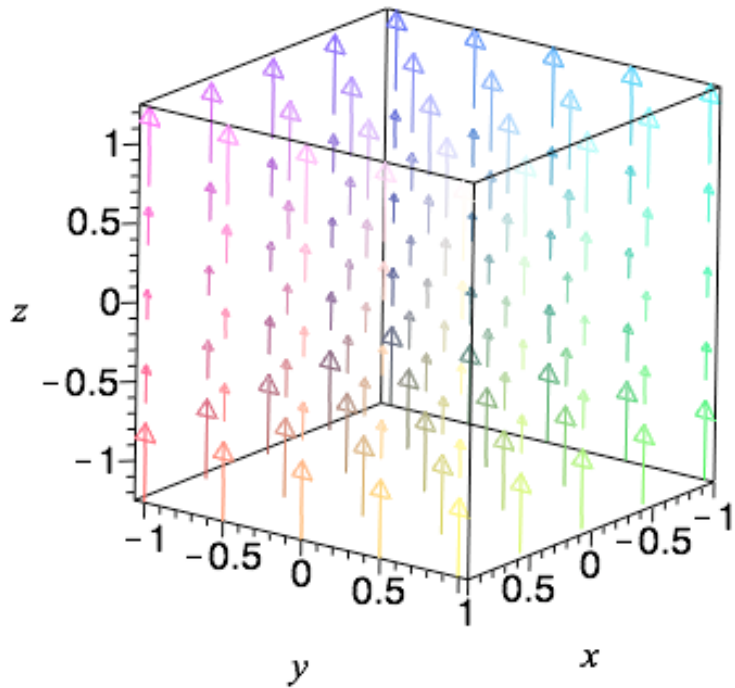
$$\begin{aligned} t &= R^2 \cos^2(u), & \frac{dt}{du} &= -2 R^2 \cos(u) \sin(u) \\ \implies & & -\frac{1}{2} dt &= R^2 \cos(u) \sin(u) du \end{aligned}$$

genutzt, also

$$\begin{aligned} \int e^{R^2 \cos^2(u)} R^2 \sin(u) \cos(u) \, du &= \left[\int -\frac{1}{2} e^t \, dt \right]_{t=R^2 \cos^2(u)} \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^t + c \right]_{t=R^2 \cos^2(u)} = -\frac{1}{2} e^{R^2 \cos^2(u)} + c. \end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung?

Da der Fluss nur in z -Richtung erfolgt, nur von z abhängig ist und bzgl. z symmetrisch ist, also $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = \vec{\mathbf{F}}(x, y, -z)$, strömt auch hier dieselbe Menge Flüssigkeit in das Volumen hinein, die auch herausströmt. Also muss der gesamte Fluss durch die Oberfläche null sein. Dieses ist der Fall. Dabei haben wir auch ausgenutzt, dass S bzgl. der (x, y) -Ebene spiegelsymmetrisch ist.



(d) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := z \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix},$$

über die Kugeloberfläche S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\overline{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot R \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) \, d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \cos(u) \end{bmatrix} \cdot R \sin(u) \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix} \, d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} R^3 \cos^2(u) \sin(u) \, d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^3 \cos^2(u) \sin(u) \, du \, dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{2\pi} R^3 \, dv \right) \cdot \left(\int_0^\pi \cos^2(u) \sin(u) \, du \right) \\
&= \left[R^3 v \right]_{v=0}^{v=2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cos^3(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} = 2\pi R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos^3(\pi) + \frac{1}{3} \cos^3(0) \right] \\
&= 2\pi R^3 \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{4\pi}{3} R^3.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der Berechnung des zweiten Integrals die Substitution

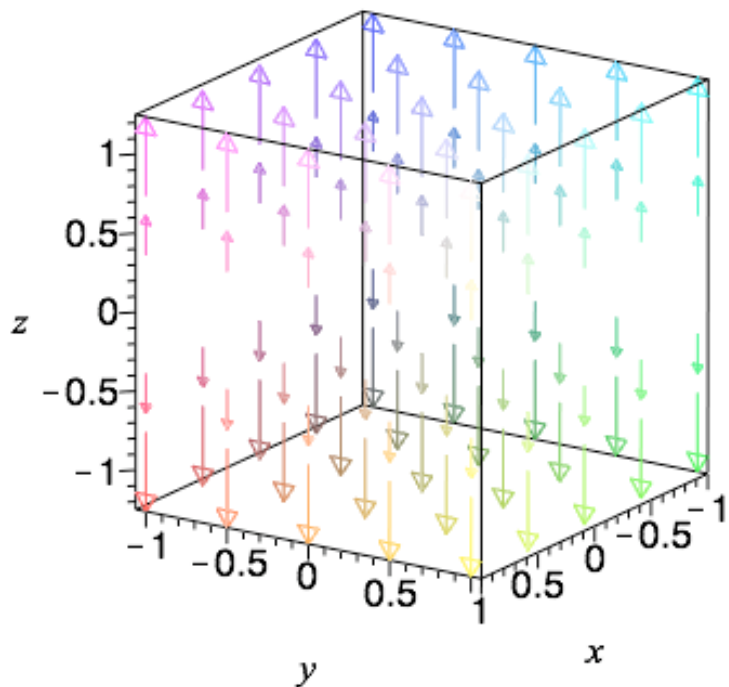
$$t = \cos(u), \quad \frac{dt}{du} = -\sin(u) \quad \Longrightarrow \quad -dt = \sin(u) \, du$$

genutzt, also

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(u) \sin(u) \, du &= \left[\int -t^2 \, dt \right]_{t=\cos(u)} \\
&= \left[-\frac{1}{3} t^3 + c \right]_{t=\cos(u)} = -\frac{1}{3} \cos^3(u) + c.
\end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung?

Das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = z \vec{\mathbf{e}}_3$ kann man so interpretieren, dass wegen $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = 1$ überall Quellen liegen, von denen Flüssigkeit bei $z > 0$ nach oben in Richtung der positiven z -Achse bzw. bei $z < 0$ nach unten in Richtung der negativen z -Achse strömt. Diese Strömung hat bis auf den Äquator eine positive Komponente in Richtung der Normale der Kugeloberfläche. Also sollte der Fluss durch die Kugeloberfläche positiv sein. Dieses ist der Fall.



Beispiel 22.24. (Zylindermantel; vgl. Beispiele 22.2, 22.7 und 22.11)

Wir betrachten die Parameterdarstellung des Zylindermantels S aus Beispielen 22.2 (a), 22.7 (a) und 22.11 (a):

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, H]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix},$$

wobei $R > 0$ und $H > 0$ der Radius bzw. die Höhe sind. Nach Beispiel 22.11 (a) ist $\vec{\mathbf{X}}$ eingeschränkt auf $]0, 2\pi[\times]0, H[$ injektiv. Aus Beispiel 22.7 (a) wissen wir, dass

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := f(x, y, z) \vec{\mathbf{e}}_3,$$

mit einer beliebigen stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über den Zylindermantel S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) \\ &= \int_{\bar{U}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(R \cos(u), R \sin(u), v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) = \int_{\bar{U}} 0 d(u, v) = 0. \end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung? – Da das Vektorfeld in z -Richtung zeigt und somit tangential zum Zylindermantel S ist, strömt keine Flüssigkeit durch den Zylindermantel. Der Fluss durch den Zylindermantel sollte also null sein; dieses ist der Fall.

(b) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := e^y \vec{\mathbf{e}}_1,$$

über den Zylindermantel S ist

$$\int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} = \int_{\bar{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\bar{U}} \begin{bmatrix} e^{R \sin(u)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) \\
&= \int_{\bar{U}} e^{R \sin(u)} R \cos(u) d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^H e^{R \sin(u)} R \cos(u) dv du \\
&= \int_0^{2\pi} \left[e^{R \sin(u)} R \cos(u) v \right]_{v=0}^{v=H} du = \int_0^{2\pi} H e^{R \sin(u)} R \cos(u) du \\
&= \left[H e^{R \sin(u)} \right]_{u=0}^{u=2\pi} = H \underbrace{e^{R \sin(2\pi)}}_{=e^0=1} - H \underbrace{e^{R \sin(0)}}_{=e^0=1} = H - H = 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der Berechnung des zweiten Integrals die Substitution

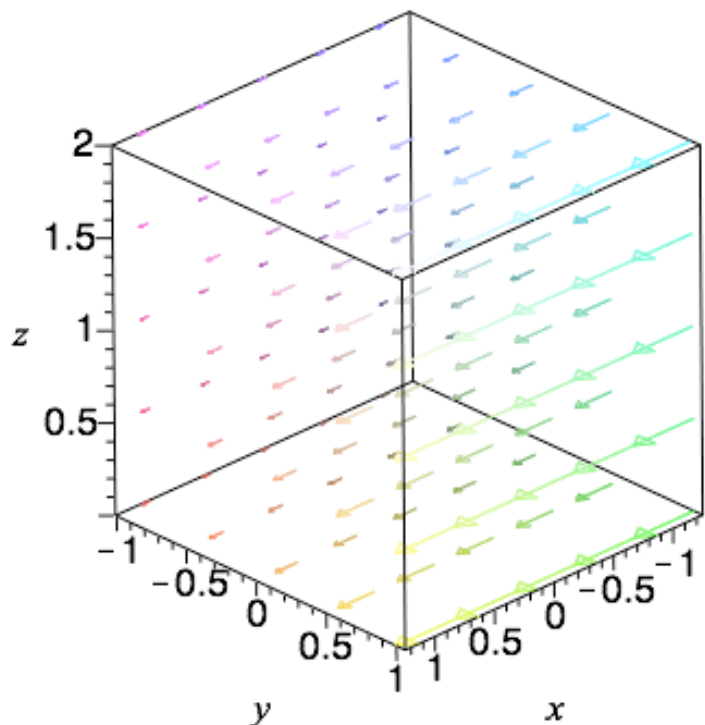
$$t = R \sin(u), \quad \frac{dt}{du} = R \cos(u) \quad \implies \quad dt = R \cos(u) du$$

genutzt, also

$$\begin{aligned}
\int H e^{R \sin(u)} R \cos(u) du &= \left[\int H e^t dt \right]_{t=R \sin(u)} \\
&= \left[H e^t + c \right]_{t=R \sin(u)} = H e^{R \sin(u)} + c.
\end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung?

Hier überrascht es zunächst, dass das Integral null ist. Macht man sich aber ein Bild von dem Vektorfeld (es reicht dieses in der (x, y) -Ebene zu zeichnen, da das Vektorfeld nicht von z abhängt und die Vektorpfeile keine z -Komponente haben), so sieht man, warum das Oberflächenintegral null sein muss.



(c) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := x \vec{\mathbf{e}}_1,$$

über den Zylindermantel S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\overline{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) = \int_{\overline{U}} R^2 \cos^2(u) d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^H R^2 \underbrace{\cos^2(u)}_{=\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u)} dv du = \int_0^{2\pi} \left[R^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u) \right) v \right]_{v=0}^{v=H} du \\ &= \int_0^{2\pi} H R^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u) \right) du = \left[H R^2 \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u) \right) \right]_{u=0}^{u=2\pi} \\ &= \pi H R^2 + \frac{H R^2}{4} [\sin(4\pi) - \sin(0)] = \pi H R^2. \end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung?

Man kann das Vektorfeld so interpretieren, dass wegen $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = 1$ überall Quellen liegen, aus denen Flüssigkeit bei $x > 0$ in Richtung der positiven x -Achse bzw. bei $x < 0$ in Richtung der negativen x -Achse strömt, die dann durch den Zylindermantel S nach außen dringt (siehe linkes Bild in Abbildung 22.4). Also muss der Fluss durch den Zylindermantel S positiv sein; dieses ist der Fall.

(d) Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := -x \vec{\mathbf{e}}_1,$$

über den Zylindermantel S ist

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\overline{U}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) \\ &= \int_{\overline{U}} \begin{bmatrix} -R \cos(u) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix} d(u, v) = \int_{\overline{U}} -R^2 \cos^2(u) d(u, v) \end{aligned}$$

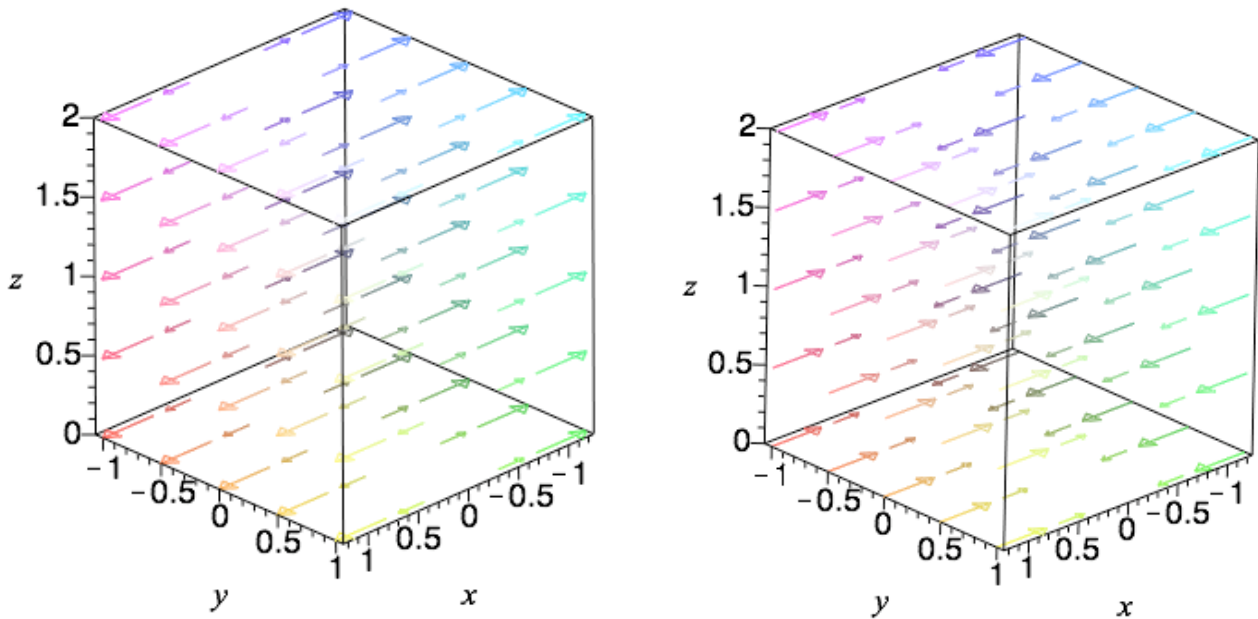


Abbildung 22.4: Das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = x \vec{\mathbf{e}}_1$ im linken Bild und das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = -x \vec{\mathbf{e}}_1$ im rechten Bild.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^H -R^2 \underbrace{\cos^2(u)}_{=\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u)} dv du = \int_0^{2\pi} \left[-R^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u) \right) v \right]_{v=0}^{v=H} du \\
 &= \int_0^{2\pi} -H R^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u) \right) du = \left[-H R^2 \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u) \right) \right]_{u=0}^{u=2\pi} \\
 &= -\pi H R^2 - \frac{H R^2}{4} [\sin(4\pi) - \sin(0)] = -\pi H R^2.
 \end{aligned}$$

Entspricht das Ergebnis tendenziell unserer Anschauung?

Man kann das Vektorfeld so interpretieren, dass wegen $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = -1$ überall Senken liegen und dass senkrecht zu der $(0, y, z)$ -Ebene Flüssigkeit durch den Zylindermantel S hineinströmt und jeweils zur $(0, y, z)$ -Ebene hin strömt (siehe rechtes Bild in Abbildung 22.4). Da nur Flüssigkeit in den Zylindermantel S nach innen strömt, muss der Fluss durch den Zylindermantel negativ sein; dieses ist der Fall.

22.6 Flächen

Flächen sind die Verallgemeinerung von Flächenstücken, und wir werden sehen, dass man diese als eine „Vereinigung“ glatter Flächenstücke auffassen kann, wobei die vereinigten Flächenstücke höchstens Randpunkte gemeinsam haben dürfen. – Es sei hier darauf hingewiesen, dass die Behandlung von Flächen im Rahmen der HM C nur sehr rudimentär ist, aber dieses für die Anwendungen der Elektrotechnik in der Regel ausreichend ist. Für eine mathematisch tiefer gehende Behandlung von Flächen benötigt man die Theorie der Mannigfaltigkeiten im Rahmen einer mathematischen Vektoranalysis oder Differentialgeometrie Vorlesung.

Definition 22.25. (Randpunkte eines glatten Flächenstückes)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und Jordan-messbar, und sei $\vec{X} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes S . Weiter sei die Parameterdarstellung \vec{X} doppeltpunktfrei, d.h. \vec{X} eingeschränkt auf U sei injektiv. $\vec{p} \in S$ heißt ein **Randpunkt von S (mit der Parameterdarstellung \vec{X})**, falls die Urbildmenge $\vec{X}^{-1}(\vec{p}) = \{(u, v) \in \bar{U} : \vec{X}(u, v) = \vec{p}\}$ ganz im Rand ∂U von U liegt.

Beachten Sie, dass die Definition eines Randpunktes von S **von der Parameterdarstellung \vec{X} abhängt**. Deshalb haben wir in der Definition eines Randpunktes von S den Zusatz „(mit der Parameterdarstellung \vec{X})“ angegeben. Wir sehen gleich in den nachfolgenden Beispielen, in welchem Sinn die Randpunkte von der Parameterdarstellung abhängen können.

Beispiel 22.26. (Randpunkte von glatten Flächenstücken)

- (a) Die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche (oder Sphäre) S um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$ aus Beispielen 22.4, 22.6, 22.10, 22.17 und 22.23

$$\vec{X} : \underbrace{[0, \pi] \times [0, 2\pi]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{X}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix},$$

hat die Randpunkte $(\sqrt{R^2 - z^2}, 0, z)$, $z \in [-R, R]$. Diese Randpunkte beschreiben den Halbkreis vom Südpol zum Nordpol auf dem Längengrad mit 0 Grad.

Erklärung: Die Randpunkte von U erfüllen $u = 0$ oder $u = \pi$ oder $v = 0$ oder $v = 2\pi$. Für $u = 0$ bzw. $u = \pi$ erhalten wir

$$\vec{\mathbf{X}}(0, v) = \begin{bmatrix} R \sin(0) \cos(v) \\ R \sin(0) \sin(v) \\ R \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}$$

$$\text{bzw. } \vec{\mathbf{X}}(\pi, v) = \begin{bmatrix} R \sin(\pi) \cos(v) \\ R \sin(\pi) \sin(v) \\ R \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix},$$

also den Nordpol und den Südpol der Kugeloberfläche. Für $v = 0$ und $v = 2\pi$ erhalten wir wegen der Periodizität des Sinus und Cosinus dieselben Punkte, und es reicht daher $v = 0$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{X}}(u, 0) &= \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(0) \\ R \sin(u) \sin(0) \\ R \cos(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin(u) \\ 0 \\ R \cos(u) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2(u)} \\ 0 \\ R \cos(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{R^2 - z^2} \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit $z := R \cos(u)$. Für $u \in [0, \pi]$ durchläuft z alle Zahlen in $[-R, R]$. Für $z = R$ bzw. $z = -R$ haben wir dabei den Nordpol und den Südpol mit erfasst.

- (b) Die alternative Parameterdarstellung der Kugeloberfläche (oder Sphäre) S um $(0, 0, 0)$ mit Radius $R > 0$

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, \pi] \times [-\pi, \pi]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \sin(u) \cos(v) \\ R \sin(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \end{bmatrix}.$$

hat die Randpunkte $(-\sqrt{R^2 - z^2}, 0, z)$, $z \in [-R, R]$. Diese Randpunkte beschreiben den Halbkreis vom Südpol zum Nordpol auf dem Längengrad mit 180 Grad. Man überlegt sich dieses analog zum vorigen Beispiel, und wir überlassen die Details dem Leser als Übungsaufgabe.

Da die Kugeloberfläche keine physischen Randpunkte hat, ist es klar, dass die Randpunkte „künstlich“ durch die Parametrisierung entstehen.

An Beispiel (a) und (b) sieht man, dass die Randpunkte eines Flächenstücks von der Parameterdarstellung abhängen können.

- (c) Die Parameterdarstellung des Zylindermantels S mit Radius $R > 0$ und Höhe $H > 0$ aus Beispielen 22.2 (a), 22.7 (a), 22.11 (a), 22.18 (a) und 22.24

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, H]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ v \end{bmatrix},$$

hat die folgenden Randpunkte:

- $(R, 0, v)$ mit $v \in [0, H]$ (eine Mantellinie),
- $(R \cos(u), R \sin(u), 0)$ mit $u \in [0, 2\pi]$
(Kreis am unteren Rand des Zylindermantels),
- $(R \cos(u), R \sin(u), H)$ mit $u \in [0, 2\pi]$
(Kreis am oberen Rand des Zylindermantels).

- (d) Die alternative Parameterdarstellung des Zylindermantels S mit Radius $R > 0$ und Höhe $H > 0$

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, H]}_{=\bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) = \begin{bmatrix} R \sin(u) \\ R \cos(u) \\ v \end{bmatrix},$$

hat die folgenden Randpunkte:

- $(0, R, v)$ mit $v \in [0, H]$ (eine Mantellinie),
- $(R \sin(u), R \cos(u), 0)$ mit $u \in [0, 2\pi]$
(Kreis am unteren Rand des Zylindermantels),
- $(R \sin(u), R \cos(u), H)$ mit $u \in [0, 2\pi]$
(Kreis am oberen Rand des Zylindermantels).

An den Parameterdarstellungen des Zylindermantels in Beispiel (c) und (d) sieht man, dass die Mantellinie sich mit der Wahl der Parameterdarstellung ändert. Die Mantellinie ist (bis auf ihre beiden Endpunkte) eine „künstliche“ Randlinie, in dem Sinne, dass das geometrische Gebilde dort keine anschaulichen Randpunkte hat. Die Randpunkte auf den Kreisen an den beiden Enden des Zylinders sind dagegen „echte“ Randpunkte. Diese bleiben immer Randpunkte, egal wie die Parameterdarstellung gewählt wird.

Wir weisen darauf hin, dass die Menge ∂U der Randpunkte der Jordan-messbaren Menge U in Definition 22.25 immer eine Nullmenge ist. Daraus folgt, dass auch die Menge der Randpunkte des Flächenstücks S eine Nullmenge ist.

Nun können wir eine Fläche definieren.

Definition 22.27. (Fläche)

Eine Teilmenge S von \mathbb{R}^3 heißt eine **Fläche**, wenn S sich als Vereinigung endlich vieler glatter Flächenstücke S_1, S_2, \dots, S_N schreiben lässt, wobei je zwei dieser glatten Flächenstücke höchstens Randpunkte gemeinsam haben dürfen.

Wir schreiben dann: $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_N$.

Natürlich ist mit der obigen Definition auch jedes Flächenstück selber eine Fläche. Die Definition erlaubt uns aber auch Gebilde, die nicht als ein einziges glattes Flächenstück darstellbar sind, als Vereinigung von Flächenstücken zu schreiben.

Betrachten wir auch hierzu einige Beispiele.

Beispiel 22.28. (Flächen)

- (a) Der **Rand eines Quaders** im \mathbb{R}^3 ist eine Fläche: Er lässt sich als Vereinigung der sechs Rechteckflächenstücke des Randes darstellen.
- (b) Der **Rand eines Zylinders** ist eine Fläche in \mathbb{R}^3 . Er lässt sich als Vereinigung der Zylindermantelfläche und der Kreisflächen des Zylinderbodens und Zylinderdeckels darstellen.
- (c) Es gibt auch „pathologische“ Beispiele:
 - Ein einfaches „pathologisches“ Beispiel sind drei Rechteckflächen, die alle an einer gemeinsamen Kante zusammenstoßen.
 - Definition 22.27 lässt zu, dass die Flächenstücke keine gemeinsamen Randpunkte haben, d.h. eine Fläche könnte aus disjunkten Flächenstücken bestehen, die sich nicht berühren. Solche Flächen sind in der Regel nicht von Interesse. Der Normalfall ist (wie im Beispiel des Randes eines Quaders oder Zylinders), dass sich die Flächenstücke in „echten“ Randpunkte berühren und dort zu einem komplizierteren Gebilde zusammengefügt sind, das sich nicht mit einer einzigen Parameterdarstellung als glattes Flächenstück darstellen lässt.

Integralsätze

Wir starten mit einer Motivation aus der Physik und der Elektrotechnik.

Physikalische Anwendung 23.1. (elektrische Flussdichte, Gesamtladung)

Aus der GET A ist bekannt: Das Oberflächenintegral der **elektrischen Flussdichte** $\vec{\mathbf{D}}$ über eine geschlossene Fläche A entspricht der im umschlossenen Volumen V enthaltenen **Gesamtladung**. In Formeln:

$$\int_A \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_V \varrho dV, \quad (23.1)$$

wobei $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \varrho$ die **Ladungsdichte** ist.

Ersetzen wir in (23.1) $\varrho = \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}}$ und $A = \partial V$, weil A der Rand von V ist, so erhalten wir

$$\int_{\partial V} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_V (\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}}) dV, \quad (23.2)$$

wobei wir in der HM C normalerweise $d\vec{\mathcal{O}}$ statt $d\vec{\mathbf{A}}$ für das vektorielle Oberflächenelement schreiben und $d(x, y, z)$ statt dV , also

$$\int_{\partial V} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \int_V (\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}})(x, y, z) d(x, y, z), \quad (23.3)$$

(23.2) und (23.3) ist der **Integralsatz von Gauß für \mathbb{R}^3** in seiner üblichen Form.

Was bedeutet der Integralsatz von Gauß physikalisch?

Auf der rechten Seite integrieren wir die **Ladungsdichte** $\rho = \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}}$ über das Volumen V , und **bestimmen somit, welche Gesamtladung in V vorhanden ist**. Ist die Ladungsdichte $\rho = \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = 0$, so ist die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ quellenfrei, und es sind keine Ladungen in V enthalten. Ladungen sind also (je nach Vorzeichen) als elektromagnetische Quellen bzw. Senken aufzufassen.

Auf der linken Seite integrieren wir die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ über den Rand ∂V des Volumens (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes). Die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ beschreibt die Dichte der elektrischen Feldlinien (in Bezug auf eine Fläche, hier also im Bezug auf die Randfläche ∂V). Das Integral

$$\int_{\partial V} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{d\mathcal{O}} = \int_{\partial V} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{N}} d\sigma$$

misst also den elektrischen Fluss durch die Randfläche ∂V . Dieser hängt natürlich davon ab, ob im Volumen V Ladungen vorhanden sind oder nicht und wie diese in dem Volumen verteilt sind. Ist die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ quellenfrei, also wenn $\rho = \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = 0$ ist (d.h. in V sind keine Quellen bzw. Senken, d.h. keine Ladungen, vorhanden), so muss auch der elektrische Fluss durch die Oberfläche null sein.

Satz von Gauß: Der elektrische Fluss durch die Oberfläche des Volumens wird bestimmt durch die elektrische Flussdichte, welche die Ladungen (= Quellen bzw. Senken) in dem Volumen hervorbringen.

Formale Merkhilfe: Wir beobachten, dass in (23.2) und (23.3) „auf einer rein formalen“ Ebene das ∂ im Rand ∂V hinter das Integral wandert und zu der „Differentiation“ in $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}}$ wird.

In gewisser Weise haben wir einen solchen Satz auch schon in der HM A gesehen, nämlich im **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\left[f(x) \right]_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx. \quad (23.4)$$

Links wird die Funktion f auf dem Rand $\partial[a, b] = \{a, b\}$ ausgewertet, und rechts „wandert“ das ∂ im Rand $\partial[a, b]$ hinter das Integral und wird die Ableitung in f' .

Lernt man Vektoranalysis mit Differentialformen, so kann man in der Tat das „Wandern“ des ∂ vom Rand ∂V des Volumens V hinter das Integral als Ableitung in einer einheitlichen mathematisch konsistenten Notation beschreiben. Dieses ist allerdings Material, das mehr mathematische Kenntnisse erfordert, als sie in diesem Kurs behandelt werden können.

In diesem Kapitel gehen wir schrittweise vor: Zunächst lernen wir Integralsätze in der Ebene kennen. Dann gehen wir von zwei auf drei Dimensionen über und lernen den Satz von Gauß im \mathbb{R}^3 kennen und betrachten einige Anwendung. Danach lernen wir den Integralsatz von Stokes kennen und betrachten anschließend ebenfalls Anwendungen desselben.

23.1 Integralsätze in der Ebene

In diesem Teilkapitel lernen wir den Greenschen Satz zunächst für Normalbereiche in der Ebene und dann für allgemeinere Bereiche kennen. Danach beweisen wir den Gaußschen Integralsatz im \mathbb{R}^2 und folgern daraus zum Schluss noch die Greenschen Formeln für die Ebene. Wie immer betrachten wir diverse Beispiele, um uns die neuen mathematischen Inhalte an konkreten Beispielen klar zu machen.

Wir beginnen mit einigen **Vorüberlegungen, um den Greenschen Satz zunächst für Normalbereiche herzuleiten:**

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und $u, v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $u(x) < v(x)$ für alle $x \in]\alpha, \beta[$. Wir betrachten den xy -Normalbereich

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

und parametrisieren den Rand ∂M von M durch einen geschlossenen stückweisen \mathcal{C}^1 -Weg $\vec{\gamma}$, und zwar so, dass ∂M genau einmal durchlaufen wird und M dabei immer links von $\vec{\gamma}$ liegt:

$$\vec{\gamma} := \vec{\gamma}_1 \oplus \vec{\gamma}_2 \oplus (\vec{\gamma}_3)_- \oplus (\vec{\gamma}_4)_-$$

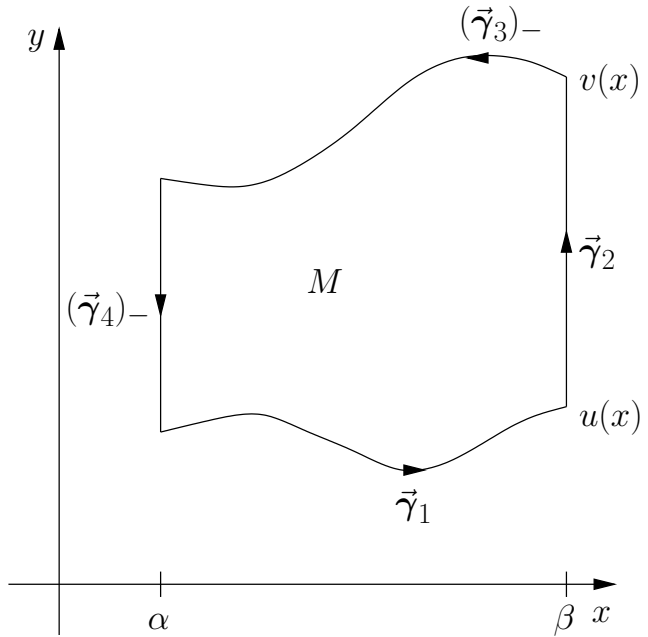
mit den Wegen

$$\vec{\gamma}_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_1(t) := \begin{bmatrix} t \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_2 : [u(\beta), v(\beta)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_2(t) := \begin{bmatrix} \beta \\ t \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_3 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_3(t) := \begin{bmatrix} t \\ v(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\gamma}_4 : [u(\alpha), v(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}_4(t) := \begin{bmatrix} \alpha \\ t \end{bmatrix}.$$



$\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_4$ sind dann glatte \mathcal{C}^1 -Wege. Statt $\oint_{\vec{\gamma}}$ schreiben wir auch $\oint_{\partial M}$.

Sei M der xy -Normalbereich, dessen Rand wir eben parametrisiert haben. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $M \subseteq U$, und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} &= \int_{\vec{\gamma}_1} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} + \int_{\vec{\gamma}_2} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} + \int_{(\vec{\gamma}_3)^-} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} + \int_{(\vec{\gamma}_4)^-} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\begin{bmatrix} f(t, u(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u'(t) \end{bmatrix}}_{= f(t, u(t)) + 0} dt + \int_{u(\beta)}^{v(\beta)} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\beta, t) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= 0 + 0 = 0} dt \\ &\quad - \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\begin{bmatrix} f(t, v(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v'(t) \end{bmatrix}}_{= f(t, v(t)) + 0} dt - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\alpha, t) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= 0 + 0 = 0} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] dt. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \int_M (\partial_y f)(x, y) d(x, y) &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{u(x)}^{v(x)} (\partial_y f)(x, y) dy dx = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x, y)]_{y=u(x)}^{y=v(x)} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [f(x, v(x)) - f(x, u(x))] dx = - \int_{\alpha}^{\beta} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] dt, \end{aligned} \quad (23.6)$$

wobei wir in der ersten Zeile den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe (23.4)) genutzt haben.

Einsetzen von (23.6) in (23.5) liefert:

$$\oint_{\partial M} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = - \int_M (\partial_y f)(x, y) \, d(x, y). \quad (23.7)$$

Für den nachfolgenden Satz setzen wir zunächst voraus, dass sich $M \subseteq \mathbb{R}^2$ in der in den Vorüberlegungen beschriebenen Form **sowohl** als xy -Normalbereich **als auch** als yx -Normalbereich schreiben lässt.

Satz 23.2. (Greenscher Satz in der Ebene für xy - und yx -Normalbereiche)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sowohl ein xy - als auch ein yx -Normalbereich. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $M \subseteq U$, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_M (\partial_x g - \partial_y f)(x, y) \, d(x, y) = \oint_{\partial M} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s}. \quad (23.8)$$

Der Rand ∂M wird dabei so parametrisiert, dass M **links** liegt.

Beweis von Satz 23.2: Da M ein xy -Normalbereich ist, folgt aus unseren Vorüberlegungen mit (23.7)

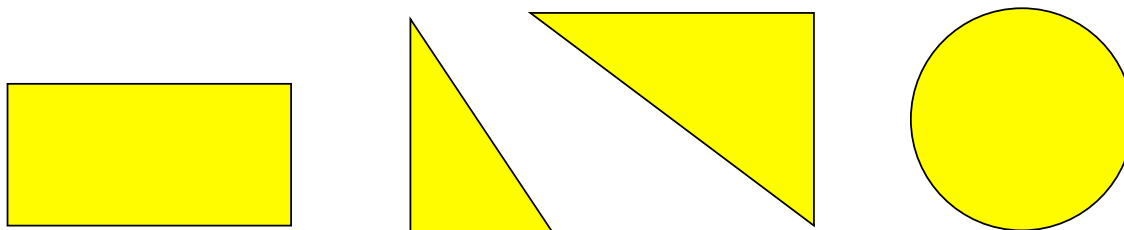
$$\oint_{\partial M} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = - \int_M (\partial_y f)(x, y) \, d(x, y). \quad (23.9)$$

Ähnlich zeigt man

$$\oint_{\partial M} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \int_M (\partial_x g)(x, y) \, d(x, y). \quad (23.10)$$

Aufsummieren von (23.9) und (23.10) liefert (23.8). □

Beispiele für Bereiche, die sowohl xy - wie auch yx -Normalbereiche sind, sind achsenparallele Rechtecke oder rechtwinkelige Dreiecke, bei denen die beiden Seiten mit rechten Winkel zueinander jeweils achsenparallel sind. Kreisscheiben sind ebenfalls xy - und yx -Normalbereiche.



Betrachten wir zwei Beispiele

Beispiel 23.3. (Greenscher Satz für xy - und yx -Normalbereiche)

(a) Seien $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &:= y e^{xy} + x \cos(x^2), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &:= x e^{xy} - 3 y^3 \sin(y^4). \end{aligned}$$

Dann gilt nach dem Greenschen Satz für xy - und yx -Normalbereiche

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} &= \int_M \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\ &= \int_M \left[(e^{xy} + x y e^{xy} - 0) - (e^{xy} + x y e^{xy} + 0) \right] d(x, y) \\ &= \int_M 0 d(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral ist viel einfacher zu berechnen als das Kurvenintegral auf der linken Seite des Greenschen Satzes.

(b) Seien $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} x\}$ und

$$\begin{aligned} f :]-1, \infty[\times]-\infty, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &:= x^2 y^3 - y^3 + x \ln(x+1), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &:= x^3 y^2 + x^2 - y^3 e^{y^4}. \end{aligned}$$

Dann gilt nach dem Greenschen Satz für xy - und yx -Normalbereiche

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} &= \int_M \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\ &= \int_M \left[(3 x^2 y^2 + 2 x - 0) - (3 x^2 y^2 - 3 y^2 + 0) \right] d(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M [2x + 3y^2] d(x, y) = \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} [2x + 3y^2] dy dx \\
&= \int_0^2 [2xy + y^3]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}x} dx = \int_0^2 \left[x^2 + \frac{1}{8}x^3 \right] dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{32}x^4 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3} + \frac{16}{32} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2} = \frac{19}{6}.
\end{aligned}$$

Um den Greenschen Satz auf allgemeinere Bereiche auszudehnen, müssen wir erst definieren, was für Bereiche wir betrachten.

Definition 23.4. (Bereich in \mathbb{R}^2 mit stückweise glattem Rand)

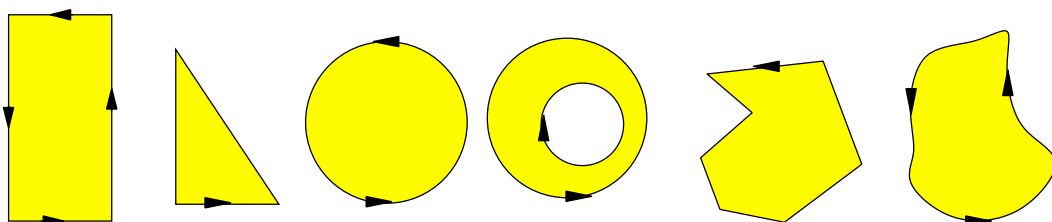
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, nichtleer und beschränkt. $G := \bar{B}$ heißt ein **Bereich mit stückweise glattem Rand**, falls ∂G sich durch endlich viele geschlossene, stückweise glatte Wege parametrisieren lässt.

Zum Beispiel haben Kreise, Ellipsen, Polygone (= Vielecke) und ebenso Kreisringe einen stückweise glatten Rand.

Bemerkung 23.5. (Bereich mit stückweise glattem Rand)

Sei G ein Bereich mit stückweise glattem Rand.

- (1) Der Rand ∂G von G ist eine **Jordansche Nullmenge**. Also ist G **Jordan-messbar**.
- (2) Für die Parametrisierungen von ∂G gilt die folgende **Konvention**: ∂G wird **genau einmal** durchlaufen. Die Durchlaufrichtung ist dabei immer so gewählt, dass G **stets links** liegt (siehe Bilder unten).



Man kann zeigen, dass der Greensche Satz nicht nur für xy - und yx -Normalbereiche sondern auch für Bereiche mit stückweise glattem Rand gilt.

Satz 23.6. (Greensche Satz in der Ebene)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand, und seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $G \subseteq U$ und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_G (\partial_x g - \partial_y f)(x, y) \, d(x, y) = \oint_{\partial G} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds}. \quad (23.11)$$

Der Rand ∂G wird dabei so parametrisiert, dass G **links** liegt.

Warum ist der Greensche Satz interessant?

Möchten wir ein Kurvenintegral eines Vektorfeldes über einen stückweise glatten geschlossenen Weg $\vec{\gamma}$ in \mathbb{R}^2 ausrechnen, also

$$\oint_{\vec{\gamma}} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds},$$

so können wir nach dem Greenschen Satz statt dessen das Flächenintegral

$$\int_G (\partial_x g - \partial_y f)(x, y) \, d(x, y)$$

des Skalarfelds $\partial_x g - \partial_y f$ über die von $\vec{\gamma}$ berandete beschränkte Fläche G berechnen. Dieses Integral ist häufig einfacher zu berechnen, insbesondere dann, wenn das Skalarfeld $\partial_x g - \partial_y f$ eine einfache Struktur hat.

Dabei müssen wir aber mit der **Orientierung des Randes** ∂G aufpassen: Durchläuft $\vec{\gamma}$ den Rand ∂G genau einmal und liegt G links von $\vec{\gamma}$, so parametrisiert $\vec{\gamma}$ den Rand ∂G . Liegt G dagegen rechts von $\vec{\gamma}$, so parametrisiert der Rückweg $\vec{\gamma}_-$ den Rand ∂G .

Ist $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ **konservativ**, so sind nach Folgerung 19.15 alle Kurvenintegrale von $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ längs eines geschlossenen Weges null, d.h. die rechte Seite in (23.11) ist null.

Ist $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ **konservativ** so gilt andererseits auch die Integrabilitätsbedingung aus Satz 19.21, also $\partial_x g = \partial_y f$, und die linke Seite in (23.11) ist ebenfalls null.

Beispiel 23.7. (Greenscher Satz)

- (a) Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 1. Seien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &:= \sqrt{1+x^2} - y e^{xy} + 3y, \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &:= x^2 - x e^{xy} + \ln(1+y^4). \end{aligned}$$

Dann gilt nach dem Greenschen Satz

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} &= \int_G \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\ &= \int_G \left[(2x - e^{xy} - xy e^{xy}) - (-e^{xy} - xy e^{xy} + 3) \right] d(x, y) \\ &= \int_G [2x - 3] d(x, y) \stackrel{\text{(PK)}}{=} \int_{G_{\text{PK}}} (2\rho \cos(\phi) - 3) \rho d(\rho, \phi) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho^2 \cos(\phi) - 3\rho) d\phi d\rho = \int_0^1 \left[2\rho^2 \sin(\phi) - 3\rho\phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\rho \\ &= \int_0^1 \left([2\rho^2 \sin(2\pi) - 3\rho 2\pi] - [2\rho^2 \sin(0) - 0] \right) d\rho \\ &= \int_0^1 -6\pi \rho d\rho = \left[-3\pi \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = -3\pi, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile zu Polarkoordinaten (PK)

$$x = \rho \cos(\phi), \quad y = \rho \sin(\phi), \quad d(x, y) = \rho d(\rho, \phi)$$

übergegangen sind und genutzt haben, dass

$$G_{\text{PK}} = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi\}.$$

Hätten wir statt des Flächenintegrals das Wegintegral berechnet, so wäre dieses deutlich aufwendiger gewesen.

- (b) Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } y \geq 0\}$ die „obere Hälfte“ eines Kreisrings um $(0, 0)$ mit Innenradius 1 und Außenradius 2. Seien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &:= \sin(x) + x y^2 - y^2, \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &:= \cos(y) + y x^2 + \ln(y^6 + y^4 + 2). \end{aligned}$$

Dann gilt nach dem Greenschen Satz

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial G} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} &= \int_G \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\
 &= \int_G \left[(2xy) - (2xy - 2y) \right] d(x, y) \\
 &= \int_G 2y d(x, y) \stackrel{\text{(PK)}}{=} \int_{G_{\text{PK}}} 2\rho \sin(\phi) \rho d(\rho, \phi) \\
 &= \int_1^2 \int_0^\pi 2\rho^2 \sin(\phi) d\phi d\rho = \left(\int_1^2 2\rho^2 d\rho \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \right) \\
 &= \left[\frac{2}{3} \rho^3 \right]_{\rho=1}^{\rho=2} \cdot \left[-\cos(\phi) \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \left[\frac{2}{3}(8-1) \right] \cdot [-(-1) - (-1)] = \frac{28}{3},
 \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile in Polarkoordinaten (PK)

$$x = \rho \cos(\phi), \quad y = \rho \sin(\phi), \quad d(x, y) = \rho d(\rho, \phi)$$

transformiert haben und genutzt haben, dass gilt

$$G_{\text{PK}} = \{(\rho, \phi) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi\} = [1, 2] \times [0, \pi].$$

In der nachfolgenden Bemerkung treffen wir wichtige Vorbereitungen für die Einführung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene.

Bemerkung 23.8. (äußeres Einheitsnormalenvektorfeld)

Sei nun $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand, und sei

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

einer der endlich vielen glatten \mathcal{C}^1 -Wege, aus denen ∂G zusammengesetzt ist. ($\vec{\gamma}$ werde so durchlaufen, dass G stets links liegt.) Dann heißt

$$\vec{N}(\vec{\gamma}(t)) := \frac{1}{|\vec{\gamma}'(t)|} \begin{bmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

der **äußere Einheitsnormalenvektor an G im Punkt $\vec{\gamma}(t) \in \partial G$.**

Dann ist \vec{N} für alle bis auf höchstens endlich viele Punkte von ∂G definiert.

\vec{N} heißt das **äußere Einheitsnormalenvektorfeld an G .**

Satz 23.9. (Gaußscher Integralsatz (Divergenzsatz) in der Ebene)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $G \subseteq U$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand. Dann gilt:

$$\int_G (\operatorname{div} \vec{F})(x, y) \, d(x, y) = \oint_{\partial G} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, ds, \quad (23.12)$$

wobei \vec{N} das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an G ist.

Was bedeutet der Gaußsche Integralsatz in der Ebene?

Die Anschauung ist analog zum Fall des Gaußschen Integralsatzes in \mathbb{R}^3 , den wir am Anfang dieses Kapitels betrachtet haben. Der Einfachheit halber geben wir hier eine Erklärung mit einer ebenen Flüssigkeitsströmung, denn man kann sich dieses einfacher vorstellen. Stellen wir uns vor, dass in der Ebene eine Flüssigkeit fließt, wobei das Geschwindigkeitsfeld $\vec{F}(x, y)$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen im Punkt (x, y) der Ebene beschreibt. Ist $\vec{\gamma}$ ein glatter Weg, der ein Stück des Randes ∂G eines Bereichs G mit stückweise glattem Rand parametrisiert, so misst $\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{N}(\vec{\gamma}(t))$ die Geschwindigkeitskomponente im Randpunkt $(\vec{\gamma}(t))$ senkrecht zum Rand. Also misst

$$\int_{\partial G} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, ds$$

die in G pro Zeiteinheit heraus- bzw. hereinfließende Flüssigkeitsmenge. Ob wir in der Bilanz eine heraus- oder hereinfließende Flüssigkeitsmenge haben, wird durch das Vorzeichen des Wertes des Kurvenintegrals bestimmt. Hat der Wert des Kurvenintegrals ein positives Vorzeichen, so liegt in der Bilanz eine herausfließende Flüssigkeitsmenge vor. Hat der Wert des Kurvenintegrals ein negatives Vorzeichen, so liegt in der Bilanz eine hereinfließende Flüssigkeitsmenge vor. Ist der Wert des Kurvenintegrals null, so bleibt die Flüssigkeitsmenge in G gleich.

Die Divergenz $(\operatorname{div} \vec{F})(x, y)$ des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{F}(x, y)$ beschreibt, ob im Punkt (x, y) eine Quelle oder eine Senke oder keines von beiden vorliegt. Genauer:

Ist $(\operatorname{div} \vec{F})(x, y) > 0$, so liegt in (x, y) eine Quelle vor; ist $(\operatorname{div} \vec{F})(x, y) < 0$, so liegt in (x, y) eine Senke vor; und ist $(\operatorname{div} \vec{F})(x, y) = 0$, so liegt in (x, y) weder eine Quelle noch eine Senke vor.

Dabei sind Quellen im üblichen Sinne zu verstehen, dass dort Flüssigkeit austritt. In Senken verschwindet Flüssigkeit. Scheiden die Quellen in G genauso viel

Flüssigkeit aus, wie in den Senken in G verschwindet, so verändert sich die Flüssigkeitsmenge in G nicht, und das Flächenintegral

$$\int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y) \quad (23.13)$$

muss null sein. In diesem Fall muss aber auch

$$\int_{\partial G} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds \quad (23.14)$$

null sein, denn in der Bilanz über den gesamten Rand ∂G tritt aus G weder eine Flüssigkeitsmenge heraus noch strömt in G eine Flüssigkeitsmenge hinein. Liegen in G Quellen und/oder Senken vor und strömt beispielsweise aus den Quellen mehr Flüssigkeit heraus als in den Senken verschwindet, so ist der Wert des Flächenintegrals (23.13) positiv und (23.14) misst die durch den Rand von G austretende Flüssigkeitsmenge.

Betrachten wir zwei Beispiele für die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (Divergenzsatzes) in der Ebene.

Beispiel 23.10. (Gaußscher Integralsatz in der Ebene)

(a) Gesucht ist der Fluss der Vektorfeldes

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) := \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix},$$

durch den Rand des Rechtecks

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\},$$

also

$$\int_{\partial Q} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds.$$

Dieses Kurvenintegral direkt zu berechnen ist wegen der vier glatten Kurvenstücke, die zur Parametrisierung von ∂Q benötigt werden, ziemlich mühselig. Wir nutzen daher den Gaußschen Integralsatz für die Ebene:

$$\int_{\partial Q} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds = \int_Q (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y)$$

Mit $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) = (\partial_1 F_1)(x, y) + (\partial_2 F_2)(x, y) = 2x + 2y$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_Q (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^2 \int_0^1 (2x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left[2xy + y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 [2x + 1] \, dx = \left[x^2 + x \right]_{x=0}^{x=2} = 6. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{\partial Q} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds = \int_Q (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y) = 6.$$

Macht das Ergebnis unserer Anschauung nach Sinn? – Aufgrund der Struktur des Vektorfeldes und der Lage des Rechtecks Q ist es plausibel, dass $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ positiv ist, also das Flüssigkeit aus dem Volumen herausströmt. Der positive Wert für das Integral stimmt also mit unserer Anschauung überein.

(b) Gesucht ist der Wert des Integrals

$$\int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y)$$

für das Vektorfeld

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y) := \begin{bmatrix} \exp(xy) y \\ -\exp(xy) x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{xy} y \\ -e^{xy} x \end{bmatrix},$$

und das Gebiet $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, welches ein Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 1 ist. Wir wissen nach dem Gaußschen Integralsatz in der Ebene, dass

$$\int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial G} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds$$

Der Rand ∂G kann mit dem Weg

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

parametrisiert werden, und

$$\vec{\mathbf{N}}(\vec{\gamma}(t)) = \frac{1}{|\vec{\gamma}'(t)|} \begin{bmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -(-\sin(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Damit finden wir

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\mathbf{N}}(\vec{\gamma}(t)) \begin{bmatrix} \exp(\cos(t) \sin(t)) \sin(t) \\ -\exp(\cos(t) \sin(t)) \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y) \, d(x, y) &= \int_{\partial G} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\mathbf{N}}(\vec{\gamma}(t))}_{=0} |\vec{\gamma}'(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0. \end{aligned}$$

Versucht man das gesuchte Integral dagegen direkt ohne den Gaußschen Integralsatz in der Ebene zu berechnen, so stößt man auf Schwierigkeiten, da das Integral schwer zu berechnen ist.

Beweis von Satz 23.9: Sei

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ein glatter Weg, der ein Stück von ∂G parametrisiert, wobei sich G links vom Weg $\vec{\gamma}$ befindet. Dann gilt

$$\vec{\mathbf{N}}(\vec{\gamma}(t)) := \frac{1}{|\vec{\gamma}'(t)|} \begin{bmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{bmatrix},$$

und mit $\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \, ds &= \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\mathbf{N}}(\vec{\gamma}(t)) |\vec{\gamma}'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{|\vec{\gamma}'(t)|} \begin{bmatrix} F_1(\vec{\gamma}(t)) \\ F_2(\vec{\gamma}(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{bmatrix} |\vec{\gamma}'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(\vec{\gamma}(t)) \\ F_2(\vec{\gamma}(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{bmatrix}}_{= F_1(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) - F_2(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t)} \, dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \underbrace{\begin{bmatrix} -F_2(\vec{\gamma}(t)) \\ F_1(\vec{\gamma}(t)) \end{bmatrix}}_{=-F_2(\vec{\gamma}(t))\gamma'_1(t)+F_1(\vec{\gamma}(t))\gamma'_2(t)} \cdot \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{bmatrix} dt = \int_{\vec{\gamma}} \begin{bmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds}.$$

Durch Aufsummieren der Integrale über alle Teilwege der Parametrisierung von ∂G erhält man also

$$\int_{\partial G} (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds = \int_{\partial G} \begin{bmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds}. \quad (23.15)$$

Durch Anwenden des Greenschen Satzes für das Kurvenintegral auf der rechten Seite von (23.15) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \begin{bmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} &= \int_G [(\partial_x F_1)(x, y) - (\partial_y (-F_2))(x, y)] d(x, y) \\ &= \int_G [(\partial_1 F_1)(x, y) + (\partial_2 F_2)(x, y)] d(x, y) \\ &= \int_G (\operatorname{div} \vec{F})(x, y) d(x, y). \end{aligned} \quad (23.16)$$

Einsetzen von (23.16) in (23.15) liefert (23.12). \square

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene kann man relativ leicht die Greenschen Formeln für die Ebene herleiten.

Satz 23.11. (Greensche Formeln für die Ebene ($n = 2$))

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $G \subseteq U$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand, und seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gelten:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_G [f(\Delta g) + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] d(x, y) = \oint_{\partial G} (f(\nabla g)) \cdot \vec{N} ds \\ (2) \quad & \int_G [f(\Delta g) - g(\Delta f)] d(x, y) = \oint_{\partial G} (f(\nabla g) - g(\nabla f)) \cdot \vec{N} ds \end{aligned}$$

Beweis von Satz 23.11: Die Greenschen Formeln beweisen wir in einer Übungsaufgabe. \square

23.2 Der Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^3

Analog zu der Situation in der Ebene starten wir mit geeigneten Normalbereichen.

Definition 23.12. (*z- bzw. x- bzw. y-normales Volumen in \mathbb{R}^3*)

Sei

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, s(x, y) \leq z \leq t(x, y)\},$$

wobei

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand ist,
- Ω eine offene Menge ist mit $A \subseteq \Omega$ und
- $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind mit $s(x, y) < t(x, y)$ für alle $(x, y) \in \overset{\circ}{A}$.

Dann heißt das Volumen M *z-normal*.

Analog definiert man *x-normal* und *y-normal*.

Der Rand ∂M eines *x*-, *y*- oder *z*-normalen Volumens M besteht dann aus endlich vielen glatten Flächenstücken und ist somit eine Fläche. Wir wählen die Parametrisierungen der Flächenstücke so, dass das **Einheitsnormalenvektorfeld**

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

stets nach außen zeigt, d.h. $\vec{\mathbf{N}}$ ist das **äußere Einheitsnormalenvektorfeld von M** .

Wir wollen den Gaußschen Integralsatz zunächst für *x*-, *y*- bzw. *z*-normale Volumina formulieren. Dazu beweisen wir zunächst einen Hilfssatz.

Hilfssatz 23.13. (für den Beweis des Gaußschen Integralsatzes)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $M \subseteq U$ z -normal, so gilt

$$\int_M (\partial_3 f)(x, y, z) \, d(x, y, z) = \oint_{\partial M} f N_3 \, d\sigma.$$

(N_3 ist die dritte Komponente des äußeren Einheitsnormalenvektorfelds \vec{N} .)

Beweis von Hilfssatz 23.13: Wir zerlegen den Rand von M in geeignete Flächenstücke, also $\partial M = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ mit

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial A, s(x, y) \leq z \leq t(x, y)\}, \quad (\text{„Mantel“})$$

$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = t(x, y)\}, \quad (\text{„Deckel“})$$

$$S_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = s(x, y)\}, \quad (\text{„Boden“})$$

und parametrisieren S_1, S_2 und S_3 so, dass das Einheitsnormalenvektorfeld jeweils nach außen zeigt. Dann gilt

$$\oint_{\partial M} f N_3 \, d\sigma = \int_{S_1} f N_3 \, d\sigma + \int_{S_2} f N_3 \, d\sigma + \int_{S_3} f N_3 \, d\sigma.$$

Wir betrachten nun die Integrale über die drei Flächenstücke S_1, S_2, S_3 nacheinander.

(1) Auf S_1 gilt $N_3 = 0$, d.h.

$$\int_{S_1} f N_3 \, d\sigma = 0. \quad (23.17)$$

(2) Wir parametrisieren S_2 durch

$$\vec{X}_2(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ t(u, v) \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in A.$$

Dann gilt

$$(\partial_u \vec{X}_2) \times (\partial_v \vec{X}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_u t \\ -\partial_v t \\ 1 \end{bmatrix} \implies \text{Rang}(\partial \vec{X}_2) = 2$$

$$\text{und } \vec{N} = \frac{(\partial_u \vec{X}_2) \times (\partial_v \vec{X}_2)}{|(\partial_u \vec{X}_2) \times (\partial_v \vec{X}_2)|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_u t)^2 + (\partial_v t)^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\partial_u t \\ -\partial_v t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da die z -Komponente positiv ist, zeigt das Einheitsnormalenvektorfeld nach außen. Also finden wir mit $N_3 = 1/\sqrt{(\partial_u t)^2 + (\partial_v t)^2 + 1}$

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} f N_3 d\sigma \\ &= \int_A f(u, v, t(u, v)) \frac{1}{\sqrt{(\partial_u t)^2 + (\partial_v t)^2 + 1}} \underbrace{\sqrt{(\partial_u t)^2 + (\partial_v t)^2 + 1} dt}_{=d\sigma} \\ &= \int_A f(u, v, t(u, v)) d(u, v). \end{aligned} \quad (23.18)$$

- (3) S_3 könnte man wie S_2 parametrisieren. Dann zeigt das Einheitsnormalenvektorfeld aber nach innen. Also vertauschen wir die Rollen von u und v .

$$\vec{X}_3(u, v) = \begin{bmatrix} v \\ u \\ s(v, u) \end{bmatrix}, \quad (v, u) \in A.$$

Dann gilt

$$(\partial_u \vec{X}_3) \times (\partial_v \vec{X}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_u s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_v s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_v s \\ \partial_u s \\ -1 \end{bmatrix} \implies \text{Rang}(\partial \vec{X}_3) = 2$$

$$\text{und } \vec{N} = \frac{(\partial_u \vec{X}_3) \times (\partial_v \vec{X}_3)}{|(\partial_u \vec{X}_3) \times (\partial_v \vec{X}_3)|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_v s)^2 + (\partial_u s)^2 + 1}} \begin{bmatrix} \partial_v s \\ \partial_u s \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da die z -Komponente negativ ist, zeigt das Einheitsnormalenvektorfeld nach außen. Also finden wir mit $N_3 = 1/\sqrt{(\partial_v s)^2 + (\partial_u s)^2 + 1}$

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} f N_3 d\sigma \\ &= \int_A f(v, u, s(v, u)) \frac{-1}{\sqrt{(\partial_v s)^2 + (\partial_u s)^2 + 1}} \underbrace{\sqrt{(\partial_v s)^2 + (\partial_u s)^2 + 1} dt}_{=d\sigma} \end{aligned}$$

$$= - \int_A f(v, u, s(v, u)) \, d(v, u) = - \int_A f(u, v, s(u, v)) \, d(u, v), \quad (23.19)$$

wobei wir im letzten Schritt nur die Namen der Variablen u und v getauscht haben.

Zusammengenommen ergibt sich aus (23.17), (23.18) und (23.19) mit der Umbenennung $x = u$ und $y = v$ also

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} f N_3 \, d\sigma &= \int_A \left[f(x, y, t(x, y)) - f(x, y, s(x, y)) \right] \, d(x, y) \\ &\stackrel{(23.4)}{=} \int_A \int_{s(x, y)}^{t(x, y)} (\partial_3 f)(x, y, z) \, dz \, d(x, y) \\ &= \int_M (\partial_3 f)(x, y, z) \, d(x, y, z), \end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist. □

Als Folgerung aus dem Hilfssatz erhält man nun den Gaußschen Integralsatz im Raum für Normalbereiche.

Satz 23.14. (Gaußscher Integralsatz im Raum für Normalbereiche)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{\mathbf{F}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Ist $M \subseteq U$ sowohl x -, y - als auch z -normal, so gilt:

$$\int_M (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z) = \oint_{\partial M} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathcal{O}}, \quad (23.20)$$

wobei $\vec{d\mathcal{O}}$ mit dem **äußeren Einheitsnormalenvektorfeld an M** berechnet wird. (Da der Rand ∂M von M eine geschlossene Fläche ohne Rand ist, schreiben wir bei dem Integral über ∂M auch \oint statt \int .)

Beweis von Satz 23.14: Mit $\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$ gilt

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3. \quad (23.21)$$

Sei $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an M .

Da M z -normal ist, liefert Hilfssatz 23.13

$$\int_M (\partial_3 F_3)(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\partial M} F_3 N_3 \, d\sigma. \quad (23.22)$$

Ähnlich zeigt man, dass

$$\int_M (\partial_1 F_1)(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\partial M} F_1 N_1 \, d\sigma \quad (23.23)$$

$$\text{bzw.} \quad \int_M (\partial_2 F_2)(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\partial M} F_2 N_2 \, d\sigma, \quad (23.24)$$

wobei man verwendet, dass M x - bzw. y -normal ist. Also folgt aus (23.22), (23.23) und (23.24) durch Aufsummieren, dass

$$\begin{aligned} & \int_M (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z) \stackrel{(23.21)}{=} \int_M (\partial_1 F_1)(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ & \quad + \int_M (\partial_2 F_2)(x, y, z) \, d(x, y, z) + \int_M (\partial_3 F_3)(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ & = \int_{\partial M} F_1 N_1 \, d\sigma + \int_{\partial M} F_2 N_2 \, d\sigma + \int_{\partial M} F_3 N_3 \, d\sigma \\ & = \int_{\partial M} (F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3) \, d\sigma \\ & = \int_{\partial M} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}} \, d\sigma = \int_{\partial M} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\vec{\mathbf{N}} \, d\sigma = \overrightarrow{d\mathcal{O}}$ genutzt haben. \square

Nun formulieren wir den Gaußschen Integralsatz im Raum (allerdings dann ohne Beweis) für allgemeinere Bereiche. Als Vorbereitung müssen wir wieder definieren, was für Bereiche zulässig sind.

Definition 23.15. (Bereich in \mathbb{R}^3 mit stückweise glattem Rand)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, nichtleer und beschränkt. $G := \overline{B}$ heißt ein **Bereich mit stückweise glattem Rand**, falls ∂G eine Fläche im Sinne von Definition 22.27 ist.

Beispiele für Bereiche in \mathbb{R}^3 mit stückweise glattem Rand sind Quader, Kugeln, Kegel, Ellipsoide sowie Kugelschalen.

Bemerkung 23.16. (Bereich in \mathbb{R}^3 mit stückweise glattem Rand)

- (1) Ist G ein Bereich in \mathbb{R}^3 mit stückweise glattem Rand, so ist ∂G eine Jordansche Nullmenge. Also ist G **Jordan-messbar**.
- (2) Die Parametrisierungen der Flächenstücke vom ∂G in Definition 23.15 werden laut Konvention so gewählt, dass das **Einheitsnormalenvektorfeld nach außen** zeigt.

Nun formulieren wir den Gaußschen Integralsatz im Raum für Bereiche mit stückweise glattem Rand.

Satz 23.17. (Gaußscher Integralsatz im Raum für Bereiche mit stückweise glattem Rand)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{\mathbf{F}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Ist $G \subseteq U$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand, so gilt:

$$\int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z) = \oint_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathcal{O}}, \quad (23.25)$$

wobei $\vec{d\mathcal{O}}$ mit dem **äußeren Einheitsnormalenvektorfeld an G** berechnet wird.

Nachdem wir nun auch die Formulierung des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand kennen, betrachten wir verschiedene Beispiele.

Beispiel 23.18. (Gaußscher Integralsatz im Raum)

(a) Sei G das Rotationsparaboloid

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Dann ist G ein Bereich mit stückweise glattem Rand. Sei

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist der Oberflächenintegral

$$\oint_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}}.$$

Anstatt den Rand ∂G von G zu parametrisieren, nutzen wir den Gaußschen Integralsatz (23.25) im Raum: Es gilt

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Somit finden wir

$$\oint_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} = \int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_G 3 \, d(x, y, z) = 3 v_3(G).$$

Das Volumen des Rotationsparaboloids berechnen wir mit Zylinderkoordinaten (ZK):

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos(\phi), & y &= \varrho \sin(\phi), & z &= z, \\ d(x, y, z) &= \varrho \, d(\varrho, \phi, z) & \text{mit} & & \varrho > 0, & \phi \in [0, 2\pi[, & z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$G_{\text{ZK}} = \{(\varrho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \varrho \in]0, 1], \phi \in [0, 2\pi[, \varrho^2 \leq z \leq 1\}.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} v_3(G) &= \int_{G_{\text{ZK}}} \varrho \, d(\varrho, \phi, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\varrho^2}^1 \varrho \, dz \, d\phi \, d\varrho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\varrho z \right]_{z=\varrho^2}^{z=1} d\phi \, d\varrho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\varrho - \varrho^3) \, d\phi \, d\varrho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[(\varrho - \varrho^3) \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\varrho = \int_0^1 2\pi (\varrho - \varrho^3) d\varrho \\
&= \left[2\pi \left(\frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{4} \varrho^4 \right) \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also finden wir

$$\oint_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \int_G 3 d(x, y, z) = 3 v_3(G) = \frac{3}{2} \pi.$$

(b) Sei G die Vollkugel

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Dann ist G ein Bereich mit dem (stückweise) glatten Rand

$$\partial G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Sei

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ z^2 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen

$$\int_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathcal{O}}$$

auf zwei Arten berechnen, einmal direkt als Oberflächenintegral und einmal mit dem Gaußschen Integralsatz im Raum.

Zur direkten Berechnung parametrisieren wir die Kugeloberfläche ∂G mit Kugelkoordinaten (KK)

$$\vec{\mathbf{X}}(u, v) = \begin{bmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix}, \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi],$$

also $(\partial G)_{\text{KK}} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Dann gilt $\text{Rang}((\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2$ für alle $(u, v) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, und $\vec{\mathbf{X}}|_U$ ist injektiv (vgl. Beispiel 22.23).

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) \implies \vec{\mathbf{N}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) = \vec{\mathbf{X}}(u, v).$$

weil $|\vec{\mathbf{X}}(u, v)| = 1$ und $\sin(u) \geq 0$ für alle $(u, v) \in (\partial G)_{\text{KK}}$. Also finden wir

$$\int_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \int_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)] d(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(\partial G)_{\text{KK}}} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \sin(u) \vec{\mathbf{X}}(u, v) \, d(u, v) \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \cos^2(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix} \sin(u) \, dv \, du \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\cos(v) \sin^2(u) + 2 \sin(v) \sin^2(u) + \cos^3(u) \sin(u) \right] \, dv \, du \\
&= \int_0^\pi \left[\sin(v) \sin^2(u) - 2 \cos(v) \sin^2(u) + \cos^3(u) \sin(u) v \right]_{v=0}^{v=2\pi} \, du \\
&= \int_0^\pi \left[-2 \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} \sin^2(u) + 2\pi \cos^3(u) \sin(u) + 2 \underbrace{\cos(0)}_{=1} \sin^2(u) \right] \, du \\
&= \int_0^\pi 2\pi \cos^3(u) \sin(u) \, du = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi 4 \cos^3(u) \sin(u) \, du \\
&= \frac{\pi}{2} \left[-\cos^4(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} = \frac{\pi}{2} \left[-\cos^4(\pi) + \cos^4(0) \right] = \frac{\pi}{2} \left[-(-1)^4 + 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile bei der Berechnung des Integrals über u die Substitution

$$t = \cos(u), \quad \frac{dt}{du} = -\sin(u) \quad \Longrightarrow \quad -dt = \sin(u) \, du$$

verwendet, also

$$\begin{aligned}
\int 4 \cos^3(u) \sin(u) \, du &= \left[-\int 4 t^3 \, dt \right]_{t=\cos(u)} \\
&= \left[-t^4 + c \right]_{t=\cos(u)} = -\cos^4(u) + c.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung mit dem Gaußschen Integralsatz finden wir mit

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2z,$$

dass gilt

$$\int_{\partial G} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathcal{O}} = \int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_G 2z \, d(x, y, z).$$

Zur Berechnung des Volumenintegrals wählen wir Kugelkoordinaten (KK)

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$z = r \cos(\theta),$$

$$d(x, y, z) = r^2 \sin(\theta) d(r, \theta, \phi),$$

und

$$G_{\text{KK}} = \{(r, \theta, \phi) : r \in]0, 1], \theta \in]0, \pi[, \phi \in [0, 2\pi[\}.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \int_G 2z d(x, y, z) &= \int_{G_{\text{KK}}} 2r \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) d(r, \theta, \phi) \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) d\phi d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \left[2r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi 4\pi r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta dr \\ &= \int_0^1 \left[2\pi r^3 \sin^2(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = \int_0^1 0 dr = 0, \end{aligned}$$

weil $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$. Dabei haben wir bei der zweiten Integration genutzt, dass

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2(\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

ist, d.h. wir haben die Substitution $t = \sin(\theta)$ verwendet.

Satz 23.19. (Greensche Formeln in \mathbb{R}^3)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $G \subseteq U$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gelten

$$(1) \quad \int_G [f(\Delta g) + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] d(x, y, z) = \oint_{\partial G} (f(\nabla g)) \cdot \vec{d\mathcal{O}},$$

$$(2) \quad \int_G [f(\Delta g) - g(\Delta f)] d(x, y, z) = \oint_{\partial G} (f(\nabla g) - g(\nabla f)) \cdot \vec{d\mathcal{O}}.$$

Beweis von Satz 23.19: Dieses ist eine Übungsaufgabe. □

23.3 Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes

Wir betrachten nun eine physikalische Anwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Physikalische Anwendung 23.20. (Maxwellsche Gleichungen (Teil 1))

Es seien im Folgenden:

$\vec{\mathbf{D}}$ = elektrische Flussdichte,

$\vec{\mathbf{B}}$ = magnetische Flussdichte,

ϱ = Ladungsdichte,

G = ein Bereich in \mathbb{R}^3 mit stückweise glattem Rand.

Die **Maxwellschen Gleichungen** können unterschiedlich formuliert werden:

Wir betrachten die Maxwellschen Gleichungen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Gleichung 1:

(i) $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \varrho$ auf U , oder äquivalent dazu

(ii) $\oint_{\partial G} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} = \int_G \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z)$ für jedes $G \subseteq U$.

Gleichung 2:

(i) $\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$ auf U , oder äquivalent dazu

(ii) $\oint_{\partial G} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} = 0$ für jedes $G \subseteq U$.

Dass jeweils (ii) aus (i) folgt, ist eine **direkte Konsequenz aus dem Gaußschen Integralsatz**.

Dass umgekehrt aus (ii) auch jeweils (i) geschlossen werden kann, zeigt der nachfolgende Satz.

Satz 23.21. (Divergenz als Grenzwert)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $(x_0, y_0, z_0) \in U$ fest gewählt. Sei

$$K_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2\}$$

die Vollkugel um (x_0, y_0, z_0) mit Radius $r > 0$. Ist $\vec{\mathbf{F}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so gilt

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{\partial K_r} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dO}}. \quad (23.26)$$

Wie folgt bei den Maxwell'schen Gleichungen aus (ii) auch (i)?

Wir betrachten nur Gleichung 1. Der Nachweis für Gleichung 2 ist analog.

Um jeden Punkt (x_0, y_0, z_0) aus U können wir eine kleine Vollkugel

$$K_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2\}$$

mit Radius $r > 0$ wählen, die ganz in U liegt. (*Erklärung:* Weil U offen ist, gibt es einen offenen Ball (also eine offene Vollkugel))

$$U_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \varepsilon^2\},$$

die ganz in U liegt. Setzt man $r := \varepsilon/2$, so ist klar, dass die Vollkugel mit dem halben Radius $K_r = K_{\varepsilon/2} = \overline{U_{\varepsilon/2}(x_0, y_0, z_0)}$ ganz in U liegt.) Für K_r gilt nach (ii)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K_r} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} &= \int_{K_r} \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ \implies \frac{1}{v_3(K_r)} \oint_{\partial K_r} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} &= \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z). \end{aligned}$$

Lässt man auf beiden Seiten $r > 0$ gegen null gehen, so erhält man

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \oint_{\partial K_r} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z). \quad (23.27)$$

Nach Satz 23.21 erhalten wir für die linke Seite in (23.27)

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \oint_{\partial K_r} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} = (\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}})(x_0, y_0, z_0). \quad (23.28)$$

Das Integral

$$\frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z)$$

ist der Mittelwert von ϱ auf K_r . Für $r \searrow 0$ strebt dieses Mittelwert gegen $\varrho(x_0, y_0, z_0)$, weil die Vollkugel K_r dann auf ihren Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) zusammenschrumpft. Also gilt für die rechte Seite in (23.27)

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z) = \varrho(x_0, y_0, z_0) \quad (23.29)$$

Einsetzen von (23.28) und (23.29) in (23.27) liefert

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}})(x_0, y_0, z_0) = \varrho(x_0, y_0, z_0).$$

Da $(x_0, y_0, z_0) \in U$ beliebig gewählt war, gilt $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \varrho$ auf ganz U .

Beweisidee für Satz 23.21: Das Integral

$$\frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z)$$

können wir so interpretieren, dass der Mittelwert der Divergenz in der Vollkugel K_r ermittelt wird. Da $\vec{\mathbf{F}}$ stetig ist, so wird dieser Mittelwert gegen den Wert $(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0)$ im Mittelpunkt der Vollkugel streben, wenn der Radius r der Kugelschale gegen null strebt. Also gilt

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z).$$

Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert nun

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{K_r} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ &= \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{\partial K_r} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dO}}. \quad \square \end{aligned}$$

Wichtig ist vor allem auch die **physikalische Interpretation** von (23.26): Betrachten wir die rechte Seite vom (23.26), also

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{\partial K_r} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dO}} = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{v_3(K_r)} \int_{\partial K_r} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}} \, d\sigma$$

Dort wird $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$, also die Komponente von $\vec{\mathbf{F}}$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektorfeldes über den Rand ∂K_r der (kleinen) Kugel K_r integriert, und danach wird durch das Volumen von K_r geteilt und der Grenzwert für den Radius $r \searrow 0$ gebildet. Wir betrachten also **den (gewichteten) Fluss durch die Kugeloberfläche**. Wenn der Radius r gegen null strebt, so betrachten wir die Flüssigkeitsströmung, die aus dem Punkt (x_0, y_0, z_0) im Zentrum der Kugel austritt. Ist diese größer null, so haben wir eine **Quelle**, und ist diese kleiner null, so haben wir eine **Senke**. Dieses liefert die Motivation für die Interpretation der Divergenz.

Als Letztes lernen wir noch einen weiteren Satz kennen, der aus dem Gaußschen Integralsatz folgt.

Satz 23.22. (Folgerung aus dem Gaußschen Integralsatz im Raum)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $G \subseteq U$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand mit dem **äußeren Einheitsnormalenvektorfeld** $\vec{\mathbf{N}}$, und sei $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\oint_{\partial G} g \vec{\mathbf{N}} \, d\sigma = \int_G (\nabla g)(x, y, z) \, d(x, y, z),$$

wobei das Integral komponentenweise berechnet wird, d.h.

$$\begin{bmatrix} \oint_{\partial G} g N_1 \, d\sigma \\ \oint_{\partial G} g N_2 \, d\sigma \\ \oint_{\partial G} g N_3 \, d\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_G (\partial_x g)(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ \int_G (\partial_y g)(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ \int_G (\partial_z g)(x, y, z) \, d(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (23.30)$$

Beweis von Satz 23.22: Wir wenden den Gaußschen Integralsatz im Raum jeweils für eines der Vektorfelder

$$\vec{\mathbf{F}}_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}_1(x, y, z) := \begin{bmatrix} g(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}_2(x, y, z) := \begin{bmatrix} 0 \\ g(x, y, z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_3 : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{F}}_3(x, y, z) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(x, y, z) \end{bmatrix},$$

an. Dann gilt beispielsweise

$$(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}_1)(x, y, z) = \partial_x g(x, y, z) \quad \text{und} \quad \vec{\mathbf{F}}_1 \cdot \vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = g N_1.$$

Also liefert der Gaußsche Integralsatz im Raum

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} g N_1 \, d\sigma &= \int_{\partial G} \vec{\mathbf{F}}_1 \cdot \underbrace{\vec{\mathbf{N}} \, d\sigma}_{= \vec{d}\mathcal{O}} = \int_G (\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}_1)(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ &= \int_G (\partial_x g)(x, y, z) \, d(x, y, z), \end{aligned}$$

und wir haben die erste der drei Formeln in (23.30) bewiesen.

Die anderen beiden Formeln folgen analog. □

23.4 Der Integralsatz von Stokes

In diesem Teilkapitel lernen wir den Integralsatz von Stokes kennen, der sich am besten anhand strömender Flüssigkeiten oder Gase veranschaulichen lässt. Anschaulich besagt der Satz von Stokes das Folgende:

Satz von Stokes: Die Umströmung einer Fläche (Zirkulation genannt) resultiert aus den Wirbeln in den Punkten der Fläche.

Bevor wir den Satz mathematisch sauber formulieren können, müssen wir einige Vorbereitungen treffen:

Sei $\bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand. Dann besteht $\partial \bar{U}$ aus endlich vielen stückweise glatten geschlossenen Wegen. Sei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein solcher Weg. Er werde einmal durchlaufen, und zwar so, dass \bar{U} stets links liegt.

Sei $\vec{X} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung eines glatten Flächenstücks $S = \vec{X}(\bar{U})$, bei der $\text{Rang}(\partial\vec{X})(u, v) = 2$ für alle $(u, v) \in \bar{U}$ gelte und bei der $\vec{X}|_{\bar{U}}$ injektiv ist. Dann ist $\vec{\delta} := \vec{X} \circ \vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stückweise glatter Weg in \mathbb{R}^3 . Sind $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_m$ die geschlossenen stückweise glatten Wege, aus denen $\partial\bar{U}$ besteht, dann besteht die **Randkurve** $\text{RK}(S)$ von S aus den Wegen

$$\vec{\delta}_1 = \vec{X} \circ \vec{\gamma}_1, \quad \vec{\delta}_2 = \vec{X} \circ \vec{\gamma}_2, \quad \dots, \quad \vec{\delta}_m = \vec{X} \circ \vec{\gamma}_m.$$

Nun können wir den Integralsatz von Stokes formulieren.

Satz 23.23. (Integralsatz von Stokes)

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Seien $\bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand, und sei $\vec{X} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines glatten Flächenstückes $S = \vec{X}(\bar{U})$ mit $\vec{X}(\bar{U}) \subseteq V$ und $\text{Rang}(\partial\vec{X})(u, v) = 2$ für alle $(u, v) \in \bar{U}$, und $\vec{X}|_{\bar{U}}$ sei injektiv. Sei $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{d}\vec{O} = \oint_{\text{RK}(S)} \vec{F} \cdot \vec{d}\vec{s},$$

wobei $\text{RK}(S)$ die Randkurve von S ist. Dabei muss die Parametrisierung der Randkurve so gewählt sein, dass die Oberseite des glatten Flächenstückes links von dem gewählten Weg liegt. Auf der Oberseite des glatten Flächenstückes zeigt das Einheitsnormalenvektorfeld nach oben.

Was bedeutet die Formel im Integralsatz von Stokes physikalisch?

Wir stellen uns eine Strömung (von einer Flüssigkeit oder einem Gas) mit dem Geschwindigkeitsfeld \vec{F} vor, die im dreidimensionalen Raum strömt. Wir interessieren uns für das Geschwindigkeitsfeld \vec{F} auf dem Flächenstück S . Das Kurvenintegral

$$\oint_{\text{RK}(S)} \vec{F} \cdot \vec{d}\vec{s} = \oint_{\vec{\delta}} \vec{F} \cdot \vec{d}\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt,$$

wobei $\vec{\delta} = \text{RK}(S) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Randes ∂S ist, **integriert die Komponente von \vec{F} tangential zu der Randkurve (entlang der Randkurve von S)**. Der Wert dieses Kurvenintegrals ist also die **Zirkulation von \vec{F} längs der Randkurve $\vec{\delta}$** .

Auf der anderen Seite des Integralsatzes von Stokes steht das Oberflächenintegral

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathcal{O}} = \int_{\bar{U}} (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)] \, d(u, v).$$

$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{X}}(u, v))$ gibt die Richtung der Rotationsachse und die Stärke lokaler Wirbel im Punkt $\vec{\mathbf{X}}(u, v)$ des \mathbb{R}^3 (und der Fläche S) an. Da $[(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)]$ in Richtung des Einheitsnormalenvektorfeldes von S im Punkt $\vec{\mathbf{X}}(u, v)$ zeigt, kann man

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot \frac{(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)}{|(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)|}$$

als die Wirbelstärke von $\vec{\mathbf{F}}$ im Punkt $\vec{\mathbf{X}}(u, v)$ der Fläche S interpretieren. Die Drehrichtung der Wirbel wird über das Vorzeichen berücksichtigt. Das Oberflächenintegral im Integralsatz von Stokes integriert also über die Wirbelstärken des Vektorfeldes $\vec{\mathbf{F}}$ auf dem Flächenstück S . Also gilt:

Die Zirkulation entlang einer Kurve, die ein Flächenstück einschließt, ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf dem Flächenstück.

Beweisskizze von Satz 23.23: Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass $\vec{\mathbf{X}}$ zweimal stetig differenzierbar ist und nutzen den Satz von Green (siehe Satz 23.6).

Schritt 1: Sei $\vec{\delta} = \vec{\mathbf{X}} \circ \vec{\gamma}$ einer der geschlossenen stückweise glatten Wege, aus denen $\operatorname{RK}(S)$ besteht. Dann gilt mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \vec{\delta}'(t) &= (\vec{\mathbf{X}} \circ \vec{\gamma})'(t) = (\partial \vec{\mathbf{X}})(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \\ &= \begin{bmatrix} (\partial_u X_1)(\vec{\gamma}(t)) & (\partial_v X_1)(\vec{\gamma}(t)) \\ (\partial_u X_2)(\vec{\gamma}(t)) & (\partial_v X_2)(\vec{\gamma}(t)) \\ (\partial_u X_3)(\vec{\gamma}(t)) & (\partial_v X_3)(\vec{\gamma}(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\partial_u X_1)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + (\partial_v X_1)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \\ (\partial_u X_2)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + (\partial_v X_2)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \\ (\partial_u X_3)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + (\partial_v X_3)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun das Kurvenintegral von \vec{F} entlang des stückweise glatten Weges $\vec{\delta} = \vec{X} \circ \vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\oint_{\vec{\delta}} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt \\
&= \int_a^b \begin{bmatrix} F_1(\vec{X}(\vec{\gamma}(t))) \\ F_2(\vec{X}(\vec{\gamma}(t))) \\ F_3(\vec{X}(\vec{\gamma}(t))) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\partial_u X_1)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + (\partial_v X_1)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \\ (\partial_u X_2)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + (\partial_v X_2)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \\ (\partial_u X_3)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + (\partial_v X_3)(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{X}(\vec{\gamma}(t))) \cdot (\partial_u \vec{X})(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + \vec{F}(\vec{X}(\vec{\gamma}(t))) \cdot (\partial_v \vec{X})(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \right] dt \\
&= \int_a^b \begin{bmatrix} (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_u \vec{X}) \\ (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_v \vec{X}) \end{bmatrix} (\vec{\gamma}(t)) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix} dt \\
&= \oint_{\vec{\gamma}} \begin{bmatrix} (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_u \vec{X}) \\ (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_v \vec{X}) \end{bmatrix} (\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{ds}.
\end{aligned}$$

Schritt 2: Wir setzen nun $f := (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_u \vec{X})$ und $g := (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_v \vec{X})$. Mit Schritt 1 und dem Satz von Green (siehe Satz 23.6) erhalten wir durch Aufsummieren der verschiedenen Kurvenintegrale, aus denen sich das Integral über die Randkurve von S zusammensetzt, dass

$$\oint_{\text{RK}(S)} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \oint_{\partial \bar{U}} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \cdot \vec{ds} = \int_{\bar{U}} (\partial_u g - \partial_v f)(u, v) d(u, v).$$

Schritt 3: Wir berechnen nun $\partial_u g - \partial_v f$ explizit: Mit der Produktregel finden wir

$$\begin{aligned}
\partial_u g - \partial_v f &= (\partial_u (\vec{F} \circ \vec{X})) \cdot (\partial_v \vec{X}) + (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_u \partial_v \vec{X}) \\
&\quad - (\partial_v (\vec{F} \circ \vec{X})) \cdot (\partial_u \vec{X}) - (\vec{F} \circ \vec{X}) \cdot (\partial_v \partial_u \vec{X}) \\
&= (\partial_u (\vec{F} \circ \vec{X})) \cdot (\partial_v \vec{x}) - (\partial_v (\vec{F} \circ \vec{X})) \cdot (\partial_u \vec{x}),
\end{aligned}$$

wobei sich die beiden im zweiten Schritt weggefallenen Terme nach dem Satz von Schwarz kürzen. Mit der Kettenregel finden wir nun

$$\begin{aligned}
\partial_u g - \partial_v f &= (\partial_u (\vec{F} \circ \vec{X})) \cdot (\partial_v \vec{X}) - (\partial_v (\vec{F} \circ \vec{X})) \cdot (\partial_u \vec{X}) \\
&= \left(((\partial \vec{F}) \circ \vec{X})(\partial_u \vec{X}) \right) \cdot (\partial_v \vec{X}) - \left(((\partial \vec{F}) \circ \vec{X})(\partial_v \vec{X}) \right) \cdot (\partial_u \vec{X})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 ((\partial_i F_k) \circ \vec{\mathbf{X}}) \left[(\partial_u X_i) (\partial_v X_k) - (\partial_v X_i) (\partial_u X_k) \right] \\
&= \left[(\partial_2 F_3) \circ \vec{\mathbf{X}} - (\partial_3 F_2) \circ \vec{\mathbf{X}} \right] \left[(\partial_u X_2) (\partial_v X_3) - (\partial_v X_2) (\partial_u X_3) \right] \\
&\quad + \left[(\partial_3 F_1) \circ \vec{\mathbf{X}} - (\partial_1 F_3) \circ \vec{\mathbf{X}} \right] \left[(\partial_u X_3) (\partial_v X_1) - (\partial_v X_3) (\partial_u X_1) \right] \\
&\quad + \left[(\partial_1 F_2) \circ \vec{\mathbf{X}} - (\partial_2 F_1) \circ \vec{\mathbf{X}} \right] \left[(\partial_u X_1) (\partial_v X_2) - (\partial_v X_1) (\partial_u X_2) \right] \\
&= ((\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}) \circ \vec{\mathbf{X}}) \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}}) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})].
\end{aligned}$$

Schritt 4: Mit Schritt 2 und Schritt 3 finden wir also

$$\begin{aligned}
\oint_{\operatorname{RK}(S)} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \int_{\bar{U}} (\partial_u g - \partial_v f)(u, v) \, d(u, v) \\
&= \int_{\bar{U}} [(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{X}}(u, v))] \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}}) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})] \, d(u, v) \\
&= \int_S \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathcal{O},
\end{aligned}$$

womit der Integralsatz von Stokes für zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $\vec{\mathbf{F}}$ bewiesen ist. \square

Betrachten wir einige Beispiele zur Anwendung des Integralsatzes von Stokes.

Beispiel 23.24. (Integralsatz von Stokes)

Sei $0 < R < 1$ fest und $\bar{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2\}$. Wähle

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dann durchläuft $\vec{\gamma}$ den Rand von \bar{U} genau einmal, und \bar{U} liegt links von $\vec{\gamma}$.

Durch

$$\vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in \bar{U}$$

ist eine (Nord-)Kugelkappe S einer Kugel mit Radius 1 parametrisiert. Es gilt

$$(\partial\vec{X})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -u(1-u^2-v^2)^{-1/2} & -v(1-u^2-v^2)^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Da die ersten beiden Zeilenvektoren von $(\partial\vec{X})(u, v)$ die Standardbasis von \mathbb{R}^2 bilden, folgt $\text{Rang}((\partial\vec{X})(u, v)) = 2$ in ganz \mathbb{R}^2 und damit insbesondere in \bar{U} . Insofern handelt es sich um eine zulässige Parametrisierung. Weil $X_1(u, v) = u$ und $X_2(u, v) = v$ die Identitätsabbildung von \mathbb{R}^2 liefern, folgt die Injektivität von $\vec{X}|_{\bar{U}}$. Also sind die Voraussetzungen des Satzes von Stokes erfüllt.

Der Rand der Kugelkappe $\text{RK}(S)$ ist dann durch

$$\vec{\delta}(t) = (\vec{X} \circ \vec{\gamma})(t) = \begin{bmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ \sqrt{1-R^2} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

parametrisiert. Für

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) := \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix},$$

berechnen wir beide Seiten der Formel im Satz von Stokes.

(a) Für das Kurvenintegral erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{\text{RK}(S)} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \oint_{\vec{\delta}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} R \sin(t) \\ \sqrt{1-R^2} \\ R \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-R^2 \sin^2(t) + R \sqrt{1-R^2} \cos(t) \right] dt \\ &= -R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt + R \sqrt{1-R^2} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \\ &= -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos(2t)] dt + R \sqrt{1-R^2} \left[\sin(t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -R^2 \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} + R \sqrt{1-R^2} \left[\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right] \\
&= -R^2 \left[\left(\frac{1}{2} 2\pi - \frac{1}{4} \sin(4\pi) \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \sin(0) \right) \right] + 0 = -\pi R^2,
\end{aligned}$$

wobei wir in der fünften Zeile

$$\begin{aligned}
\sin^2(t) &= \frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2} (1 - \cos^2(t)) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos^2(t) - \sin^2(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)
\end{aligned}$$

genutzt haben.

(b) Für das Oberflächenintegral berechnen wir zunächst die Rotation von $\vec{\mathbf{F}}$:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\implies (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
&(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u(1-u^2-v^2)^{-1/2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v(1-u^2-v^2)^{-1/2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u(1-u^2-v^2)^{-1/2} \\ v(1-u^2-v^2)^{-1/2} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

berechnet sich das Oberflächenintegral dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{O}} &= \int_{\bar{U}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(1-u^2-v^2)^{-1/2} \\ v(1-u^2-v^2)^{-1/2} \\ 1 \end{bmatrix} d(u, v) \\
&= \int_{\bar{U}} \left[-\frac{u+v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - 1 \right] d(u, v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{(PK)}}{=} \int_{\bar{U}_{\text{PK}}} \left[-\frac{\varrho \cos(\phi) + \varrho \sin(\phi)}{\sqrt{1-\varrho^2}} - 1 \right] \varrho \, d(\varrho, \phi) \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}} [\cos(\phi) + \sin(\phi)] - \varrho \right) d\phi \, d\varrho \\
&= \int_0^R \left[-\frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}} [\sin(\phi) - \cos(\phi)] - \varrho \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\varrho \\
&= \int_0^R \left[-\frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}} \underbrace{([\sin(2\pi) - \cos(2\pi)] - [\sin(0) - \cos(0)])}_{=0 \text{ wegen der } 2\pi\text{-Periodizität}} - \varrho 2\pi \right] d\varrho \\
&= \int_0^R -2\pi \varrho \, d\varrho = \left[-\pi \varrho^2 \right]_{\varrho=0}^{\varrho=R} = -\pi R^2,
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile das Integral mit Polarkoordinaten (PK) parametrisiert haben:

$$\begin{aligned}
u &= \varrho \cos(\phi), & v &= \varrho \sin(\phi), & d(u, v) &= \varrho \, d(\varrho, \phi), \\
u^2 + v^2 &= \varrho^2, & \bar{U}_{\text{PK}} &= [0, R] \times [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Beispiel 23.25. (Integralsatz von Stokes)

Gesucht ist der Wert des Kurvenintegrals $\oint_{\vec{\delta}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit

$$\begin{aligned}
\vec{\delta} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \vec{\delta}(t) &:= \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \\
\vec{F} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \vec{F}(x, y, z) &:= \begin{bmatrix} x^2 + z + yz + e^{x^2} \\ xz + y^2 e^y + \sin(y) \\ z^3 \cos(z) + xy \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösung: Da das Vektorfeld ziemlich kompliziert ist, vermuten wir, dass es sich lohnen könnte, den Satz von Stokes zu verwenden. Um dieses zu tun müssen wir noch eine passende Fläche finden, deren Randkurve durch $\vec{\delta}$ parametrisiert wird.

Wir berechnen zunächst die Rotation des Vektorfeldes $\vec{\mathbf{F}}$:

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^2 + z + yz + e^{x^2} \\ xz + y^2 e^y + \sin(y) \\ z^3 \cos(z) + xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x \\ 1 + y - y \\ z - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{e}}_2.$$

Das sehr einfache konstante Vektorfeld $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}$ ist ein klares Indiz, dass man den Satz von Stokes tatsächlich anwenden sollte.

$\vec{\delta}$ durchläuft den Rand der Fläche $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$ mit der Parametrisierung

$$\vec{\mathbf{X}} : \underbrace{\{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}}_{=: \bar{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\mathbf{X}}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ u \end{bmatrix}.$$

Da die ersten beiden Komponenten von $\vec{\mathbf{X}}$ die Identitätsabbildung bilden, ist $\vec{\mathbf{X}}$ offensichtlich auf \bar{U} injektiv, und wir finden

$$(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \vec{\mathbf{0}}.$$

Also hat $(\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)$ auf ganz \mathbb{R}^2 (und damit auch auf \bar{U}) den Rang 2. Also ist $(\vec{\mathbf{X}}, \bar{U})$ eine zulässige Parameterdarstellung von $S = \vec{\mathbf{X}}(\bar{U})$.

Wir prüfen nun, dass $\vec{\delta}$ in der Tat die Randkurve von S parametrisiert. Dazu wählen wir eine Parametrisierung des Randes von \bar{U} durch

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

(Das Innere von \bar{U} liegt wie gefordert links von $\vec{\gamma}$.) Wir finden nun für die Randkurve $\operatorname{RK}(S)$ von S die Parametrisierung

$$\vec{\mathbf{X}} \circ \vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\vec{\mathbf{X}} \circ \vec{\gamma})(t) = \vec{\mathbf{X}}(\vec{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} = \vec{\delta}(t).$$

Also ist S eine Fläche, deren Randkurve durch $\vec{\delta}$ parametrisiert wird.

Nach dem Integralsatz von Stokes gilt somit

$$\oint_{\vec{\delta}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \oint_{\operatorname{RK}(S)} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathcal{O}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\bar{U}} (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{X}}(u, v)) \cdot [(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v)] \, d(u, v) \\
&= \int_{\bar{U}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \, d(u, v) = \int_{\bar{U}} 0 \, d(u, v) = 0.
\end{aligned}$$

23.5 Anwendungen des Satzes von Stokes

Wir starten mit einigen Vorbereitungen:

Seien $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{\mathbf{N}}| = 1$ fest gewählt. Sei E die Ebene, die durch (x_0, y_0, z_0) geht und senkrecht zu $\vec{\mathbf{N}}$ ist, d.h.

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0 \right\}.$$

A_r sei die Kreisscheibe um (x_0, y_0, z_0) mit Radius $r > 0$, die in der Ebene E liegt. Wir wollen A_r so parametrisieren, dass $\vec{\mathbf{N}}$ das zugehörige (konstante) Einheitsnormalenvektorfeld von A_r ist.

Wähle $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{\mathbf{b}}_1| = |\vec{\mathbf{b}}_2| = 1$, $\vec{\mathbf{b}}_1 \perp \vec{\mathbf{b}}_2$ und $\vec{\mathbf{b}}_1 \times \vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{N}}$. Dann ist

$$\vec{\mathbf{X}}(u, v) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + u \vec{\mathbf{b}}_1 + v \vec{\mathbf{b}}_2, \quad u^2 + v^2 \leq r^2,$$

eine Parameterdarstellung von A_r , und das Einheitsnormalenvektorfeld des Flächenstücks A_r ist $\vec{\mathbf{N}}_{A_r} = \vec{\mathbf{N}}$. (In der Tat gilt dann $(\partial_u \vec{\mathbf{X}})(u, v) \times (\partial_v \vec{\mathbf{X}})(u, v) = \vec{\mathbf{b}}_1 \times \vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{N}}$.)

Satz 23.26. (Rotation als Grenzwert)

Sei $\vec{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{\mathbf{N}}| = 1$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\vec{\mathbf{F}} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $(x_0, y_0, z_0) \in V$. Dann gilt

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}} = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \oint_{\operatorname{RK}(A_r)} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s}, \quad (23.31)$$

wobei A_r die (wie oben definierte) Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) und Radius $r > 0$ ist, die auf $\vec{\mathbf{N}}$ senkrecht steht und deren Einheitsnormalenvektorfeld $\vec{\mathbf{N}}$ ist.

Beweisidee von Satz 23.26: Wir nutzen den Satz von Stokes, um das Kurvenintegral auf der rechten Seite in ein Oberflächenintegral umzuwandeln:

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \oint_{\text{RK}(A_r)} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} &= \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} (\text{rot } \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathcal{O} \\ &= \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} (\text{rot } \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{N}} \, d\sigma \\ &= (\text{rot } \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt anschaulich ist, wenn man sich klar macht, dass

$$\frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} (\text{rot } \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{N}} \, d\sigma$$

als Mittelwert von $(\text{rot } \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{N}}$ auf der Kreisscheibe A_r betrachtet werden kann. Wenn r gegen null strebt, dann schrumpft diese Kreisscheibe auf den einen Punkt (x_0, y_0, z_0) zusammen, und man erhält $(\text{rot } \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}}$. \square

Wichtig ist vor allem die **Interpretation von (23.31)**: In

$$\oint_{\text{RK}(A_r)} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\mathbf{s} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt,$$

wobei $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Randes der Kreisscheibe A_r ist, tragen nur die Anteile von $\vec{\mathbf{F}}$ zum Integral bei, die tangential zum Rand ∂A_r der Kreisscheibe A_r sind. Liegen solche tangentialen Anteile vor und gilt auf dem ganzen Rand ∂A_r , dass

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) > 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\mathbf{F}}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) < 0$$

ist, so haben wir auf dem Rand einen Anteil des Strömungsfeldes $\vec{\mathbf{F}}$ der kreisförmig gegen den Uhrzeigersinn bzw. im Uhrzeigersinn läuft. Für $r \searrow 0$ schrumpft

die Kreisscheibe A_r und damit ihr Rand ∂A_r auf den einen Punkt (x_0, y_0, z_0) zusammen. Insofern kann man den Wert von $(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}}$ als Maß für das Vorliegen eines gegen bzw. im Uhrzeigersinn orientierten lokalen Wirbels von $\vec{\mathbf{F}}$ in (x_0, y_0, z_0) in der zu $\vec{\mathbf{N}}$ senkrechten Ebene und für die Stärke dieses Wirbels betrachten. Ist $(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0$, so liegt in der zu $\vec{\mathbf{N}}$ senkrechten Ebene durch (x_0, y_0, z_0) kein lokaler Wirbel in (x_0, y_0, z_0) vor.

Physikalische Anwendung 23.27. (Maxwellsche Gleichungen (Teil 2))

Es seien im Folgenden:

$\vec{\mathbf{E}}$ = elektrische Feldstärke,

$\vec{\mathbf{D}}$ = elektrische Flussdichte,

$\vec{\mathbf{H}}$ = magnetische Feldstärke,

$\vec{\mathbf{B}}$ = magnetische Flussdichte,

$\vec{\mathbf{S}}$ = Stromdichte,

t = Zeit,

$A = \begin{cases} \text{ein Flächenstück mit einer Parameterdarstellung } \vec{\mathbf{X}} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \text{wobei } \bar{U} \text{ ein Bereich mit einem stückweise glatten Rand ist und} \\ \text{Rang}((\partial \vec{\mathbf{X}})(u, v)) = 2 \text{ für alle } (u, v) \in \bar{U} \text{ gilt und } \vec{\mathbf{X}}|_{\bar{U}} \text{ injektiv ist.} \end{cases}$

Die **Maxwellschen Gleichungen** können unterschiedlich formuliert werden:

Wir betrachten die Maxwellschen Gleichungen auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^3$.

Gleichung 3:

$$(i) \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = - \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{B}} \text{ auf } V, \quad \text{oder äquivalent dazu}$$

$$(ii) \oint_{\operatorname{RK}(A)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_A \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \underbrace{- \int_A \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}}}_{= - \frac{d}{dt} \int_A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathcal{O}}} \text{ für jedes } A \subseteq V.$$

Gleichung 4:

$$(i) \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{S}} + \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{D}} \text{ auf } V, \quad \text{oder äquivalent dazu}$$

$$(ii) \quad \oint_{\text{RK}(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \underbrace{\int_A \vec{S} \cdot d\vec{\mathcal{O}} + \int_A \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}}}_{= \int_A \vec{S} \cdot d\vec{\mathcal{O}} + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{\mathcal{O}}} \text{ für jedes } A \subseteq V.$$

Dass jeweils (ii) aus (i) folgt, ist eine direkte Konsequenz aus dem Integralsatz von Stokes.

Dass umgekehrt aus (ii) auch jeweils (i) geschlossen werden kann, folgt mit Hilfe von Satz 23.26, wie unten ausgeführt ist.

Warum folgt bei Gleichung 3 und 4 aus (ii) auch (i)?

Wir zeigen dieses exemplarisch für Gleichung 3 der Maxwell'schen Gleichungen. Bei Gleichung 4 geht man analog vor.

Es gelte also (ii). Sei $(x_0, y_0, z_0) \in V$ beliebig. Da V offen ist, gibt es einen offenen Ball $U_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)$ mit Radius $\varepsilon > 0$, der ganz in V liegt. Damit liegt auch die abgeschlossene Vollkugel (also der abgeschlossene Ball) $\overline{U_r(x_0, y_0, z_0)}$ mit Radius $r := \varepsilon/2$ ganz in V . Sei nun $\vec{N} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{N}| = 1$. Dann enthält $\overline{U_r(x_0, y_0, z_0)}$ die abgeschlossene Kreisscheibe A_r mit Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) und Radius r , die auf \vec{N} senkrecht steht. Nach (ii) gilt für $A = A_r$

$$\begin{aligned} \oint_{\text{RK}(A_r)} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= - \int_{A_r} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}} \\ \implies \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \oint_{\text{RK}(A_r)} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= - \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

Lassen wir nun $r > 0$ gegen null gehen, so erhalten wir

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \oint_{\text{RK}(A_r)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}}. \quad (23.32)$$

Nach Satz 23.26 gilt für die linke Seite in (23.32)

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \oint_{\text{RK}(A_r)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\text{rot } \vec{E})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{N}. \quad (23.33)$$

Das Integral

$$\frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{N} d\sigma$$

ist der Mittelwert von $\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ auf A_r . Für $r \searrow 0$ schrumpft die Kreisscheibe A_r auf ihren Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) zusammen, und es gilt somit für die rechte Seite in (23.32)

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \cdot d\vec{\mathcal{O}} = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{O}(A_r)} \int_{A_r} \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{N}} d\sigma = \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}}. \quad (23.34)$$

Einsetzen von (23.33) und (23.34) in (23.32) liefert

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}} = - \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\mathbf{N}}.$$

Da $(x_0, y_0, z_0) \in V$ beliebig war gilt also

$$(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{N}} = - \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{N}} \quad \text{in } V. \quad (23.35)$$

Wählt man in (23.35) nun $\vec{\mathbf{N}}$ jeweils als einen der Vektoren der $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ bzw. $\vec{\mathbf{e}}_3$ der Standardbasis von \mathbb{R}^3 , so sieht man dass alle drei Komponenten von $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}$ und $-\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$ übereinstimmen. Also folgt

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = - \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \quad \text{in } V.$$

Teil IX

Partielle Differentialgleichungen

Einführung in partielle Differentialgleichungen

In diesem Teilkapitel lernen wir die Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen und den in den Anwendungsbereichen wichtigen Separationsansatz kennen. Bei partiellen (im Gegensatz zu gewöhnlichen) Differentialgleichungen hängt die unbekannte Funktion, welche durch die Differentialgleichung beschrieben wird, von mehreren Variablen (z.B. Raumvariablen und der Zeit) ab, und in der Differentialgleichung kommen partielle Ableitungen diese Variablen vor.

24.1 Definitionen und Beispiele

Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und vielen Beispielen.

Definition 24.1. (partielle Differentialgleichung)

- (1) Eine **partielle Differentialgleichung (PDG)** ist eine Gleichung, die partielle Ableitungen von einer oder mehreren abhängigen Variablen bzgl. **mindestens zwei unabhängigen Variablen** enthält.
- (2) Die **Ordnung** einer partiellen Differentialgleichung ist die Ordnung der höchsten (partiellen) Ableitung, die in der Differentialgleichung vorkommt.

(3) Ein **System partieller Differentialgleichungen** besteht aus **mindestens zwei** partiellen Differentialgleichungen.

Die „abhängigen Variablen“ sind die (unbekannten) Funktionen, die durch die partielle Differentialgleichung beschrieben werden.

Beispiel 24.2. (partielle Differentialgleichungen)

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ (oder auch $\partial_x \partial_y u = 0$)

unabhängige Variablen: x, y

abhängige Variable: u

Ordnung: 2

(b) $\frac{\partial v}{\partial x} + x y^2 v \frac{\partial v}{\partial y} = \cos(y)$ (oder $\partial_x v + x y^2 v \partial_y v = \cos(y)$)

unabhängige Variablen: x, y

abhängige Variable: v

Ordnung: 1

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + u = 0$ (oder $\partial_t^2 u - t \partial_s^2 u + u = 0$)

unabhängige Variablen: s, t

abhängige Variable: u

Ordnung: 2

(d) **Laplace-Gleichung:** $\Delta u = 0$

- 2-dimensionale Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{ oder } \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0)$$

unabhängige Variablen: x, y

abhängige Variable: u

- 3-dimensionale Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{ oder } \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0)$$

unabhängige Variablen: x, y, z

abhängige Variable: u

- n -dimensionale Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \left(\text{oder } \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \dots + \partial_n^2 u = 0 \right)$$

unabhängige Variablen: x_1, x_2, \dots, x_n

abhängige Variable: u

Die Ordnung der Laplace-Gleichung (egal welcher Dimension) ist 2. Lösungen der Laplace-Gleichung heißen **harmonisch** (vgl. Definition 20.6)

(e) **Poisson-Gleichung:** $\Delta u = f$

- 2-dimensionale Poisson-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \left(\text{oder } \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = f \right)$$

unabhängige Variablen: x, y

abhängige Variable: u

- 3-dimensionale Poisson-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \quad \left(\text{oder } \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = f \right)$$

unabhängige Variablen: x, y, z

abhängige Variable: u

- n -dimensionale Poisson-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f \quad \left(\text{oder } \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \dots + \partial_n^2 u = f \right)$$

unabhängige Variablen: x_1, x_2, \dots, x_n

abhängige Variable: u

Die Ordnung der Poisson-Gleichung (egal welcher Dimension) ist 2.

(f) **Wärmeleitungsgleichung:** $\partial_t u = \alpha^2 \Delta u$ mit $\alpha > 0$

- 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(\text{oder } \partial_t u = \alpha^2 \partial_x^2 u \right)$$

unabhängige Variablen: t (Zeit), x (Raum)

abhängige Variable: u

- 2-dimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \left(\text{oder } \partial_t u = \alpha^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) \right)$$

unabhängige Variablen: t (Zeit), x, y (Raum)

abhängige Variable: u

- 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \left(\text{oder } \partial_t u = \alpha^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) \right)$$

unabhängige Variablen: t (Zeit), x, y, z (Raum)

abhängige Variable: u

Die Ordnung der Wärmeleitungsgleichung (egal welcher Dimension) ist 2.

- (g) **Wellengleichung:** $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ mit $c > 0$

- 1-dimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(\text{oder } \partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u \right)$$

unabhängige Variablen: t (Zeit), x (Raum)

abhängige Variable: u

- 2-dimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \left(\text{oder } \partial_t^2 u = c^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) \right)$$

unabhängige Variablen: t (Zeit), x, y (Raum)

abhängige Variable: u

- 3-dimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \left(\text{oder } \partial_t^2 u = c^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) \right)$$

unabhängige Variablen: t (Zeit), x, y, z (Raum)

abhängige Variable: u

Die Ordnung der Wellengleichung (egal welcher Dimension) ist 2.

- (h) Die **Maxwell-Gleichungen** (siehe Physikalische Anwendungen 23.20 und 23.27) bilden ein System partieller Differentialgleichungen. Die Ordnung dieses Systems ist 1.

24.2 Lösen durch direkte Integration

Einige wenige Differentialgleichungen kann man direkt durch Integration lösen.

Beispiel 24.3. (Lösen durch Integration)

$$(a) \quad \partial_x \partial_y u = 0, \quad \text{d.h.} \quad (\partial_x \partial_y u)(x, y) = 0$$

$$\implies (\partial_y u)(x, y) = c_1(y)$$

$$\implies u(x, y) = \int c_1(y) \, dy + c_2(x)$$

Mit

$$h(y) := \int c_1(y) \, dy \quad \text{und} \quad g(x) := c_2(x)$$

folgt also

$$u(x, y) = g(x) + h(y).$$

Also muss eine Lösung von dieser Form sein. Tatsächlich sieht man durch Ableiten, dass $u(x, y) = g(x) + h(y)$ eine Lösung ist, sofern g und h differenzierbar sind. Also ist $u(x, y) = g(x) + h(y)$ die allgemeine Lösung der PDG.

$$(b) \quad \partial_x \partial_y u = x - y, \quad \text{d.h.} \quad (\partial_x \partial_y u)(x, y) = x - y$$

$$\implies (\partial_y u)(x, y) = \frac{1}{2} x^2 - x y + c_1(y)$$

$$\implies u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + \int c_1(y) \, dy + c_2(x)$$

Setzt man

$$h(y) := \int c_1(y) \, dy \quad \text{und} \quad g(x) := c_2(x),$$

so sieht man wie in (a), dass

$$u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + g(x) + h(y)$$

mit beliebigen differenzierbaren Funktionen g, h die allgemeine Lösung der PDG ist.

24.3 Lineare partielle Differentialgleichungen

Wir beschränken uns nun auf sogenannte lineare partielle Differentialgleichungen, für die eine schöne Lösungstheorie existiert.

Definition 24.4. (lineare partielle Differentialgleichung erster Ordn.)

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) der Form

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + b u = f \quad (24.1)$$

(wobei $a_1, a_2, \dots, a_n, b, f$ von x_1, x_2, \dots, x_n abhängen dürfen) heißt eine **lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung**. Ist $f \equiv 0$, so heißt (24.1) **homogen**; andernfalls heißt (24.1) **inhomogen**.

Bei homogenen linearen PDGen ist ein sogenannter Separationsansatz möglich, den wir noch in Teilkapitel 24.4 kennenlernen werden.

Beispiel 24.5. (lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung)

- (a) $\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ist linear und homogen.
- (b) $\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = e^{3x+y}$ ist linear und inhomogen.
- (c) $\frac{\partial u}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x+y)$ ist linear und inhomogen.
- (d) $\frac{\partial u}{\partial x} + x y^2 u \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(y)$ ist zwar von erster Ordnung aber **nicht** linear.

In der folgenden Definition betrachten wir nur zwei unabhängige Variablen x, y . Für mehr als zwei Variablen ist eine ähnliche Definition möglich, aber diese ist deutlich komplizierter. Daher beschränken wir uns auf den Fall zweier unabhängiger Variablen.

Definition 24.6. (lineare partielle Differentialglg. zweiter Ordn.)

Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$a_{1,1} \partial_x^2 u + 2 a_{1,2} \partial_x \partial_y u + a_{2,2} \partial_y^2 u + b_1 \partial_x u + b_2 \partial_y u + c u = f \quad (24.2)$$

(wobei $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, b_1, b_2, c, f$ von x, y abhängen dürfen) heißt eine **lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung**.

- Ist $f \equiv 0$, so heißt (24.2) **homogen**; andernfalls heißt (24.2) **inhomogen**.
- (24.2) heißt **elliptisch**, falls $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 > 0$ ist.
- (24.2) heißt **parabolisch**, falls $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 0$ ist.
- (24.2) heißt **hyperbolisch**, falls $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 < 0$ ist.

Bevor wir Beispiele betrachten, halten wir noch zwei Beobachtungen als Bemerkung fest.

Bemerkung 24.7. (Klassifizierung linearer DGLen zweiter Ordnung)

$$(1) \quad a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right)$$

- (2) Sind $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}$ nicht konstant, so lässt sich die PDG unter Umständen **nicht** eindeutig den Kategorien „elliptisch“, „parabolisch“ oder „hyperbolisch“ zuordnen.

Betrachten wir nun verschiedene Beispiele.

Beispiel 24.8. (lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung)

- (a) $\partial_x \partial_y u = 0$ ist linear und homogen und hyperbolisch, denn mit $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$ und $a_{1,2} = \frac{1}{2}$ gilt $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = -\frac{1}{4} < 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $\partial_x^2 u - x \partial_y^2 u + u = 0$ ist linear und homogen. Da $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 0$ und $a_{2,2} = -x$ gilt $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = -x$. Also ist die PDG
- hyperbolisch für $(x, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$,
 - elliptisch für $(x, y) \in]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$.
- (c) **Laplace-Gleichung** (2-dimensional):

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

ist linear und homogen und elliptisch, denn mit $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$ und $a_{1,2} = 0$ gilt $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 1 > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) **Poisson-Gleichung** (2-dimensional):

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = f$$

ist linear und inhomogen und elliptisch, denn mit $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$ und $a_{1,2} = 0$ gilt $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 1 > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(e) **Wärmeleitungsgleichung** (1-dimensional):

$$\partial_t u = \alpha^2 \partial_x^2 u \quad \iff \quad \alpha^2 \partial_x^2 u - \partial_t u = 0 \quad (\text{mit } \alpha > 0)$$

ist linear, homogen und parabolisch, denn mit $a_{1,1} = 0$, $a_{2,2} = \alpha^2$ und $a_{1,2} = 0$ gilt $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

(f) **Wellengleichung** (1-dimensional):

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u \quad \iff \quad c^2 \partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0 \quad (\text{mit } c > 0)$$

ist linear, homogen und hyperbolisch, denn mit $a_{1,1} = -1$, $a_{2,2} = c^2$ und $a_{1,2} = 0$ gilt $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = -c < 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Nun lernen wir das wichtige Superpositionsprinzip kennen. Sie haben dieses in der HM B (siehe Kapitel 14 des Skripts der HM B) bereits bei homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen kennengelernt.

Satz 24.9. (Superpositionsprinzip)

(1) Sind u und v Lösungen einer **homogenen** linearen (partiellen) Differentialgleichung und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$$w := \alpha u + \beta v$$

eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

(2) Wir betrachten nun eine **inhomogene** lineare (partielle) Differentialgleichung. Ist u_S eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und ist u_H eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, dann ist

$$u := u_S + u_H$$

eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Bemerkung 24.10. (Superpositionsprinzip)

- (1) Das Superpositionsprinzip gilt auch für lineare **gewöhnliche** Differentialgleichungen (vgl. die Kapitel 9, 14 und 15 in den Skripten der HM A und HM B). Deshalb ist „partiell“ in Satz 24.9 eingeklammert.
- (2) Für die linearen partiellen Differentialgleichungen in Definitionen 24.4 und 24.6 lässt sich das Superpositionsprinzip einfach durch Nachrechnen nachweisen.

24.4 Separationsansatz

Eine bei Physikern und Ingenieuren beliebte Lösungsmethode für PDGen ist der Separationsansatz. Er kann bei homogenen linearen Differentialgleichungen angewendet werden.

Lösungsmethode 24.11. (Separationsansatz)

Gegeben sei eine **homogene lineare** PDG mit einer abhängigen Variablen u und zwei unabhängigen Variablen x, y . Durch den **Separationsansatz**

$$u(x, y) = X(x) Y(y)$$

versucht man, spezielle Lösungen der PDG zu finden. Wie dieses konkret funktioniert, soll an dem nachfolgenden einfachen Beispiel illustriert werden.

Beispiel 24.12. (Separationsansatz)

Wir betrachten die folgende PDG erster Ordnung:

$$\partial_x u + 2 \partial_y u = 0. \quad (24.3)$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(x, y) = X(x) Y(y)$$

erhalten wir

$$(\partial_x u)(x, y) = X'(x) Y(y),$$

$$(\partial_y u)(x, y) = X(x) Y'(y).$$

Einsetzen ergibt

$$X'(x) Y(y) + 2 X(x) Y'(y) = 0 \quad \iff \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = -2 \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

(sofern $X(x)$ und $Y(y)$ beide ungleich 0 sind). Die linke Seite hängt nur von x ab, und die rechte Seite hängt nur von y ab. Also muss ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda = -2 \frac{Y'(y)}{Y(y)} \quad \text{für alle } (x, y). \quad (24.4)$$

(*Erklärung:* Halten wir x fest, also $x = x_0$, so muss gelten

$$\frac{X'(x_0)}{X(x_0)} = -2 \frac{Y'(y)}{Y(y)} \quad \text{für alle } y.$$

Also ist die rechte Seite konstant und gleich $\lambda := \frac{X'(x_0)}{X(x_0)}$. Aus (24.4) folgt nun für die rechte Seite analog

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = -2 \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \frac{X'(x_0)}{X(x_0)} = \lambda \quad \text{für alle } (x, y).$$

Somit sind beide Seiten gleich einer Konstanten λ .)

Die Gleichung (24.4) ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \quad \iff \quad X'(x) = \lambda X(x), \quad (24.5)$$

$$-2 \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \iff \quad Y'(y) = -\frac{\lambda}{2} Y(y). \quad (24.6)$$

(24.5) und (24.6) sind homogene lineare gewöhnliche DGLen erster Ordnung. Mit unserem Wissen aus der HM A können wir diese lösen und finden

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\lambda x}, & c_1 &\in \mathbb{R}, \\ Y(y) &= c_2 e^{-\frac{\lambda}{2} y}, & c_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$u(x, y) = X(x) Y(y) = c_1 e^{\lambda x} c_2 e^{-\frac{\lambda}{2} y} = \underbrace{c_1 c_2}_{=: c} e^{\lambda x} e^{-\frac{\lambda}{2} y} = c e^{\frac{\lambda}{2}(2x-y)}$$

ist eine Lösung von (24.3), wobei $c, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

Bemerkung: Man sieht schnell, dass dieses nicht alle Lösungen sind, denn für jede differenzierbare Funktion g ist

$$u(x, y) = g(2x - y)$$

eine Lösung der PDG (24.3). Dieses rechnet man leicht nach:

$$(\partial_x u)(x, y) + 2(\partial_y u)(x, y) = g'(2x - y) \cdot 2 + 2g'(2x - y) \cdot (-1) = 0.$$

Bemerkung 24.13. (zum Separationsansatz)

- (1) Der Separationsansatz liefert (falls anwendbar) **einige** Lösungen, aber **nicht notwendigerweise alle!**
- (2) Der Separationsansatz wird häufig **mit anderen Methoden kombiniert** (z.B. Superpositionsprinzip, Fourier-Reihen, Koordinatentransformation).
- (3) Enthält die PDG **drei oder mehr unabhängige Variablen**, so kann man den Separationsansatz auch anwenden, z.B. wählt man bei den drei unabhängigen Variablen x, y, z den Ansatz

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

24.5 Koordinatentransformation

Manche PDGen kann man durch eine Koordinatentransformation (vgl. Teilkapitel 20.6) in eine einfachere Differentialgleichung überführen. Auch dieses sehen wir uns an einem einfachen Beispiel an.

Beispiel 24.14. (Koordinatentransformation bei einer PDG)

- (a) Wir betrachten noch einmal die PDG erster Ordnung

$$\partial_x u + 2\partial_y u = 0 \tag{24.7}$$

und wenden die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} s = x \\ t = 2x - y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x = s \\ y = 2s - t \end{bmatrix} \tag{24.8}$$

an. Dabei transformiert sich die unabhängige Variable $u = u(x, y)$ in $w = w(s, t)$. Der Zusammenhang von u und w wird beschrieben durch $u(x, y) = w(s, t)$ mit dem Zusammenhang von x, y und s, t durch (24.8); genauer

$$\begin{aligned} w(s, t) &= u(s, 2s - t) \\ \text{bzw.} \quad u(x, y) &= w(x, 2x - y). \end{aligned}$$

Aus $u(x, y) = w(x, 2x - y)$ ergibt sich mit der Kettenregel (siehe Satz 16.45 im Kapitel 16 im Skript der HM B):

$$\begin{aligned} (\partial_x u)(x, y) &= (\partial_s w)(x, 2x - y) \cdot 1 + (\partial_t w)(x, 2x - y) \cdot 2 \\ &= (\partial_s w)(x, 2x - y) + 2(\partial_t w)(x, 2x - y), \\ (\partial_y u)(x, y) &= (\partial_s w)(x, 2x - y) \cdot 0 + (\partial_t w)(x, 2x - y) \cdot (-1) \\ &= -(\partial_t w)(x, 2x - y). \end{aligned}$$

Einsetzen in die PDG (24.7) liefert (wobei wir nun $(x, 2x - y)$ nicht mehr hingeschrieben haben):

$$(\partial_s w + 2\partial_t w) + 2(-\partial_t w) = 0 \quad \iff \quad \partial_s w = 0.$$

Wir lösen $\partial_s w = 0$ mit direkter Integration und erhalten

$$w(s, t) = g(t) \quad \text{für eine beliebige differenzierbare Funktion } g.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$u(x, y) = w(x, 2x - y) = g(2x - y).$$

Also ist $u(x, y) = g(2x - y)$ mit g differenzierbar die allgemeine Lösung der PDG.

- (b) Mit derselben Koordinatentransformation lässt sich auch die folgende inhomogene lineare DGL erster Ordnung lösen:

$$\partial_x u + 2\partial_y u = e^{3x+y}.$$

Die Koordinatentransformation (24.8) aus (a) liefert dann

$$\partial_s w = e^{3s+(2s-t)} = e^{5s-t}.$$

Durch Integration findet man dann die Lösung

$$w(s, t) = \frac{1}{5} e^{5s-t} + g(t) \quad \text{für eine beliebige differenzierbare Funktion } g.$$

Die Rücktransformation ergibt die allgemeine Lösung

$$u(x, y) = w(x, 2x - y) = \frac{1}{5} e^{5x-(2x-y)} + g(2x - y) = \frac{1}{5} e^{3x+y} + g(2x - y),$$

wobei g eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

Partielle Differentialgleichungen mit Zusatzbedingungen

In diesem Kapitel betrachten wir zwei der wichtigen klassischen partiellen Differentialgleichungen im Detail, nämlich die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung.

25.1 Die Wärmeleitungsgleichung in einer Raumvariablen

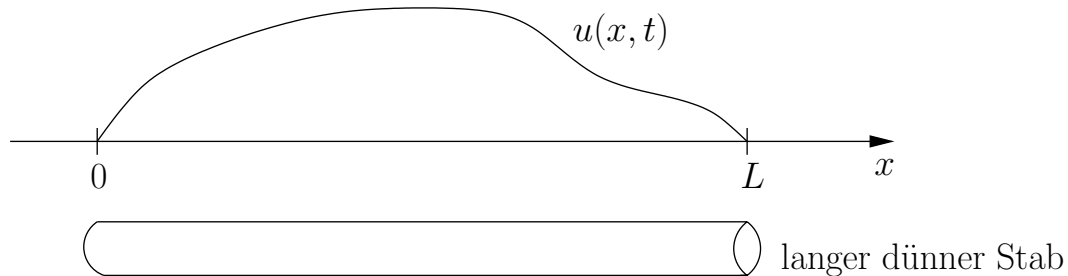
Wir betrachten die folgende **Problemstellung**:

- Gegeben sei ein dünner Stab (oder geradliniger Draht) mit kreisförmigem Querschnitt und Länge L , wobei der Durchmesser gegenüber der Länge vernachlässigbar sei.
- Wir nehmen an, dass im Draht keine Wärme verloren geht bzw. erzeugt wird. (Je nach Situation kann Wärme über die Stabenden abfließen bzw. hinzukommen.)
- Außerdem sei das Material homogen.
- Die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ sei bekannt.

Wie entwickelt sich die Temperaturverteilung im Laufe der Zeit?

Wir verwenden das folgende **mathematische Modell**:

- (1) Die Funktion $u(t, x)$ beschreibt die **Temperatur im Draht an der Stelle x zum Zeitpunkt t** (siehe Skizze). Dabei liegt der Stab auf der x -Achse mit den Enden bei $x = 0$ bzw. $x = L$.



Ein mathematisches Modell für die Temperaturentwicklung im Draht ist die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\partial_t u = \alpha^2 \partial_x^2 u,$$

wobei $\alpha > 0$ konstant sei und die Temperaturleitfähigkeit des Materials beschreibt.

- (2) **Anfangsbedingung:** Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Temperaturverteilung gegeben:

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [0, L].$$

- (3) Das Verhalten in den Randpunkten $x = 0$ und $x = L$ wird durch die **Randbedingungen** beschrieben:

- Wird die Temperatur in $x = 0$ und $x = L$ fest bei dem Wert 0 gehalten, so spricht man von **homogenen Dirichlet-Randbedingungen**:

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(Diesen Fall betrachten wir hier ausführlich.)

- Man kann inhomogene Randbedingungen fordern (siehe Bemerkung 25.1 am Ende dieses Teilkapitels).
- Schließlich kann man auch den Fall betrachten, dass an beiden Enden des Stabs keine Wärme verloren geht bzw. hinzukommt, d.h.

$$(\partial_x u)(t, 0) = (\partial_x u)(t, L) = 0. \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann spricht man von **Neumann-Randbedingungen** (vgl. Übungsaufgabe).

Wir betrachten nun die **Wärmeleitungsgleichung (WLG) mit Anfangsbedingung (AB) und Dirichlet-Randbedingungen (DRB)**:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t u &= \alpha^2 \partial_x^2 u, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, & \text{(WLG)} \\ u(0, x) &= f(x), & 0 \leq x \leq L, & & \text{(AB)} \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, & t \geq 0. & & \text{(DRB)} \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Damit (AB) und (DRB) kompatibel sind, fordern wir

$$f(0) = f(L) = 0.$$

Wir lösen die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung und Dirichlet-Randbedingungen nun in mehreren Schritten.

Schritt 1: Separationsansatz

Ansatz: $u(t, x) = T(t) X(x)$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\partial_t u)(t, x) &= T'(t) X(x), \\ (\partial_x^2 u)(t, x) &= T(t) X''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in (WLG) liefert:

$$T'(t) X(t) = \alpha^2 T(t) X''(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

d.h. wir bekommen die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad T'(t) = \alpha^2 \lambda T(t), \quad (25.2)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad X''(x) = \lambda X(x). \quad (25.3)$$

Die Differentialgleichung (25.2) ist eine homogene lineare DGL erster Ordnung mit der Lösung (siehe Kapitel 9 im Skript der HM A)

$$T(t) = C e^{\alpha^2 \lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Differentialgleichung (25.3) ist eine homogene lineare DGL zweiter Ordnung, die mit den Methoden aus Kapitel 14 in Skript der HM B gelöst werden kann (Exponentialansatz: $X(x) = e^{sx}$). Damit finden wir die allgemeine Lösung (Details siehe Übungszettel)

$$X(x) = \begin{cases} \tilde{A} e^{\nu x} + \tilde{B} e^{-\nu x} & \text{wenn } \lambda > 0, \\ \tilde{A} + \tilde{B} x & \text{wenn } \lambda = 0, \\ \tilde{A} \cos(\nu x) + \tilde{B} \sin(\nu x) & \text{wenn } \lambda < 0, \end{cases}$$

wobei $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$ und $\nu := \sqrt{|\lambda|} > 0$.

Insgesamt ergibt der Separationsansatz somit die **folgenden Lösungen**:

$$u(t, x) = \begin{cases} e^{(\alpha\nu)^2 t} (A e^{\nu x} + B e^{-\nu x}) & \text{wenn } \lambda > 0, \\ A + B x & \text{wenn } \lambda = 0, \\ e^{-(\alpha\nu)^2 t} (A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)) & \text{wenn } \lambda < 0, \end{cases}$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$ und $\nu = \sqrt{|\lambda|} > 0$. Dabei haben wir $\nu^2 = |\lambda|$ genutzt.

Da λ nur als Hilfsmittel im Separationsansatz eingeführt wurde und in den Lösungen nicht mehr auftaucht (die verschiedenen Fälle für λ stellen keine Einschränkungen an die Lösungen dar, solange $\nu > 0$ berücksichtigt wird) können wir auch schreiben

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{oder} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u(t, x) = e^{(\alpha\nu)^2 t} (A e^{\nu x} + B e^{-\nu x}) \\ u(t, x) = A + B x \\ u(t, x) = e^{-(\alpha\nu)^2 t} (A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)), \end{array} \quad (25.4)$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$ und $\nu > 0$.

Schritt 2: Dirichlet-Randbedingungen (DRB) einarbeiten

Welche der Lösungen aus Schritt 1 genügen (DRB)?

(1) Für $u(t, x) = e^{(\alpha\nu)^2 t} (A e^{\nu x} + B e^{-\nu x})$ finden wir:

$$0 = u(t, 0) = e^{(\alpha\nu)^2 t} (A + B) \implies A + B = 0 \implies B = -A,$$

und mit Einsetzen von $B = -A$ in $u(t, L) = 0$ erhalten wir

$$0 = u(t, L) = e^{(\alpha\nu)^2 t} (A e^{\nu L} + B e^{-\nu L}) \stackrel{B=-A}{=} e^{(\alpha\nu)^2 t} (A e^{\nu L} - A e^{-\nu L})$$

$$= A e^{(\alpha\nu)^2 t} (e^{\nu L} - e^{-\nu L}) \xrightarrow[\nu > 0]{L > 0} A = 0 \implies B = -A = 0.$$

Also ist die einzige Lösung dieses Typs von (WLG) mit (DRB) $u(t, x) = 0$.

(2) Für $u(t, x) = A + Bx$ finden wir:

$$\begin{aligned} 0 = u(t, 0) = A &\implies A = 0, \\ 0 = u(t, L) = A + BL &\stackrel{A=0}{=} BL \stackrel{L>0}{\implies} B = 0. \end{aligned}$$

Also ist die einzige Lösung dieses Typs von (WLG) mit (DRB) $u(t, x) = 0$.

(3) Für $u(t, x) = e^{-(\alpha\nu)^2 t} (A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x))$ finden wir:

$$\begin{aligned} 0 = u(t, 0) = e^{-(\alpha\nu)^2 t} (A \cos(0) + B \sin(0)) &= A e^{-(\alpha\nu)^2 t} \implies A = 0, \\ 0 = u(t, L) = e^{-(\alpha\nu)^2 t} (A \cos(\nu L) + B \sin(\nu L)) &\stackrel{A=0}{=} e^{-(\alpha\nu)^2 t} B \sin(\nu L) \\ \implies B \sin(\nu L) = 0 &\implies (B = 0 \text{ oder } \nu L \in \{k\pi : k \in \mathbb{N}\}). \end{aligned}$$

Für $B = 0$ erhalten wir nur die triviale Lösung $u(t, x) = 0$.

Für $\nu L \in \{k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ erhalten wir

$$\nu L = k\pi \iff \nu = \frac{k\pi}{L}.$$

Also finden wir die Lösungen

$$u(t, x) = B e^{-(\alpha \frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad B \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt liefert der Separationsansatz die folgenden Lösungen für die Wärmeleitungsgleichung (WLG) mit der Dirichlet-Randbedingung (DRB):

$$u(t, x) = c e^{-(\alpha \frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (25.5)$$

Leider erfüllt **keine** der Funktionen in (25.5) im Allgemeinen auch die Anfangsbedingung (AB). Die einzige Ausnahme ist, wenn die Temperatur zum Zeitpunkt $t = 0$ von der folgenden Form ist:

$$f(x) = B \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}.$$

Schritt 3: Superpositionsprinzip und Fourierreihen

Da die Wärmeleitungsgleichung (WLG) linear und homogen ist, ergibt das Superpositionsprinzip, dass auch

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N c_k e^{-(\alpha \frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

eine Lösung von (WLG) ist, wobei $N \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$. Diese Lösung genügt offensichtlich auch der Dirichlet-Randbedingung (DRB). Doch auch diese Lösung erfüllt nur dann die Anfangsbedingung (AB), wenn f eine spezielle Form hat, nämlich

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right).$$

Die Theorie der Fourierreihen (die unter anderem in der früheren HM D behandelt wurde) besagt, dass sich viele in der Praxis vorkommenden Funktionen f mit $f(0) = f(L) = 0$ als unendliche Reihe in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

mit $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$ schreiben lassen. Man kann zeigen, dass

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(\alpha \frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

dann eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (WLG) mit der Dirichlet-Randbedingung (DRB) und der Anfangswertbedingung (AB) ist.

Langzeitverhalten der Lösungen: Für die Lösungen (25.5) des Separationsansatzes für die (WLG) mit (DRB) gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} c e^{-(\alpha \frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = 0 \quad \text{für jedes } x \in [0, L].$$

Dieses ist auch physikalisch sinnvoll: Wird die Temperatur an den Stabenden konstant auf 0 gehalten, so wird die Temperatur im Stab langfristig gegen 0 streben.

Bemerkung 25.1. (inhomogene Randbedingungen)

Statt der Dirichlet-Randbedingungen (DRB) betrachten wir nun inhomogene Randbedingungen (IRB)

$$u(t, 0) = a, \quad u(t, L) = b \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (\text{IRB})$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ nicht beide gleich 0 sind. Die Funktion f in der Anfangsbedingung (AB) muss jetzt natürlich $f(0) = a$ und $f(L) = b$ erfüllen. Für diese Randbedingungen funktioniert der in Schritt 3 beschriebene Weg nicht, da eine Anwendung des Superpositionsprinzips die Randbedingungen „kaputt“ macht.

Wir betrachten zunächst die **stationären** Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (WLG), d.h. die Lösungen von (WLG), die außerdem

$$(\partial_t u)(t, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad (25.6)$$

erfüllen. Physikalisch bedeutet das, dass die Temperaturverteilung sich im zeitlichen Verlauf nicht ändert. Mathematisch ausgedrückt bedeutet das: u hängt nicht von t ab und wegen (25.6) vereinfacht sich die (WLG) zu

$$\alpha^2 \partial_x^2 u = 0 \quad \iff \quad \partial_x^2 u = 0. \quad (25.7)$$

Es folgt sofort aus (25.4) mit $\lambda = 0$

$$u(t, x) = A + Bx, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad (25.8)$$

denn dieses ist die einzige zeitunabhängige Lösung des Separationsansatzes. Unter der Berücksichtigung von $\partial_t u = 0$ folgt aus (25.7) mit direkter Integration

$$(\partial_x^2 u)(t, x) = 0 \quad \implies \quad (\partial_x u)(t, x) = B \quad \implies \quad u(t, x) = Bx + A,$$

und wir sehen, dass (25.8) auch die allgemeine zeitunabhängige/stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung (WLG) ist.

Mit der inhomogenen Randbedingung (IRB) erhalten wir für $u(t, x) = A + Bx$

$$\begin{aligned} a = u(t, 0) = A & \implies A = a, \\ b = u(t, L) = A + BL & \stackrel{A=a}{\implies} a + BL \implies B = \frac{b-a}{L}. \end{aligned}$$

Also ist

$$u_S(t, x) = a + \frac{b-a}{L}x$$

die stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung (WLG) mit der inhomogenen Randbedingung (IRB).

Eine Modifikation des Superpositionsprinzips (mit Hilfe der Theorie der Fourierreihen) besagt nun: Ist

$$f(x) = \underbrace{a + \frac{b-a}{L}x}_{= u_S(t,x)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

so ist

$$u(t,x) = \underbrace{a + \frac{b-a}{L}x}_{= u_S(t,x)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (WLG) mit der Anfangsbedingung (AB) und den inhomogenen Randbedingungen (IRB).

25.2 Die Wärmeleitungsgleichung in n Raumvariablen*

Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

Wir betrachten nun die **Wärmeleitungsgleichung in n Raumvariablen**

$$\partial_t u = \alpha^2 \Delta u \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

wobei $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \dots + \partial_n^2 u$ der Laplace Operator ist.

Für die **stationären Lösungen** von $\partial_t u = \alpha^2 \Delta u$ gilt

$$\partial_t u = 0,$$

d.h. u hängt nicht von der Zeit t ab, und die Wärmeleitungsgleichung vereinfacht sich zu

$$\alpha^2 \Delta u = 0 \quad \iff \quad \Delta u = 0.$$

Also sind die stationären Lösungen von $\partial_t u = \alpha^2 \Delta u$ genau die Lösungen der **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$.

Randbedingungen: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $B = \bar{\Omega}$. Man kann

$$\partial_t u = \alpha^2 \Delta u, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

mit unterschiedlichen Randbedingungen betrachten, z.B.

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

(1) **Dirichlet-Randbedingungen** (homogen):

$$u(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \partial B, \quad t \geq 0.$$

(2) **Neumann-Randbedingungen** (homogen):

$$(D_{\vec{N}}u)(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \partial B, \quad t \geq 0,$$

wobei \vec{N} das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an ∂B ist und $(D_{\vec{N}}u)(t, \vec{x})$ die Richtungsableitung von u in \vec{x} (zum Zeitpunkt t) in Richtung von $\vec{N}(\vec{x})$ ist. (Hier ist gefordert, dass ∂B stückweise glatt ist, so dass ein Einheitsnormalenvektorfeld $\vec{N} = \vec{N}_{\partial B}$ in fast allen Randpunkten existiert.)

Separationsansatz für $\partial_t u = \alpha^2 \Delta u$:

Wir suchen Lösungen der Form

$$u(t, \vec{x}) = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = T(t) X(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \partial_t u &= T' X, \\ \Delta u &= T \Delta X. \end{aligned}$$

Einsetzen in $\partial_t u = \alpha^2 \Delta u$ liefert (wenn T und X ungleich 0 sind)

$$T' X = \alpha^2 T \Delta X \quad \iff \quad \frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{\Delta X}{X}.$$

Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \lambda = \frac{\Delta X}{X} \quad \iff \quad \begin{cases} T' = \alpha^2 \lambda T \\ \Delta X = \lambda X. \end{cases} \iff T(t) = C e^{\alpha^2 \lambda t}, \quad C \in \mathbb{R},$$

Also muss man die **Helmholtz-Gleichung**

$$\Delta X = \lambda X \tag{25.9}$$

untersuchen. Es handelt sich dabei um eine **Eigenwertgleichung**, d.h. es werden solche „Eigenwerte“ $\lambda \in \mathbb{R}$ gesucht, für die es nicht-triviale Lösungen („Eigenfunktionen“) von (25.9) gibt.

25.3 Die Wellengleichung in einer Raumvariablen: Stehende Wellen mit Separationsansatz

Wir betrachten die folgende **Problemstellung**: Gegeben sei eine Seite der Länge L , die an den Enden fixiert ist. Wird die Seite angezupft, so beginnt sie zu schwingen. Wir wollen die (ungedämpfte) Schwingung mit Hilfe der Wellengleichung unter Zusatzbedingungen modellieren.

Mathematisches Modell: Wir legen die Seite auf die x -Achse eines zweidimensionalen Koordinatensystems und betrachten Auslenkungen in y -Richtung. (Dabei reicht die Seite von $(x, y) = (0, 0)$ bis $(x, y) = (L, 0)$ und ist in diesen beiden Punkten fixiert.) $u(t, x)$ sei die Auslenkung der Seite (in y -Richtung) im Punkt x zum Zeitpunkt t . $u(t, x)$ genügt der **Wellengleichung (WG)**

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u.$$

Außerdem gelten die homogenen **Dirichlet-Randbedingungen (DRB)**

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

und die **Anfangsbedingungen (AB)**

$$\begin{aligned} u(0, x) &= f(x) && \text{(Anfangsauslenkung),} \\ (\partial_t u)(0, x) &= g(x) && \text{(Anfangsgeschwindigkeit).} \end{aligned}$$

Wir betrachten also

$$\left. \begin{aligned} \partial_t^2 u &= c^2 \partial_x^2 u, & 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, & \text{(WG)} \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, & 0 \leq t \leq T, & \text{(DRB)} \\ u(0, x) &= f(x), \quad (\partial_t u)(0, x) = g(x), & 0 \leq x \leq L, & \text{(AB)} \end{aligned} \right\} \quad (25.10)$$

wobei $f(0) = f(L) = 0$ und $g(0) = g(L) = 0$ sein muss.

Schritt 1: Separationsansatz

Ansatz: $u(t, x) = T(t) X(x)$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u)(t, x) &= T''(t) X(x), \\ (\partial_x^2 u)(t, x) &= T(t) X''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Wellengleichung (WG) liefert

$$T''(t) X(x) = c^2 T(t) X''(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

d.h. wir bekommen die beiden gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad T''(t) = c^2 \lambda T(t), \quad (25.11)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad X''(x) = \lambda X(x). \quad (25.12)$$

Man könnte nun die allgemeine Lösung von (25.11) und (25.12) berechnen (siehe Übungszettel). Man kann sich aber Arbeit sparen, indem man bereits die (homogenen) Dirichlet-Randbedingungen (DRB) bei der Lösung von (25.12) berücksichtigt.

Schritt 2: Lösung von (25.12) mit (DRB)

(25.12) ist eine homogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mit unseren Kenntnissen aus der HM B (siehe Kapitel 14 im Skript der HM B) ergibt sich die allgemeine Lösung (siehe Übungszettel)

$$X(x) = \begin{cases} A e^{\nu x} + B e^{-\nu x} & \text{wenn } \lambda > 0, \\ A + B x & \text{wenn } \lambda = 0, \\ A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x) & \text{wenn } \lambda < 0, \end{cases} \quad (25.13)$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$ und $\nu := \sqrt{|\lambda|} > 0$ ist.

Die **Dirichlet-Randbedingungen** (DRB) liefern:

$$\begin{aligned} 0 &= u(t, 0) = T(t) X(0), \\ 0 &= u(t, L) = T(t) X(L). \end{aligned}$$

Ist $T \equiv 0$, so sind (DRB) automatisch erfüllt. Dann ist aber auch $u(t, x) = 0$, und wir erhalten nur die triviale Lösung $u \equiv 0$. Falls $T(t) \neq 0$ für ein t ist, so muss $X(0) = X(L) = 0$ gelten.

Welche der Lösungen (25.13) von $X''(t) = \lambda X$ genügen $X(0) = X(L) = 0$?

(1) Für $X(x) = A e^{\nu x} + B e^{-\nu x}$ finden wir

$$0 = X(0) = A + B \quad \Longrightarrow \quad A + B = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -A,$$

$$0 = X(L) = A e^{\nu L} + B e^{-\nu L} \stackrel{B=-A}{\downarrow} A (e^{\nu L} - e^{-\nu L})$$

$$\stackrel{\substack{L>0, \\ \nu>0}}{\downarrow} \Longrightarrow A = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0.$$

Also finden wir nur die triviale Lösung $X(x) = 0$ und somit $u(t, x) = T(t) X(x) = 0$.

(2) Für $X(x) = A + B x$ finden wir

$$0 = X(0) = A \quad \Longrightarrow \quad A = 0,$$

$$0 = X(L) = A + B L \stackrel{A=0}{\downarrow} B L = 0 \quad \stackrel{L>0}{\downarrow} \Longrightarrow B = 0.$$

Also finden wir nur die triviale Lösung $X(x) = 0$ und somit $u(t, x) = T(t) X(x) = 0$.

(3) Für $X(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$ finden wir

$$0 = X(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \quad \Longrightarrow \quad A = 0,$$

$$0 = X(L) = A \cos(\nu L) + B \sin(\nu L) \stackrel{A=0}{\downarrow} B \sin(\nu L)$$

$$\Longrightarrow B \sin(\nu L) = 0$$

$$\Longrightarrow B = 0 \quad \text{oder} \quad \nu L \in \{k \pi : k \in \mathbb{N}\}.$$

Für $B = 0$ erhalten wir nur die triviale Lösung $X(x) = 0$ und somit $u(t, x) = T(t) X(x) = 0$. Ansonsten erhalten wir

$$\nu L = k \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = \frac{k \pi}{L}$$

und damit die nichttrivialen Lösungen

$$X(x) = B \sin\left(\frac{k \pi}{L} x\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten also nur für $\lambda < 0$ nichttriviale Lösungen, und zwar

$$X(x) = B \sin\left(\frac{k \pi}{L} x\right),$$

wobei $B \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist.

Schritt 3: Lösung von (25.11) für $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 < 0$

Aus $\nu = \sqrt{|\lambda|} > 0$ folgt $\nu^2 = |\lambda|$ und für $\lambda < 0$ und $\nu = \frac{k\pi}{L}$

$$\lambda = -\nu^2 = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2.$$

Also ist (25.11) die homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$T''(t) = -\left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 T(t).$$

Da $-\left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 < 0$ ist erhalten wir die allgemeine Lösung (vgl. Kapitel 14 im Skript der HM B)

$$T(t) = C \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + D \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right), \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist also

$$\begin{aligned} u(t, x) = T(t) X(x) &= \left[C \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + D \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \right] B \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ &= \left[a \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + b \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \end{aligned} \tag{25.14}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, eine Lösung der Wellengleichung (WG) mit der Dirichlet-Randbedingungen (DRB).

Es gilt

$$(\partial_t u)(t, x) = \left[-a \frac{ck\pi}{L} \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + b \frac{ck\pi}{L} \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Damit sehen wir, dass (25.14) nur für

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \\ g(x) &= b \frac{ck\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

die Anfangswertbedingung (AB) erfüllt.

Schritt 4: Superpositionsprinzip und Fourierreihen

Da die Wellengleichung (WG) linear und homogen ist, ergibt das Superpositionsprinzip, dass auch

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos \left(\frac{c k \pi}{L} t \right) + b_k \sin \left(\frac{c k \pi}{L} t \right) \right] \sin \left(\frac{k \pi}{L} x \right)$$

eine Lösung der Wellengleichung (WG) ist, wobei $N \in \mathbb{N}$ und die Konstanten $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ sind. Diese Lösung genügt offensichtlich auch den Dirichlet-Randbedingungen (DRB). Doch diese Lösung erfüllt nur dann die Anfangsbedingungen, wenn gelten:

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin \left(\frac{k \pi}{L} x \right),$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^N b_k \frac{c k \pi}{L} \sin \left(\frac{k \pi}{L} x \right).$$

Mit Hilfe von Fourierreihen kann man aber für sehr viele Funktionen f und g eine Lösung der Wellengleichung (WG) mit der Dirichlet-Randbedingung (DRB) und der Anfangsbedingung (AB) bestimmen.

Physikalische Interpretation: Die Lösungen

$$u_k(t, x) = \left[a_k \cos \left(\frac{c k \pi}{L} t \right) + b_k \sin \left(\frac{c k \pi}{L} t \right) \right] \sin \left(\frac{k \pi}{L} x \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

aus Schritt 3 entsprechen verschiedenen Obertönen:

- u_1 : Grundton
- u_2 : erster Oberton
- u_3 : zweiter Oberton
- ⋮

Je nach Anfangsbedingungen sind die verschiedenen Obertöne „unterschiedlich stark“ in der Schwingung enthalten. (Je nachdem, wie man die Seite anzupft, klingt sie anders.)

25.4 Die Wellengleichung in einer Raumvariablen: allgemeine Lösung nach d'Alembert

In einer Raumdimension gibt es eine einfache Möglichkeit die Wellengleichung allgemein zu lösen, indem man eine geeignete **Koordinatentransformation** durchführt:

Wir lösen die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u \quad (25.15)$$

durch die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} y = x + ct \\ z = x - ct \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} t = \frac{1}{2c} (y - z) \\ x = \frac{1}{2} (y + z) \end{bmatrix}.$$

Dazu machen wir den Ansatz

$$u(t, x) = w(\underbrace{x + ct}_{=y}, \underbrace{x - ct}_{=z}),$$

um die Differentialgleichung für $w = w(y, z)$ zu berechnen. Mit dem Ansatz gilt:

$$(\partial_x u)(t, x) = (\partial_y w)(x + ct, x - ct) + (\partial_z w)(x + ct, x - ct),$$

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 u)(t, x) &= (\partial_y^2 w)(x + ct, x - ct) + (\partial_y \partial_z w)(x + ct, x - ct) \\ &\quad + (\partial_z \partial_y w)(x + ct, x - ct) + (\partial_z^2 w)(x + ct, x - ct) \\ &= (\partial_y^2 w)(x + ct, x - ct) + 2(\partial_y \partial_z w)(x + ct, x - ct) \\ &\quad + (\partial_z^2 w)(x + ct, x - ct), \end{aligned}$$

$$(\partial_t u)(t, x) = c [(\partial_y w)(x + ct, x - ct) - (\partial_z w)(x + ct, x - ct)],$$

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u)(t, x) &= c [c(\partial_y^2 w)(x + ct, x - ct) - c(\partial_y \partial_z w)(x + ct, x - ct) \\ &\quad - c(\partial_z \partial_y w)(x + ct, x - ct) + c(\partial_z^2 w)(x + ct, x - ct)] \\ &= c^2 [(\partial_y^2 w)(x + ct, x - ct) - 2(\partial_y \partial_z w)(x + ct, x - ct) \\ &\quad + (\partial_z^2 w)(x + ct, x - ct)], \end{aligned}$$

wobei wir beim Vereinfachen der zweiten Ableitungen den Satz von Schwarz genutzt haben unter der Annahme, dass u und w zweimal stetig differenzierbar sind.

Einsetzen in die Wellengleichung (25.15) ergibt, wobei wir nun $(y, z) = (x + ct, x - ct)$ bei w der Übersichtlichkeit weggelassen haben:

$$\begin{aligned} c^2 [\partial_y^2 w - 2 \partial_y \partial_z w + \partial_z^2 w] &= c^2 [\partial_y^2 w + 2 \partial_y \partial_z w + \partial_z^2 w] \\ \iff -2 c^2 \partial_y \partial_z w = 2 c^2 \partial_y \partial_z w &\iff 4 c^2 \partial_y \partial_z w = 0 \\ \iff \partial_y \partial_z w = 0 &\iff (\partial_y \partial_z w)(y, z) = 0 \\ \iff (\partial_z w)(y, z) = g(z) &\iff w(y, z) = \int g(z) dz + h(y). \end{aligned}$$

Mit

$$\Phi(y) := h(y) \quad \text{und} \quad \Psi(z) := \int g(z) dz$$

erhält man somit

$$w(y, z) = \Phi(y) + \Psi(z).$$

Für $u(t, x) = w(x + ct, x - ct)$ gilt also

$$u(t, x) = w(x + ct, x - ct) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \quad (25.16)$$

mit beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen Φ, Ψ . Diese allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer Raumdimension heißt auch die **Lösung von d'Alembert**.

Wir wollen nun die Lösungen der Wellengleichung aus Teilkapitel 25.3 mit der Lösung von d'Alembert vergleichen. Da die Lösung von d'Alembert (25.16) die allgemeine Lösung der Wellengleichung (25.15) ist, müssen sich auch die Lösungen aus Teilkapitel 25.3

$$u(t, x) = \left[a \cos\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) + b \sin\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

in der Form (25.16) schreiben lassen. Das ist tatsächlich der Fall. Mit $\omega := \frac{k\pi}{L}$ gilt

$$u(t, x) = a \cos(\omega ct) \sin(\omega x) + b \sin(\omega ct) \sin(\omega x).$$

Wegen (nach den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

gilt mit $\alpha = \omega x$ und $\beta = \omega ct$

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{a}{2} [\sin(\omega x + \omega ct) + \sin(\omega x - \omega ct)] \\
 &\quad + \frac{b}{2} [\cos(\omega x - \omega ct) - \cos(\omega x + \omega ct)] \\
 &= \left[\frac{a}{2} \sin(\omega x + \omega ct) - \frac{b}{2} \cos(\omega x + \omega ct) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{a}{2} \sin(\omega x - \omega ct) + \frac{b}{2} \cos(\omega x - \omega ct) \right] \\
 &= \left[\frac{a}{2} \sin(\omega(x + ct)) - \frac{b}{2} \cos(\omega(x + ct)) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{a}{2} \sin(\omega(x - ct)) + \frac{b}{2} \cos(\omega(x - ct)) \right] \\
 &= \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \Phi(y) &= \frac{a}{2} \sin(\omega y) - \frac{b}{2} \cos(\omega y), \\
 \Psi(z) &= \frac{a}{2} \sin(\omega z) + \frac{b}{2} \cos(\omega z).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung von d'Alembert kann man auch die Wellengleichung (WG) mit der Dirichlet-Randbedingung (DRB) und der Anfangsbedingung (AB) (siehe (25.10)) lösen. Das ist zwar kürzer und eleganter als der Lösungsweg aus Teilkapitel 25.3, aber man sieht die Obertöne dabei nicht und verliert so einen Teil der physikalischen Interpretation.

25.5 Die Wellengleichung in n Raumvariablen*

Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

Wir betrachten nun die **Wellengleichung in n Raumvariablen**, also

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u,$$

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

wobei $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2$ der Laplace-Operator ist.

Für die **stationären Lösungen** von $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ gilt

$$\partial_t u = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_t^2 u = 0,$$

d.h. u hängt nicht von t ab, und es gilt somit

$$\Delta u = 0.$$

Also sind die stationären Lösungen von $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ genau die Lösungen der **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$. Die Wellengleichung hat also dieselben stationären Lösungen wie die Wärmeleitungsgleichung.

Für die Wellengleichung $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ in n Raumvariablen sieht der **Separationsansatz** wie folgt aus:

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = T(t) X(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Dann finden wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= T'' X, \\ \Delta u &= T \Delta X. \end{aligned}$$

Einsetzen in $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ liefert

$$T'' X = c^2 T \Delta X \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta X}{X}.$$

Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \lambda = \frac{\Delta X}{X}.$$

Damit erhalten wir die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad T'' = \lambda c^2 T, \quad (25.17)$$

$$\frac{\Delta X}{X} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta X = \lambda X. \quad (25.18)$$

Der Separationsansatz führt also auf die **Helmholtz-Gleichung** (25.18) und die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (25.17).