



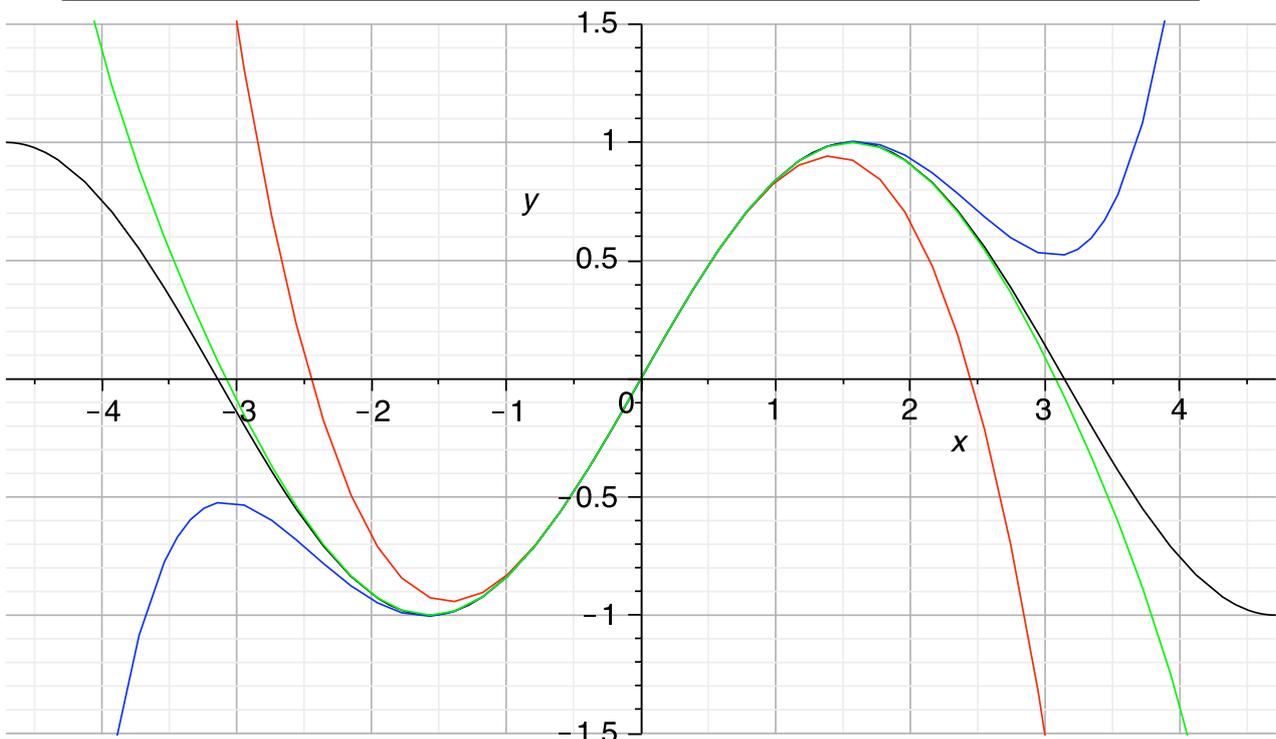
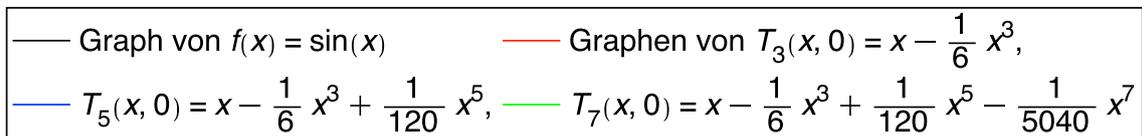
UNIVERSITÄT
PADERBORN

Mathematik für Chemiker

mit Zusatzmaterial und Beweisen

Kerstin Hesse

Universität Paderborn, Wintersemester 2024/25



Dieses Skript wurde im Sommer 2017 im Rahmen einer Reakkreditierung mit einer Neuabsprache der Inhalte der Vorlesung „Mathematik für Chemiker“ erstellt und im Februar 2018 noch einmal angepasst. Als Vorlagen dienten dabei das (alte) Skript für den Kurs „Mathematik für Chemiker“ der Autorin (im Umlauf: WS 2013/14 bis SS 2017). Als Vorlage für das alte Skript diente das Skript „Mathematik für Chemiker“ von Dieter Bothe, Hermann Hembd und Norbert Köckler (von 2005), sowie die Unterlagen diverser Vorlesungen, die die Autorin im Verlauf der letzten dreizehn Jahre an verschiedenen Universitäten im In- und Ausland gehalten hat. Insbesondere wurden aus dem Skript „Mathematik für Chemiker“ von Dieter Bothe, Hermann Hembd und Norbert Köckler die chemischen Anwendungsbeispiele übernommen.

Paderborn, Oktober 2024

Kerstin Hesse

Einleitung

Der Kurs „Mathematik für Chemiker“ behandelt die **grundlegenden mathematischen Techniken, welche Sie für Ihr Chemiestudium benötigen**. Dabei geht der Kurs an vielen Stellen deutlich über die Schulmathematik hinaus, und Sie werden feststellen, dass alles etwas „formalisierter“ und „abstrakter“ ist, als Sie es in der Regel aus der Schule gewöhnt sind. Dieses erfordert eine gewisse Umstellung, und es ist sehr wichtig, dass sie **Übungsaufgaben rechnen**, um sich mit den mathematischen Techniken und deren Anwendung vertraut zu machen.

Warum sollten Sie Zeit investieren, um diese mathematischen Techniken zu lernen? Mathematik ist die Sprache der Naturwissenschaften, denn physikalische, chemische und technische Phänomene lassen sich nur mit der Sprache der Mathematik exakt beschreiben und modellieren. So können in der Chemie zum Beispiel Reaktionsvorgänge mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden. In der Quantenphysik/Quantenchemie kommen Sie ohne mathematische Techniken und Notation nicht aus und nutzen auch mathematische Techniken, die weit über den Inhalt dieses Kurses hinausgehen. Um dieses zu verdeutlichen, finden Sie im Anhang A des Skripts einige Beispiele zu Anwendungen aus der Chemie und Physik.

Was wird in dem Kurs besprochen?

Im „**Teil I: Grundlagen**“ lernen wir in Kapitel 1 zunächst Mengennotation und Mengenoperationen, den binomischen Satz und das Rechnen mit Ungleichungen kennen. In Kapitel 2 lernen wir die grundlegenden Begriffe zu Funktionen und die wichtigen klassischen Funktionen kennen. Dabei werden auch die neuen Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv eingeführt, damit wir den Begriff der Umkehrfunktion definieren können. In Kapitel 3 werden schließlich die komplexe Zahlen einschließlich ihrer Polardarstellung eingeführt.

Im „**Teil II: Analysis**“ besprechen wir die Themenbereiche Folgen reeller Zahlen in Kapitel 4 (als Vorbereitung für die nachfolgenden Themen), Stetigkeit von Funktionen in Kapitel 5, Differenzierbarkeit in Kapitel 6 und Integration in Kapitel 7. Die große Hürde der Analysis ist es, ein richtiges Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, welcher in der Schule nur intuitiv benutzt wird. Der

Grenzwertbegriff begegnet uns zuerst bei der Konvergenz von Folgen reeller Zahlen; danach bauen Stetigkeit, der Begriff der Ableitung und der Begriff des Integrals auf den Grenzwertbegriff auf.

Im „**Teil III: Differentialgleichungen**“ (Kapitel 8 und 9) werden Sie komplett neue Inhalte kennenlernen. Das einfachste Beispiel einer Differentialgleichung ist $y' = -ky$, wobei k eine positive Konstante ist und $y = y(t)$ eine unbekannte zeitabhängige Funktion. Diese Differentialgleichung beschreibt den radioaktiven Zerfall; hierbei ist dann $y(t)$ die Menge der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t . Das Lösen einer solchen Differentialgleichung bedeutet, dass wir die Funktionen $y = y(t)$ finden, die diese Differentialgleichung erfüllen. Für die Differentialgleichung $y'(t) = -ky(t)$ erfüllen alle Funktionen $y(t) = ce^{-kt}$ (mit beliebigen Konstanten c) diese Differentialgleichung.

Im „**Teil IV: Lineare Algebra**“ lernen wir Vektoren in Kapitel 10 und lineare Gleichungssysteme und Matrizen in Kapitel 11 kennen. In Kapitel 12 lernen wir weiterführende Konzepte und Resultate für Vektoren, und in Kapitel 13 begegnen uns (für quadratische Matrizen) die inverse Matrix, die Determinante, sowie Eigenwerte und Eigenvektoren. Obwohl diese Themen nicht immer und in der Regel auch höchstens unvollständig in der Schule behandelt wurden, sind sie in der Regel relativ gut zugänglich.

Was für mathematisches Wissen wird vorausgesetzt? Generell werden in diesem Kurs im wesentlichen grundlegende Rechentechniken aus der Mittelstufe vorausgesetzt, aber je mehr Mathematik Sie bereits beherrschen, desto besser sind sie natürlich auf den Kurs vorbereitet. Erwartet wird vor allem, dass Sie **grundlegende Rechentechniken wie das Rechnen mit Ungleichungen, die Bruchrechnung und die binomischen Formeln beherrschen**. Wenn Sie bei diesen grundlegenden Rechentechniken Defizite haben, müssen Sie selbst daran arbeiten, diese zu beheben! (Hinweis: In der Klausur gibt es weder einen Taschenrechner noch eine Formelsammlung!) Im Anhang B des Skripts finden Sie einige Informationen zu den Grundlagen aus der Mittelstufe zusammengestellt. Weiterführendes Material wird in der Regel vollständig eingeführt.

Wie sollte man dieses Skript verwenden, und wie sollte man für den Kurs lernen?

- **Kommen Sie immer zu den Vorlesungen und nehmen Sie aktiv an diesen teil.** Sie sollten das Skript oder die Vorlesungsfolien in die Vorlesungen mitbringen, und sich das Skript bei Bedarf annotieren bzw. die Folien annotieren und die gerechneten Beispiele mitschreiben.
- **Lassen Sie sich in den Vorlesungen nicht durch Ihr Smartphone, Tablet oder Handy ablenken!** Nur wenn Sie sich ganz auf die Vorlesung

konzentrieren, haben Sie eine Chance, die mathematischen Inhalte direkt in der Vorlesung zu verstehen.

- **Gehen Sie immer zu Ihrer Übungsgruppe/Ihrem Tutorium und bearbeiten Sie die Gruppenübungen** (diese werden im Tutorium bearbeitet) und die **Hausübungen** (diese sollten Sie nach dem Tutorium zu Hause bearbeiten). **Mathematik lernt sich nur durch Übung, d.h. indem man die mathematischen Techniken für Beispiele und Übungsaufgaben anwendet.** Daher ist es unerlässlich, dass Sie die Übungsaufgaben bearbeiten!
- Gehen Sie **vorbereitet** zu Ihrer Übungsgruppe/Ihrem Tutorium, d.h. schauen Sie den Übungszettel vorher gründlich an, so dass Sie in der Übung direkt mit den Gruppenübungen beginnen können und **dort, wo sie Probleme haben, konkret fragen können.** Ohne eine solche Vorbereitung nutzen Sie die Unterstützung durch die Tutorinnen und Tutoren nicht optimal.
- **Wenn Sie die Übungsaufgaben lösen, dann sollten Sie parallel dazu das zugehörige Material aus den Vorlesungen nacharbeiten.** Dies geht ganz „natürlich“, denn die Übungsaufgaben sind so konzipiert, dass Sie mit Ihnen den Vorlesungsstoff anwenden und üben. Das Nacharbeiten kann mit den Vorlesungsfolien und Ihren handschriftlichen Notizen und/oder mit diesem Skript erfolgen. Das Skript ist dabei wesentlich ausführlicher als die Folien und der Tafelanschrieb zu den Beispielen. Im Skript finden Sie weitere und teilweise andere Beispiele und zusätzliche Erklärungen. Das Skript kann wie ein Lehrbuch verwendet werden.
- **Was machen Sie, wenn Sie etwas nicht verstehen?** Wichtig ist vor allem, zu wissen, dass dies bei mathematischen Themen völlig normal ist und allen Studierenden hin und wieder passiert. Allerdings dürfen Sie es nicht beim „Nicht-Verstehen“ belassen, sondern müssen daran arbeiten, die Verständnisprobleme zu beheben. – Was können Sie tun, um ein Verständnisproblem zu beheben?
 - Geben Sie nicht auf, sondern befassen Sie sich weiter mit dem Material! Manche mathematischen Themen muss man mehrfach studieren, bis „der Groschen fällt“.
 - Fragen Sie Ihre Kommilitoninnen und Kommilitonen danach und diskutieren Sie mit ihnen darüber.
 - Fragen Sie den Dozenten in den Vorlesungen oder die Tutorin bzw. den Tutor in den Übungen.
 - Schauen Sie die zu dem Material gehörigen Beispiele an: Mathematik lernt sich durch das Verständnis der Beispiele! Wenn Sie das Beispiel verstehen, dann wird die mathematische Technik klarer. Können Sie nun vielleicht ein ähnliches Beispiel selber durchrechnen? Wenn ja,

dann sind Sie einen Schritt weiter gekommen.

- Nutzen Sie die Gelegenheit und trauen Sie sich, in den **Vorlesungen und in den Übungen Fragen zu stellen**. Es gibt keine dummen Fragen, sondern dumm ist nur, wenn man nicht fragt und ignorant bleibt. Die Vorlesungen und die Übungen sind dazu da, Sie beim Lernen zu unterstützen – also machen Sie von der Gelegenheit, Fragen zu stellen, Gebrauch!
- **Gruppenarbeit:** Gruppenarbeit ist nützlich und kann sehr produktiv sein. Übungsaufgaben sind oft leichter zu lösen, wenn verschiedene Personen ihre Ideen beisteuern. Indem Sie sich von anderen etwas erklären lassen, lernen Sie etwas dazu. Wenn Sie anderen etwas erklären, so lernen Sie auch etwas dazu und gewinnen größere Klarheit über das bereits verstandene Material. Wichtig ist aber, dass Sie nach der Gruppenarbeit nun auch in der Lage sind, die gelösten Aufgaben **eigenständig zu rechnen**, denn in der Klausur sind Sie auf sich alleine gestellt und haben keine Gruppe zur Hand.
- **Klausurvorbereitung:** Wenn Sie während des Semesters die Vorlesungen gut nachgearbeitet haben und die Übungsaufgaben erfolgreich gelöst haben, dann sind Sie bereits gut vorbereitet. Wiederholen Sie den Stoff noch einmal, rechnen Sie zu allen Themen passende Übungsaufgaben und lernen Sie das nötige Wissen. (Es gibt in der Klausur keine Formelsammlung, keinen Taschenrechner und keine sonstigen Hilfsmittel!)

Zum Schluss noch eine **Warnung: Mathematische Themen bauen aufeinander auf!** Man kann sich als gutes Modell den Bau einer Mauer vorstellen. Wo Sie Wissens- und Verständnislücken haben, fehlen Ziegelsteine und die Mauer wird instabil und kann in den höheren Mauerreihen sogar einbrechen. Es ist daher ganz wichtig, dass Sie beim Nacharbeiten und Verstehen der Vorlesungsinhalte „am Ball bleiben“, damit Ihre Mauer aus mathematischem Wissen keine Lücken aufweist und Sie erfolgreich an der „Mathematik für Chemiker“ teilnehmen.

Ich freue mich auf Ihre Teilnahme an der „Mathematik für Chemiker“!

Literaturverzeichnis

Bei der Erstellung dieses Skripts wurde die unten aufgelistete Literatur verwendet:

- [1] Dieter Bothe, Hermann Hembd, Norbert Köckler: Mathematik für Chemiker. Vorlesungsskript, 2005.
- [2] Kerstin Hesse: Höhere Mathematik A für Elektrotechniker. Vorlesungsskript, Universität Paderborn, 2016.
- [3] Kerstin Hesse: Höhere Mathematik B für Elektrotechniker. Vorlesungsskript, Universität Paderborn, 2016.
- [4] Kerstin Hesse: Mathematik für Chemiker. (altes) Vorlesungsskript, Universität Paderborn, 2016.
- [5] Hans Gerhard Zachmann, Ansgar Jüngel: Mathematik für Chemiker. WILEY-VCH Verlag, Weinheim, 2007.

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen	1
1	Grundlagen und Notation	3
1.1	Mengen und Elemente	3
1.2	Mengenoperationen	9
1.3	Der binomische Satz	13
1.4	Ungleichungen und Betrag	18
2	Funktionen	29
2.1	Funktionen: Definition und Beispiele	30
2.2	Polynomfunktionen und rationale Funktionen	34
2.3	Grundlegende Eigenschaften von reellwertigen Funktionen	39
2.4	Die klassischen Funktionen	44
2.5	Die Umkehrfunktion	51
2.6	Die Umkehrfunktionen der klassischen Funktionen	56
2.7	Verkettung von Funktionen	63
3	Komplexe Zahlen	67
3.1	Einführung in die komplexen Zahlen	68
3.2	Das Lösen quadratischer Gleichungen	73
3.3	Polardarstellung komplexer Zahlen	76
3.4	Komplexe Nullstellen von Polynomen*	83
II	Analysis	87
4	Folgen in \mathbb{R}	89

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

4.1	Folgen in \mathbb{R} : Definition und Eigenschaften	89
4.2	Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}	93
4.3	Nullfolgen in \mathbb{R}	102
4.4	Rechnen mit konvergenten Folgen in \mathbb{R}	106
4.5	Konvergenzkriterien für Folgen in \mathbb{R}	113
4.6	Uneigentliche Grenzwerte für Folgen in \mathbb{R}	116
5	Stetigkeit reeller Funktionen	121
5.1	Definition und einfache Eigenschaften	121
5.2	Konvergenz für $x \rightarrow u$	127
5.3	Einseitige Grenzwerte	129
5.4	Wichtige Sätze über stetige Funktionen	136
6	Differenzierbarkeit	141
6.1	Die Ableitung	142
6.2	Rechenregeln für Ableitungen	144
6.3	Lokale Extrema: notwendige Bedingung	152
6.4	Der Mittelwertsatz	157
6.5	Die Regeln von de l'Hôpital	160
6.6	Höhere Ableitungen und Satz von Taylor	166
6.7	Lokale Extrema: hinreichende Bedingung	173
7	Integration	177
7.1	Das Riemann-Integral	178
7.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	189
7.3	Partielle Integration	194
7.4	Die Substitutionsregel	199
7.5	Substitutionen für spezielle Integranden	203
7.6	Integration rationaler Funktionen	213
7.7	Uneigentliche Riemann-Integrale*	223
III	Gewöhnliche Differentialgleichungen	231
8	Differentialgleichungen erster Ordnung	233
8.1	Differentialgleichungen erster Ordnung: Definition und Beispiele . .	233

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

8.2	Trennung der Variablen	237
8.3	Lineare DGLen erster Ordnung: die homogene Gleichung	241
8.4	Lineare DGLen erster Ordnung: die inhomogene Gleichung	245
9	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	251
9.1	Einführung und Lösungstheorie zu linearen DGLen 2-ter Ordnung .	251
9.2	Homogene lineare DGLen 2-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten .	254
9.3	Inhomogene lineare DGLen 2-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten	261
9.4	Anfangswertaufgaben	268
IV	Lineare Algebra	273
10	Vektoren: Grundlagen	275
10.1	Spaltenvektoren	275
10.2	Vektoraddition	281
10.3	Multiplikation mit Skalaren	283
10.4	Ortsvektoren und Verbindungsvektoren	286
10.5	Kreise in \mathbb{R}^2 und Kugeloberflächen in \mathbb{R}^{3*}	289
10.6	Das Skalarprodukt	291
10.7	Geraden in \mathbb{R}^2 und Ebenen in \mathbb{R}^{3*}	299
10.8	Das Vektor- oder Kreuzprodukt	303
11	Matrizen und lineare Gleichungssysteme	309
11.1	Matrizen und Vektoren	309
11.2	Lineare Gleichungssysteme: Notation	324
11.3	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	326
11.4	Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme	336
12	Vektoren: Weiterführende Resultate	341
12.1	Untervektorräume	341
12.2	Linearkombinationen	347
12.3	Lineare Unabhängigkeit	352
12.4	Basis und Dimension	358
12.5	Orthogonalität*	367

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

13 Quadratische Matrizen	375
13.1 Einführung zu quadratischen Matrizen	375
13.2 Invertierbare Matrizen	378
13.3 Die Determinante	387
13.4 Rechenregeln für Determinanten	395
13.5 Einige Anwendungen von Determinanten	403
13.6 Eigenwerte und Eigenvektoren	410
V Anhänge	423
A Anwendungsbeispiele aus Chemie und Physik	425
A.1 Gleitkommadarstellung bei chemischen Berechnungen	425
A.2 Trigonometrie bei Molekülmodellen	426
A.3 Logarithmische Skala zur Linearisierung	430
A.4 Differentialgleichungen zur Modellierung chemischer Reaktionen . .	431
B Grundlagen aus der Mittel- und Oberstufe	445
B.1 Rechnen mit reellen Zahlen	445
B.2 Bruchrechnung	447
B.3 Potenzen und Wurzeln	448
B.4 Rechnen mit der Gleitkommadarstellung	453
B.5 Das Lösen quadratischer Gleichungen	456
B.6 Sinus und Cosinus als Kreisfunktionen	461
B.7 Summen	467
C Nützliche Tabellen	471
D Mathematische Aussagen und Beweistechniken	475
D.1 Mathematische Aussagen	475
D.2 Implikationen und Äquivalenzen	482
D.3 Beweistechniken	488
D.4 Beweis durch vollständige Induktion	494

Teil I

Grundlagen

KAPITEL 1

Grundlagen und Notation

In Teilkapiteln 1.1 und 1.2 lernen wir Mengen, Mengennotation sowie Operationen für Mengen, nämlich die Vereinigung, den Durchschnitt und die Differenz von Mengen, sowie das kartesische Produkt zweier oder mehrerer Mengen kennen.

In Teilkapitel 1.3 lernen wir als Verallgemeinerung der ersten und zweiten binomischen Formel den binomischen Satz kennen.

In Teilkapitel 1.4 lernen wir den Absolutbetrag kennen und sehen, was beachtet werden muss, wenn wir mit Ungleichungen rechnen.

1.1 Mengen und Elemente

Wir beginnen die Einführung von Mengen mit der historischen Definition einer Menge von Georg Cantor (1845–1918).

Definition 1.1. (Menge nach Georg Cantor)

*Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.*

Bemerkung 1.2. (Cantors Definition einer Menge)

(1) In der Erklärung Cantors wird nicht genauer geregelt, welche „Objekte“

man zu Mengen zusammenfassen darf. Dieses ist der Standpunkt der sogenannten naiven Mengenlehre (im Gegensatz zur mathematisch strengen axiomatischen Mengenlehre).

- (2) Es muss (zumindest prinzipiell) feststehen, ob ein Objekt ein Element einer Menge M ist oder nicht. Die Entscheidung darüber darf nicht subjektiv sein.
- (3) Die Elemente einer Menge M müssen „wohlunterschieden“ sein, d.h. für Elemente x, y von M muss zumindest prinzipiell feststehen, ob $x = y$ oder $x \neq y$ gilt.
- (4) Mengen selbst sind wieder „Objekte unseres Denkens“ und können daher als Elemente neuer Mengen auftreten.

Beispiel: Menge aller Geraden in der Ebene (denn Geraden sind Punktmen-
gen).

- (5) Allerdings ist die Zusammenfassung aller Mengen zu einer Menge aller Mengen nicht erlaubt, weil dieses zu Widersprüchen führen würde.

Betrachten wir einige Beispiele für Mengen.

Beispiel 1.3. (Zahlenmengen)

\mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, \dots$

\mathbb{N}_0 Menge der natürlichen Zahlen mit null: $0, 1, 2, 3, \dots$

\mathbb{Z} Menge der ganzen Zahlen: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

\mathbb{Q} Menge der rationalen Zahlen (oder Brüche)

\mathbb{R} Menge der reellen Zahlen

Diese Zahlenmengen werden hier nicht näher erklärt, sondern als aus der Schule bekannt vorausgesetzt.

Beispiel 1.4. (Mengen)

(a) $A = \{1, 2, 3, 7, 9, -16, \pi\}$

(b) $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

(c) $C =$ Menge der Erstsemesterstudierenden der Uni Paderborn im Wintersemester 2016/17

(d) $D = \{0, \alpha, 17\}$

(e) $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

Notation 1.5. (Mengenklammern und Elementsymbol)

Wie wir bereits in Beispiel 1.4 gesehen haben, schreibt man Mengen mit geschweif-

ten Klammern „{“ und „}“, sogenannten **Mengenklammern**. Weiter schreiben wir:

- „ $a \in M$ “ für „ a ist ein Element der Menge M “ oder kurz „ a ist in M “.
- „ $a \notin M$ “ für „ a ist kein Element der Menge M “ oder kurz „ a ist nicht in M “.

Beispiel: Es gilt $0 \in \mathbb{N}_0$ und $0 \notin \mathbb{N}$. Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Man nennt „ \in “ das **Elementsymbol**.

Wir legen zunächst fest, wann zwei Mengen gleich sind, und lernen die leere Menge kennen.

Definition 1.6. (Gleichheit von Mengen und leere Menge)

- (1) Zwei Mengen A, B heißen **gleich** (in Zeichen: $A = B$), wenn sie dieselben Elemente enthalten. Sind zwei Mengen A, B **nicht gleich**, so schreiben wir in Zeichen $A \neq B$.
- (2) Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die **leere Menge** und wird mit \emptyset (oder auch $\{\}$) bezeichnet.

Betrachten wir noch ein Beispiel, um uns klar zu machen, wie wir Mengen darstellen.

Bemerkung 1.7. (Darstellung von Mengen)

Es sei M die Menge, deren Elemente die Zahlen 1, 2 und 3 sind. Dann lässt sich M mathematisch beschreiben durch:

- (1) Aufzählung ihrer Elemente:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

aber es gilt z.B. auch

$$\begin{aligned} M &= \{2, 1, 3\}, & M &= \{3, 2, 1\}, & M &= \{1, 3, 2\}, \\ M &= \{2, 3, 1\}, & M &= \{3, 1, 2\}, & M &= \{1, 2, 3, 1\}. \end{aligned}$$

Die Reihenfolge, in der die Elemente aufgelistet werden, spielt keine Rolle. Ebenso ändert eine mehrfache Auflistung von Elementen die Menge nicht.

- (2) Angabe einer Auswahleigenschaft:

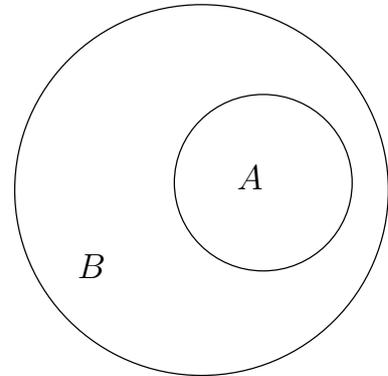
$$M = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\} = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 3\}$$

Dabei bedeutet „:“ in der obigen Zeile „für die gilt“ oder „so dass“.

Wir führen nun Relationen für Mengen ein.

Definition 1.8. (Teilmenge und Obermenge)

- (1) Eine Menge A heißt eine **Teilmenge** einer Menge B (in Zeichen: $A \subseteq B$), wenn jedes Element von A auch in B liegt. B wird dann auch als eine **Obermenge** von A bezeichnet (in Zeichen: $B \supseteq A$).
- (2) Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A eine **echte Teilmenge** von B (in Zeichen: $A \subsetneq B$). Ist $B \supseteq A$ und $B \neq A$, so heißt B eine **echte Obermenge** von A (in Zeichen: $B \supsetneq A$).



Wir sehen: Wenn A eine **echte** Teilmenge von B ist, so ist B eine Obermenge von A , und B enthält **mindestens ein** Element, welches nicht in A ist.

Die Zeichnung neben Definition 1.8 ist ein **Euler-Venn-Diagramm**, mit dem man Mengen veranschaulichen kann: Mengen werden als kreisförmige Gebilde dargestellt, und alles (also alle Elemente) innerhalb des kreisförmigen Gebildes gehören zu der jeweiligen Menge.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1.9. (Teilmengen und Obermengen)

- (a) Seien $A := \{1, 3\}$ und $B := \{1, 2, 3\}$. Dann gilt $A \subseteq B$ und $B \supseteq A$. Es gilt sogar $A \subsetneq B$ und $B \supsetneq A$.
- (b) Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Natürlich gilt auch $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- (c) Sei $C := \{1, 2, \{3, 4\}\}$. Dann gilt z.B. $\{1, 2\} \subseteq C$ und $\{\{3, 4\}\} \subseteq C$ und $\{1, \{3, 4\}\} \subseteq C$, aber $\{1, 2, 3\}$ ist keine Teilmenge von C . Es gilt auch nicht $\{3, 4\} \subseteq C$, denn die Menge $\{3, 4\}$ ist ein Element von C (und keine Teilmenge). – Genauer hat C die drei Elemente 1, 2 und $\{3, 4\}$. Jede Teilmenge von C ist entweder die leere Menge oder eine Menge, welche ein, mehrere oder alle Elemente von C (als Elemente) enthält.
- (d) Die leere Menge \emptyset ist eine Teilmenge jeder Menge.

Notation 1.10. („wird definiert durch“)

Die im letzten Beispiel verwendete Notation „:=“ steht für „wird definiert durch“. Also: „ $A := \{1, 3\}$ “ bedeutet, dass die Menge A als die Menge $\{1, 3\}$ mit den

Elementen 1 und 3 definiert ist. Der Doppelpunkt steht dabei immer auf der Seite des Objekts, welches definiert wird. „ $\mathbb{N} =: B$ “ und „ $B := \mathbb{N}$ “ bedeuten also beide, dass wir die Menge B als die Menge der natürlichen Zahlen definieren.

Wir halten fest, welche Teilmengen-Beziehungen gelten, wenn zwei Mengen gleich sind.

Bemerkung 1.11. (gleiche Mengen)

Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ ist. In Zeichen:

$$A = B \quad \iff \quad (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A) \quad (1.1)$$

Notation 1.12. (Pfeile und Doppelpfeile)

- (1) Ein **Folgerungspfeil** „ \implies “ bedeutet „daraus folgt“. Also bedeutet

$$x = 2 \quad \implies \quad x^2 = 4, \quad (1.2)$$

dass aus $x = 2$ die Gleichung $x^2 = 4$ folgt. Dieses ist das gleiche wie

$$x^2 = 4 \quad \impliedby \quad x = 2.$$

Eine Aussage mit einem Folgerungspfeil nennt man eine **Implikation**.

- (2) Der in (1.1) verwendete Doppelpfeil „ \iff “, genannt **Äquivalenzpfeil**, steht für „genau dann, wenn“ und bedeutet das gleiche, wie wenn wir die Formel zweimal hinschreiben, wobei „ \iff “ einmal durch „ \implies “ und einmal durch „ \impliedby “ ersetzt wird. Also bedeutet (1.1), dass die **beiden** folgenden Aussagen gelten:

$$\begin{aligned} A = B &\implies (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A), \\ (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A) &\implies A = B. \end{aligned}$$

Eine Aussage mit einem Äquivalenzpfeil nennt man eine **Äquivalenz** (oder eine **Äquivalenzaussage**).

- (3) Es ist **nicht egal**, ob man bei einer Reihe von mathematischen Überlegungen „ \implies “ oder „ \iff “ schreibt! In (1.2) ist es falsch, wenn wir schreiben

$$x = 2 \quad \iff \quad x^2 = 4,$$

denn die Aussage

$$x^2 = 4 \quad \implies \quad x = 2$$

ist falsch! Richtig wäre

$$x^2 = 4 \quad \implies \quad (x = 2 \text{ oder } x = -2),$$

und es gilt sogar

$$x^2 = 4 \quad \iff \quad (x = 2 \text{ oder } x = -2).$$

Zuletzt halten wir die Notation für Intervalle fest.

Definition 1.13. (Intervalle)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die **beschränkten Intervalle** sind:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (\text{abgeschlossenes Intervall}),$$

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (\text{offenes Intervall}),$$

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (\text{halboffenes Intervall}),$$

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (\text{halboffenes Intervall}).$$

Die **unbeschränkten Intervalle** sind:

$$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$$

$$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$

$$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}.$$

Dabei steht das Symbol „ ∞ “ für „unendlich“. Bei ∞ bzw. $-\infty$ steht immer die nach außen geöffnete Klammer, da weder ∞ noch $-\infty$ reelle Zahlen sind und daher nicht zum Intervall gehören.

Beispiel 1.14. (Intervalle)

(a) $] - 1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 3\}$

Das Intervall ist nicht zu verwechseln mit der Menge $\{-1, 3\}$ welche die Zahlen -1 und 3 als Elemente enthält.

(b) $] - \infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ enthält alle negativen reellen Zahlen.

Bemerkung 1.15. (alternative Intervallnotation)

Es gibt auch eine alternative Intervallnotation für die offenen und halboffenen

Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ schreibt man

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, & [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, & (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, & (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die abgeschlossenen Intervalle schreibt man wie oben.

1.2 Mengenoperationen

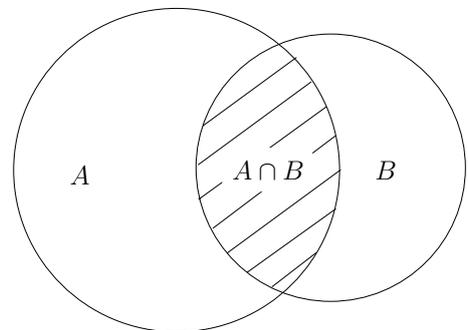
In diesem Teilkapitel lernen wir die folgenden Mengenoperationen kennen: das Schneiden und das Vereinigen von Mengen, sowie das Bilden einer Differenzmenge. Alle Mengenoperationen werden durch Euler-Venn-Diagramme veranschaulicht.

Definition 1.16. (Durchschnitt von Mengen und disjunkte Mengen)

- (1) Der **Durchschnitt** $A \cap B$ der Mengen A, B ist die Menge

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

- (2) Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A, B **disjunkt**.



Der Durchschnitt zweier Mengen wird auch **Schnittmenge** genannt.

Es gilt immer $A \cap B = B \cap A$.

Beispiel 1.17. (Durchschnitt von Mengen)

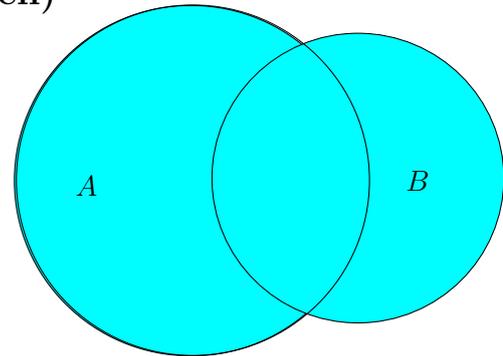
- (a) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$
 (b) $\mathbb{Z} \cap [0, \infty[= \mathbb{N}_0$
 (c) $[2, 7] \cap]3, 11[=]3, 7]$
 (d) Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} und das Intervall $[-1, 0]$ sind disjunkt, denn $\mathbb{N} \cap [-1, 0] = \emptyset$.

Definition 1.18. (Vereinigung von Mengen)

Die **Vereinigung** $A \cup B$ der Mengen A, B ist die Menge

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Mit „oder“ ist das „einschließende oder“ gemeint (und nicht „entweder ... oder“).



Also: $x \in A \cup B$ liegt in A oder in B oder auch in beiden Mengen A und B .

Es gilt immer $A \cup B = B \cup A$.

Beispiel 1.19. (Vereinigung von Mengen)

(a) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

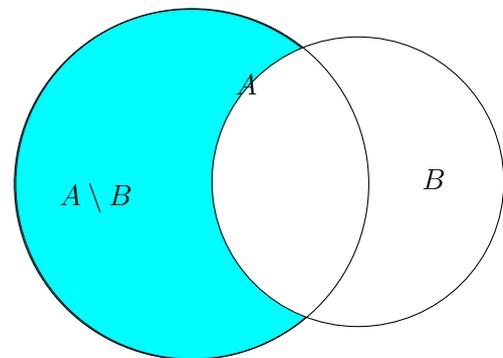
(b) $] - \infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, \infty[= \mathbb{R}$

Definition 1.20. (Differenz von Mengen)

(1) Die **Differenz** $A \setminus B$ („ A ohne B “) der Mengen A, B ist die Menge

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

(2) Ist $B \subseteq A$, so heißt $A \setminus B$ auch das **Komplement von B in A** .

**Beispiel 1.21. (Differenz von Mengen)**

(a) $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\}, \quad \{3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\}$

(b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 = \{-1, -2, -3, \dots\} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

Wir sehen, dass im Allgemeinen gilt: $A \setminus B \neq B \setminus A$

Bemerkung 1.22. (Ausführen mehrerer Mengenoperationen)

Wendet man mehrere Mengenoperationen an, so ist es ganz wichtig, dass **Klammern gesetzt sind**, damit klar ist, in welcher Reihenfolge die Mengenoperatio-

nen auszuführen sind! Beispielsweise gilt im Allgemeinen (d.h. bis auf mögliche Sonderfälle)

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &\neq (A \setminus B) \cup C, \\ A \cap (B \cup C) &\neq (A \cap B) \cup C, \end{aligned}$$

wie man sich leicht an den folgenden Beispielen klar macht:

Seien $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{-1, 0, 1, 2\}$ und $C := \{3, 4, 5, 6\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \emptyset \\ &\neq (A \setminus B) \cup C = \{3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}, \\ A \cap (B \cup C) &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ &\neq (A \cap B) \cup C = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Es gibt Ausnahmen, bei denen man keine Klammern setzen muss, nämlich wenn alle Mengenoperationen \cup oder wenn alle Mengenoperationen \cap sind:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C. \end{aligned}$$

Weil die Klammersetzung hier keine Rolle spielt, lässt man sie (wie jeweils im Ausdruck ganz rechts) in der Regel weg.

Als Letztes lernen wir das kartesische Produkt kennen.

Definition 1.23. (geordnetes Paar und kartesisches Produkt)

Seien A, B Mengen.

- (1) Ein Objekt der Form (a, b) mit $a \in A, b \in B$ heißt ein **geordnetes Paar**.
- (2) $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ (in Worten: „A kreuz B“) ist das **kartesische Produkt von A und B**.

Bemerkung 1.24. (geordnetes Paar und kartesisches Produkt)

- (1) Der Name **geordnetes** Paar macht deutlich, dass **die Reihenfolge eine Rolle spielt**. Im Allgemeinen (d.h. bis auf Sonderfälle) ist also $(a, b) \neq (b, a)$. Genauer gilt $(a, b) = (b, a)$ genau dann, wenn $a = b$ ist.
- (2) Im Allgemeinen (d.h. bis auf Sonderfälle) gilt $A \times B \neq B \times A$. (Siehe dazu auch Beispiel 1.25 (a).)

- (3) Man kann für Mengen A, B, C das kartesische Produkt $A \times B \times C$ als Menge aller geordneten Tripel (a, b, c) mit $a \in A, b \in B, c \in C$ definieren. Analog kann man auch für mehr als drei Mengen vorgehen.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1.25. (geordnetes Paar und kartesisches Produkt)

- (a) Seien $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{7, 8\}$. Dann ist das kartesische Produkt $A \times B$ von A und B gegeben durch

$$A \times B = \{(1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 8), (3, 7), (3, 8)\}.$$

Das kartesische Produkt $B \times A$ von B und A ist gegeben durch

$$B \times A = \{(7, 1), (7, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2), (8, 3)\}.$$

Wir haben also ein Gegenbeispiel, für das $A \times B = B \times A$ nicht gilt. Daraus können wir schließen, dass im Allgemeinen $A \times B = B \times A$ nicht gelten kann (d.h. dass $A \times B = B \times A$ nicht für beliebige Mengen A, B gelten kann).

- (b) $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

kann man sich als die **Menge aller Punkte (x, y) in der Ebene** veranschaulichen.

- (c) $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

kann man sich als die **Menge aller Punkte (x, y, z) im dreidimensionalen Anschauungsraum** veranschaulichen.

- (d) $\mathbb{R}^4 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) : x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$

kann man sich als die **Menge aller Punkte (x, y, z) im dreidimensionalen Anschauungsraum und der Zeit(koordinate) t** veranschaulichen.

- (e) $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

kann man sich als die **Menge aller Punkte (x_1, x_2, \dots, x_n) im n -dimensionalen Raum** veranschaulichen. Beispielsweise können x_1, x_2, \dots, x_n die Mengen von n verschiedenen chemischen Substanzen sein, die an einem chemischen Experiment beteiligt sind.

1.3 Der binomische Satz

Wir werden nun für allgemeines $n \in \mathbb{N}_0$ eine „ausmultiplizierte“ Darstellung für $(a+b)^n$ kennenlernen, welche die erste und zweite binomische Formel als Sonderfall enthält. Dies ist der sogenannte binomische Satz.

Wir beginnen mit einer Wiederholung der bereits aus der Mittelstufe bekannten binomischen Formeln.

Hilfssatz 1.26. (binomische Formeln)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) *Erste binomische Formel:*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

(2) *Zweite binomische Formel:*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

(3) *Dritte binomische Formel:*

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Die erste Umformungsrichtung nennt man **Ausmultiplizieren** und die zweite **Faktorisieren**. Beide können bei Umformungen zeitsparend eingesetzt werden. Die Symbole a und b können sowohl durch Zahlen, Buchstaben (Variablen, Parameter) als auch durch komplexere Terme ersetzt werden, solange diese reellwertig sind.

Multipliziert man nun $(a+b)^n$ für $n \geq 2$ aus, so findet man, dass die Koeffizienten der Potenzen $a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots, ab^{n-1}, b^n$ aus den Koeffizienten der Potenzen $a^{n-1}, a^{n-2}b, a^{n-3}b^2, \dots, ab^{n-2}, b^{n-1}$ in der ausmultiplizierten Darstellung von $(a+b)^{n-1}$ **mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks rekursiv berechnet** werden können. Dieses ist in Abbildung 1.1 illustriert.

Das Pascalsche Dreieck hat einen entscheidenden Nachteil. Um die Koeffizienten für das Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ zu bekommen, müssen wir vorher alle Koeffizienten für das Ausmultiplizieren von $(a+b)^m$ mit $m = 1, 2, \dots, n-1$ berechnen. Der binomische Satz umgeht dieses Problem und liefert eine direkte Formel für die Koeffizienten. Zur Vorbereitung müssen wir zunächst Fakultäten

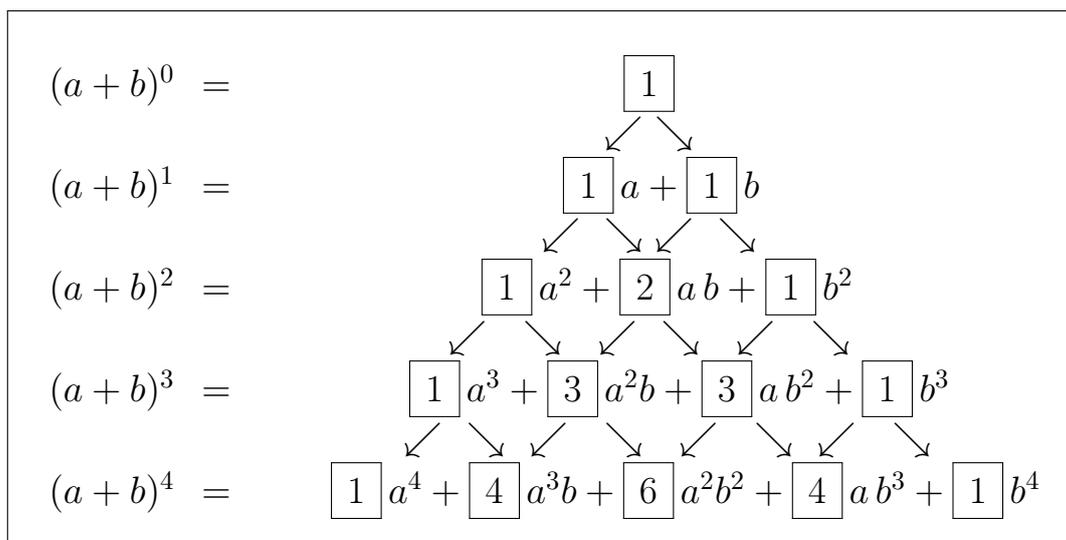


Abb. 1.1: Das Pascalsche Dreieck: Durch Addition der Koeffizienten in der vorigen Zeile, von denen ein Pfeil auf den neuen Koeffizienten weist, erhält man jeweils den Wert des neuen Koeffizienten.

und Binomialkoeffizienten einführen.

Definition 1.27. (Fakultät)

Die natürliche Zahl

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$$0! := 1 \quad \text{für } n = 0,$$

heißt **Fakultät von n** oder **n-Fakultät**.

Es gilt die Rekursionsformel:

$$(n + 1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n}_{= n!} \cdot (n + 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 1.28. (Fakultäten)

Wir haben

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1! = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2! = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3! = 24.$$

Definition 1.29. (Binomialkoeffizient)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ ist definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}. \quad (1.3)$$

In Worten sagt man für $\binom{n}{k}$ „(Binomialkoeffizient) n über k “.

Die zweite Darstellung von $\binom{n}{k}$ folgt, indem man $(n-k)!$ kürzt.

Nun können wir den binomischen Satz für das Ausmultiplizieren (und für die umgekehrte Richtung, das Faktorisieren) von $(a+b)^n$ formulieren.

Satz 1.30. (binomischer Satz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

Als Spezialfall erhalten wir für $n=2$ die erste binomische Formel. Für $n=2$ und $b=-d$ erhalten wir die zweite binomische Formel.

Zur Illustration leiten wir die erste und die zweite binomische Formel aus dem binomischen Satz ab.

Beispiel 1.31. (erste und zweite binomische Formel)

Für $n=2$ liest sich der binomische Satz wie folgt:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a b + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a b + \binom{2}{2} b^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

und wir haben

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot (2-0)!} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1,$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2,$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \cdot (2-2)!} = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1.$$

Einsetzen in (1.4) ergibt die erste binomische Formel:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Setzen wir in der letzten Formel nun $b = -d$, so finden wir

$$(a-d)^2 = a^2 + 2a(-d) + (-d)^2 = a^2 - 2ad + d^2,$$

und wir haben auch die zweite binomische Formel hergeleitet.

Es gelten die folgenden Identitäten für die Fakultäten.

Hilfssatz 1.32. (Rechenregeln für Binomialkoeffizienten)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gelten folgende Identitäten:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \tag{1.5}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \tag{1.6}$$

sowie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{1.7}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \quad \text{wobei } k < n. \tag{1.8}$$

Wir bemerken, dass (1.8) gerade die Formel ist, welche die Berechnung der Koeffizienten im Pascalschen Dreieck beschreibt (siehe Abbildung 1.2).

Beweis von Hilfssatz 1.32: Die Identitäten (1.5) und (1.6) in Hilfssatz 1.32 sind leicht durch Nachrechnen gezeigt: Mit Hilfe von $n! = (n-1)! \cdot n$ erhalten wir

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1,$$

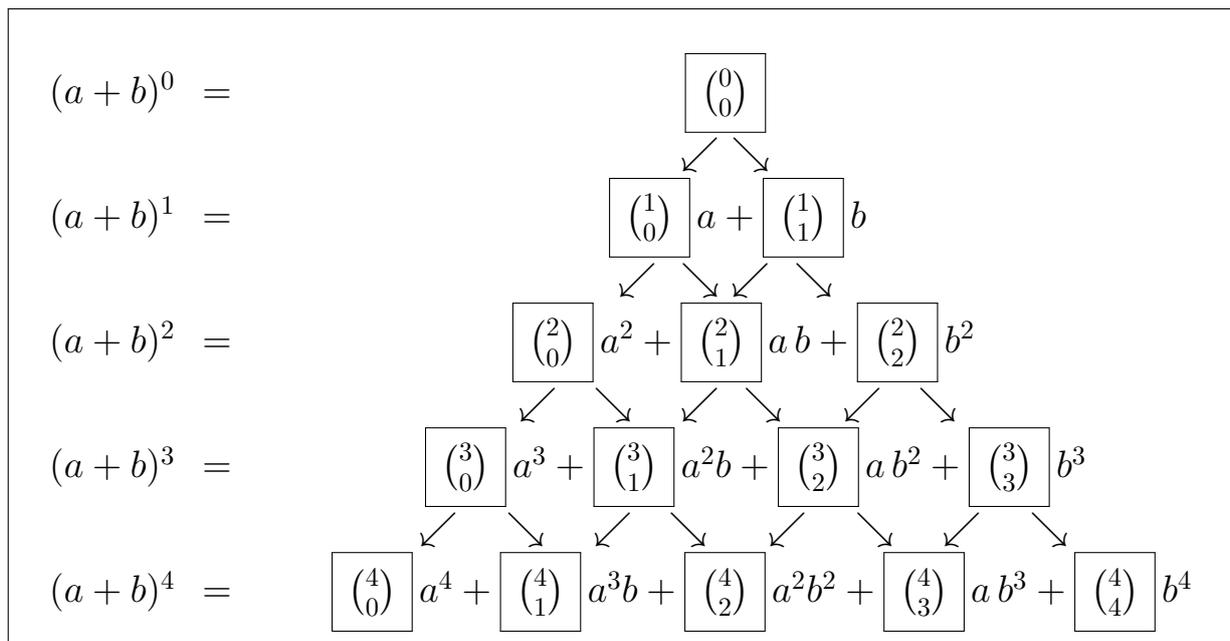


Abb. 1.2: Illustration von (1.8) am Pascalschen Dreieck.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n,$$

und wir haben (1.5) und (1.6) nachgewiesen.

Aus der Definition der Binomialkoeffizienten folgt direkt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k},$$

und wir haben (1.7) bewiesen. Wir bemerken auch, dass die erste Gleichheit in (1.5) und (1.6) nur ein Sonderfall von (1.7) ist.

Mit der folgenden Rechnung sieht man, dass (1.8) ebenfalls korrekt ist:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)(n-(k+1))!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{((k+1) + (n-k))n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

1.4 Ungleichungen und Betrag

Eine Ungleichung ist eine Formel mit reellen Zahlen und/oder reellwertigen Variablen/Parametern (also Buchstaben), in der ein Ungleichheitszeichen vorkommt, also $<$, \leq , $>$ oder \geq (oder \neq , wobei dieser Fall selten von Interesse ist).

Beispiel 1.33. (Ungleichungen)

- (a) $2 < 3$ und $5 \leq 4$ und $2 \leq 3$ sind alle Ungleichungen. Dabei sind $2 < 3$ und $2 \leq 3$ wahre Ungleichungen, wogegen die Ungleichung $5 \leq 4$ falsch ist.
- (b) $a < b$ und $x^2 + 2x - 4 \geq 0$ sind ebenfalls Ungleichungen. Diese sind wahr für geeignete Wahlen von a und b bzw. x .
- (c) Die Ungleichung $x^2 \geq 0$ ist immer wahr, d.h. egal wie man $x \in \mathbb{R}$ wählt (weil Quadrate immer nicht-negativ sind), und die Ungleichung $y^2 < 0$ für kein $y \in \mathbb{R}$ wahr.

Beinhaltet eine Ungleichung Variablen/Parameter (also Buchstaben), so ist das Ziel in der Regel herauszufinden für welche Zahlenwerte der Variablen/Parameter die Ungleichung erfüllt ist. Wir wollen die Ungleichung also auflösen. Dazu müssen

wir die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen beherrschen.

Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten die folgenden Regeln.

Hilfssatz 1.34. (Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen)

(1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten:

$$a < b \quad \iff \quad a + c < b + c$$

$$a > b \quad \iff \quad a + c > b + c$$

$$a \leq b \quad \iff \quad a + c \leq b + c$$

$$a \geq b \quad \iff \quad a + c \geq b + c$$

In Worten: Man darf auf beiden Seiten einer Ungleichung die gleiche reelle Zahl (bzw. den gleichen reellwertigen Term) addieren.

(2) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $c > 0$ gelten:

$$a < b \quad \iff \quad c \cdot a < c \cdot b$$

$$a > b \quad \iff \quad c \cdot a > c \cdot b$$

$$a \leq b \quad \iff \quad c \cdot a \leq c \cdot b$$

$$a \geq b \quad \iff \quad c \cdot a \geq c \cdot b$$

In Worten: Man darf auf beiden Seiten einer Ungleichung mit der gleichen positiven reellen Zahl (bzw. mit dem gleichen positiven reellwertigen Term) multiplizieren.

(3) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $c < 0$ gelten:

$$a < b \quad \iff \quad c \cdot a > c \cdot b$$

$$a > b \quad \iff \quad c \cdot a < c \cdot b$$

$$a \leq b \quad \iff \quad c \cdot a \geq c \cdot b$$

$$a \geq b \quad \iff \quad c \cdot a \leq c \cdot b$$

*In Worten: Multipliziert man beide Seiten einer Ungleichung mit der gleichen negativen reellen Zahl (bzw. mit dem gleichen negativen reellwertigen Term), so **kehrt sich das Ungleichheitszeichen um**.*

Achtung: Merken Sie sich Hilfssatz 1.34 (3) gut: Wenn man eine Ungleichung mit einer **negativen** reellen Zahl (bzw. einem **negativen** reellwertigen Term) multipliziert, so **kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!**

Betrachten wir einige elementare Beispiele.

Beispiel 1.35. (Rechnen mit Ungleichungen)

$$(a) \quad 7 > 5 \quad \iff \quad 7 + 3 > 5 + 3 \quad \iff \quad 10 > 8$$

(b) Subtraktion von $a \in \mathbb{R}$ realisieren wir als Addition von $-a$, also z.B.:

$$7 \geq 5 \quad \iff \quad 7 + (-5) \geq 5 + (-5) \quad \iff \quad 2 \geq 0$$

$$(c) \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \quad \iff \quad -\frac{1}{2} \cdot 6 < -\frac{1}{3} \cdot 6 \quad \iff \quad -\frac{6}{2} < -\frac{6}{3} \quad \iff \quad -3 < -2$$

$$(d) \quad -1 < 2 \quad \iff \quad (-1) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \quad \iff \quad 1 > -2$$

(e) Division durch eine reelle Zahl $a \neq 0$ realisieren wir als Multiplikation mit $1/a$, also z.B. für Division durch 2 und danach Division durch 3:

$$\begin{aligned} 2 \leq 3 & \iff 2 \cdot \frac{1}{2} \leq 3 \cdot \frac{1}{2} & \iff 1 \leq \frac{3}{2} \\ & \iff 1 \cdot \frac{1}{3} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} & \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Betrachten wir einige anspruchsvollere Beispiele.

Beispiel 1.36. (Lösen von Ungleichungen)

(a) Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$x^2 \leq 2x + 3?$$

Lösung: Wir formen um:

$$x^2 \leq 2x + 3 \quad \Big| -2x + 1 \quad \iff \quad x^2 - 2x + 1 \leq 4 \quad \iff \quad (x - 1)^2 \leq 4,$$

wobei wir im letzten Schritt die zweite binomische Formel auf der linken Seite angewendet haben. Da Quadrate immer nicht-negativ sind, kann die Ungleichung nur gelten, wenn gilt

$$(x - 1)^2 \leq 4 \quad \iff \quad -2 \leq x - 1 \leq 2 \quad \Big| +1 \quad \iff \quad -1 \leq x \leq 3.$$

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3]$.

Wir hätten die Ungleichung auch wie folgt lösen können:

$$x^2 \leq 2x + 3 \quad \Big| -2x - 3 \quad \iff \quad x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$\begin{array}{ccc}
\iff & x^2 - 2x + 1 - 4 \leq 0 & \stackrel{\substack{2. \text{ binom.} \\ \text{Formel}}}{\iff} & (x-1)^2 - 2^2 \leq 0 \\
\stackrel{\substack{3. \text{ binom.} \\ \text{Formel}}}{\iff} & (x-1-2)(x-1+2) \leq 0 & \iff & (x-3)(x+1) \leq 0
\end{array}$$

Wann ist die linke Seite ≤ 0 ?

- Wenn die linke Seite = 0 ist, d.h. wenn $x = 3$ oder $x = -1$ ist, also $\mathbb{L}_1 = \{-1, 3\}$, oder
- wenn $x - 3 < 0$ und $x + 1 > 0$, also wenn $x < 3$ und $x > -1$, d.h. wenn $-1 < x < 3$, also $\mathbb{L}_2 =]-1, 3[$, oder
- wenn $x - 3 > 0$ und $x + 1 < 0$, d.h. wenn $x > 3$ und $x < -1$ ist, also $\mathbb{L}_3 = \{\}$. (Hier gibt es keine x , die die beiden Ungleichungen $x > 3$ und $x < -1$ erfüllen. Also ist die Lösungsmenge die leere Menge.)

Den drei Fällen entnehmen wir, dass die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{-1, 3\} \cup]-1, 3[\cup \{\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3]$ ist.

(b) Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$\frac{2x-3}{x-3} \geq 4? \quad (1.9)$$

Lösung: Die Zahl $x = 3$ muss vorab ausgeschlossen werden, weil sonst auf der linken Seite durch null dividiert wird!

Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:

- $x < 3 \iff x - 3 < 0$,
- $x > 3 \iff x - 3 > 0$.

Wir suchen die Lösungen der Ungleichungen für jeden Fall separat.

- *Fall $x < 3$:* Multiplikation der Ungleichung (1.9) mit $x - 3 < 0$ ergibt („ \geq “ wird umgekehrt):

$$\begin{aligned}
(x-3) \cdot \frac{2x-3}{x-3} &\leq 4(x-3) \\
\iff 2x-3 &\leq 4x-12 \quad \Big| +12-2x \\
\iff 9 &\leq 2x \quad \iff \frac{9}{2} \leq x.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $9/2 \leq x$ steht aber im Widerspruch zu $x < 3$ (da $3 < 9/2 = 4,5$). Es gibt also keine Lösung der Ungleichung (1.9) mit $x < 3$, d.h. die Lösungsmenge in diesem Fall ist $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

- *Fall* $x > 3$: Multiplikation der Ungleichung (1.9) mit $x - 3 > 0$ ergibt („ \geq “ bleibt erhalten):

$$\begin{aligned} (x-3) \cdot \frac{2x-3}{x-3} &\geq 4(x-3) \\ \iff 2x-3 &\geq 4x-12 \quad | +12-2x \\ \iff 9 &\geq 2x \quad \iff \frac{9}{2} \geq x. \end{aligned}$$

Alle x mit $x > 3$ und $x \leq 9/2$, also alle x mit $3 < x \leq 9/2$, erfüllen die Ungleichung (1.9), d.h. die Lösungsmenge in diesem Fall ist $\mathbb{L}_2 =]3, \frac{9}{2}]$.

Die Lösungsmenge von (1.9) ist also

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \emptyset \cup]3, \frac{9}{2}] =]3, \frac{9}{2}].$$

- (c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$\frac{2x+1}{x-1} < 1 \tag{1.10}$$

Lösung: Zunächst müssen wir $x - 1 = 0$, also $x = 1$, ausschließen, da durch null teilen verboten ist. Wir wollen nun beide Seiten der Gleichung (1.10) mit $(x-1)$ multiplizieren. Dabei müssen wir aber das Vorzeichen von $(x-1)$ berücksichtigen, da sich für $x - 1 < 0$ das „ $<$ “ in (1.10) in ein „ $>$ “ umkehrt. Wir nehmen also eine Fallunterscheidung vor:

- *Fall 1:* Für $x - 1 > 0$, also für $x > 1$, erhalten wir nach der Multiplikation von (1.10) mit $(x - 1)$

$$2x+1 < x-1 \quad | -x-1 \quad \iff \quad x < -2.$$

Da $x < -2$ mit $x > 1$ nicht vereinbar ist, gibt es in diesem Fall keine Lösungen, also $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

- *Fall 2:* Für $x - 1 < 0$, also für $x < 1$, erhalten wir nach der Multiplikation von (1.10) mit $(x - 1)$

$$2x+1 > x-1 \quad | -x-1 \quad \iff \quad x > -2.$$

Wir erhalten also die beiden Bedingung $x > -2$, also $-2 < x$, und $x < 1$ an x , d.h. $-2 < x < 1$. Dieser Fall liefert $\mathbb{L}_2 =]-2, 1[$.

Fazit: Die Lösungsmenge der Ungleichung (1.10) ist das offene Intervall

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =] - 2, 1[.$$

Als Nächstes lernen wir den Betrag (oder Absolutbetrag) kennen.

Definition 1.37. (Betrags/Absolutbetrag)

Für $x \in \mathbb{R}$, ist der **Betrag** (oder der **Absolutbetrag**) $|x|$ definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Anschauung: $|x|$ misst den Abstand (auf der Zahlengeraden) von x zum Nullpunkt 0.

Man sollte die Eigenschaften des Betrags kennen, die im nächsten Hilfssatz zusammengestellt sind.

Hilfssatz 1.38. (Eigenschaften des Betrags)

- (1) $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (2) $|x| = 0$ gilt in \mathbb{R} genau dann, wenn $x = 0$ ist.
- (3) $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ für alle $\lambda, x \in \mathbb{R}$
- (4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (**Dreiecksungleichung**).

Aus diesen grundlegenden Eigenschaften folgen die abgeleiteten weiteren Eigenschaften in nächsten Hilfssatz.

Hilfssatz 1.39. (weitere Eigenschaften des Betrags)

Weitere Eigenschaften des (Absolut-)Betrags $|\cdot|$ sind:

- (5) $|-x| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (6) $x^2 = |x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (7) $-|x| \leq x \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (8) Für $c \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 < c^2 \iff |x| < c \iff -c < x < c$
- (9) Für $c \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 \leq c^2 \iff |x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$

Hilfssatz 1.39 (8) und (9) sind beim Auflösen von Ungleichungen wichtig, wie wir in den nachfolgenden Beispielen noch sehen werden.

Aufgrund der „stückweisen“ Definition von $|x|$ **können Gleichungen und Ungleichungen in denen $|x|$ vorkommt, am besten durch Fallunterscheidung aufgelöst werden!** Betrachten wir dazu ein paar Beispiele.

Beispiel 1.40. (Gleichungen und Ungleichungen mit Absolutbeträgen)

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $|x - 3| \leq 1$?

Anschaulich besagt $|x - 3| \leq 1$, dass der Abstand von x zu 3 kleiner oder gleich 1 ist. Durch Einzeichnen auf dem Zahlenstrahl erhält man als Lösungsmenge das abgeschlossene Intervall

$$\mathbb{L} = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4\}.$$

Lösung: Wir wollen unser anschaulich ermitteltes Ergebnis nun durch mathematische Berechnungen nachweisen:

Wegen Hilfssatz 1.39 (9) gilt

$$|x - 3| \leq 1 \iff -1 \leq x - 3 \leq 1 \quad \Big| + 3 \iff 2 \leq x \leq 4,$$

d.h. die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$.

Alternative Lösung: Falls man Hilfssatz 1.39 (9) nicht im Kopf hat, kann man auch direkt mit der Definition des Betrags mit einer Fallunterscheidung arbeiten:

- *Fall 1:* Gilt $x - 3 \geq 0$, also $x \geq 3$, dann ist $|x - 3| = x - 3$. Also wird $|x - 3| \leq 1$ zu

$$x - 3 \leq 1 \quad \Big| + 3 \iff x \leq 4.$$

Die Ungleichungen $x \geq 3$ und $x \leq 4$ liefern als Lösungsmenge das Intervall

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 4\} = [3, 4].$$

- *Fall 2:* Gilt $x - 3 < 0$, also $x < 3$, dann ist $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$, und die Gleichung $|x - 3| \leq 1$ wird

$$3 - x \leq 1 \quad \Big| + x - 1 \iff 2 \leq x.$$

Die Ungleichungen $x < 3$ und $2 \leq x$ liefern als Lösungsmenge das Intervall

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 3\} = [2, 3[.$$

Fazit: Vereinigen wir die Lösungen aus Fall 1 und Fall 2, so erhalten wir als Lösungsmenge das Intervall

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup L_2 = [3, 4] \cup [2, 3[= [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4\}.$$

(b) Was sind die Lösungen der Ungleichung $|x - 2| \leq 2x$?

Lösung: Wir treffen zwei Fallunterscheidungen: $x \geq 2$ und $x < 2$.

- *Fall 1:* Für $x \geq 2 \iff x - 2 \geq 0$ gilt $|x - 2| = x - 2$ und somit:

$$|x - 2| \leq 2x \iff x - 2 \leq 2x \quad \Big| -x \iff -2 \leq x$$

Da für $x \geq 2$ die Bedingung $x \geq -2$ automatisch erfüllt ist, erhalten wir $\mathbb{L}_1 = [2, \infty[$.

- *Fall 2:* Für $x < 2 \iff x - 2 < 0$ gilt $|x - 2| = -(x - 2)$ und somit:

$$\begin{aligned} |x - 2| \leq 2x &\iff -(x - 2) \leq 2x \iff -x + 2 \leq 2x \quad \Big| +x \\ &\iff 2 \leq 3x \quad \Big| :3 \iff \frac{2}{3} \leq x \iff x \geq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Da neben $x \geq 2/3$ noch die Bedingung $x < 2$ erfüllt sein muss, erhalten wir $\mathbb{L}_2 = [\frac{2}{3}, 2[$.

Insgesamt ist die Lösungsmenge also

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [2, \infty[\cup \left[\frac{2}{3}, 2[= \left[\frac{2}{3}, \infty[.$$

Falsche Vorgehensweise: Bei diesen Beispiel sieht man leicht, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, denn dieses führt auf eine falsche Lösungsmenge: Betrachtet man statt $|x - 2| \leq 2x$

$$|x - 2|^2 \leq (2x)^2 \iff (x - 2)^2 \leq 4x^2$$

so liefert Vereinfachen

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 = 4x^2 &\iff x^2 - 4x + 4 \leq 4x^2 \iff 0 \leq 3x^2 + 4x - 4 \\ &\iff 0 \leq x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = \left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9} - \frac{4}{3} = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} \\ &= \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) \left(x + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = \left(x - \frac{2}{3}\right) (x + 2). \end{aligned}$$

Die Ungleichung $(x - \frac{2}{3})(x + 2) \geq 0$ ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{2}{3} \geq 0 \text{ und } x + 2 \geq 0\right) \quad \text{oder} \quad \left(x - \frac{2}{3} \leq 0 \text{ und } x + 2 \leq 0\right) \\ \iff & \left(x \geq \frac{2}{3} \text{ und } x \geq -2\right) \quad \text{oder} \quad \left(x \leq \frac{2}{3} \text{ und } x \leq -2\right) \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge erhalten wir also

$$\mathbb{L} = \left[\frac{2}{3}, \infty\right[\cup]-\infty, -2] = \mathbb{R} \setminus \left]-2, \frac{2}{3}\right[.$$

(c) Was sind die Lösungen der Gleichung $|x - 2| = |2x|$?

Lösung: Wir treffen drei Fallunterscheidungen: $x \geq 2$, $0 \leq x < 2$ und $x < 0$.

- *Fall 1:* Für $x \geq 2 \iff x - 2 \geq 0$ ist auch $2x \geq 0$, und es gilt:

$$|x - 2| = |2x| \iff x - 2 = 2x \quad \Big| -x \iff -2 = x.$$

Da für $x \geq 2$ der Fall $x = -2$ nicht auftreten kann, haben wir hier keine Lösung, also $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

- *Fall 2:* Für $x < 2$ und $x \geq 0$, also für $0 \leq x < 2$ ist $x - 2 < 0$ und $2x \geq 0$ und damit $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ und $|2x| = 2x$. Somit gilt

$$\begin{aligned} |x - 2| = |2x| & \iff 2 - x = 2x \quad \Big| +x \\ \iff 2 = 3x & \quad \Big| :3 \iff x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Da $x = 2/3$ die Bedingung $0 \leq x < 2$ erfüllt, ist $x = 2/3$ eine Lösung, also $\mathbb{L}_2 = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

- *Fall 3:* Sei nun $x < 0$. Dann ist $x - 2 < 0$ und $2x < 0$ und damit $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ und $|2x| = -2x$. Somit finden wir

$$\begin{aligned} |x - 2| = |2x| & \iff 2 - x = -2x \quad \Big| +x \\ \iff 2 = -x & \quad \Big| \cdot (-1) \iff -2 = x. \end{aligned}$$

Da $x = -2$ die Bedingung $x < 0$ erfüllt, ist $x = -2$ ebenfalls eine Lösung, also $\mathbb{L}_3 = \{-2\}$.

Fazit: Wir haben mit den drei betrachteten Fällen alle reellen Zahlen x abgedeckt. Daher ist die Lösungsmenge von $|x - 2| = |2x|$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}.$$

(d) Wir wollen alle Punkte (x, y) in der Ebene finden, für die gilt

$$|x| + |y| \leq 1.$$

Dazu müssen wir die folgenden vier Fälle betrachten:

- *Fall 1:* $x \geq 0$ und $y \geq 0$ (d.h. wir befinden uns im 1. Quadranten):
Dann gelten $|x| = x$ und $|y| = y$ und somit

$$|x| + |y| = x + y \leq 1,$$

und wir finden durch Auflösen nach y die Ungleichung $y \leq 1 - x$. Hier erhalten wir die Teillösungsmenge

$$\mathbb{L}_1 = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

- *Fall 2:* $x < 0$ und $y \geq 0$ (d.h. wir befinden uns im 2. Quadranten):
Dann gelten $|x| = -x$ und $|y| = y$ und somit

$$|x| + |y| = -x + y \leq 1,$$

und wir finden durch Auflösen nach y die Ungleichung $y \leq 1 + x$. Hier erhalten wir die Teillösungsmenge

$$\mathbb{L}_2 = \{(x, y) : x < 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 + x\}.$$

- *Fall 3:* $x < 0$ und $y < 0$ (d.h. wir befinden uns im 3. Quadranten):
Dann gelten $|x| = -x$ und $|y| = -y$ und somit

$$|x| + |y| = -x - y \leq 1,$$

und wir finden durch Auflösen nach y die Ungleichung $y \geq -x - 1$. Hier erhalten wir die Teillösungsmenge

$$\mathbb{L}_3 = \{(x, y) : x < 0 \text{ und } -x - 1 \leq y < 0\}.$$

- *Fall 4:* $x \geq 0$ und $y < 0$ (d.h. wir befinden uns im 4. Quadranten):
Dann gelten $|x| = x$ und $|y| = -y$ und somit

$$|x| + |y| = x - y \leq 1,$$

und wir finden durch Auflösen nach y die Ungleichung $y \geq x - 1$. Hier erhalten wir die Teillösungsmenge

$$\mathbb{L}_4 = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ und } x - 1 \leq y < 0\}.$$

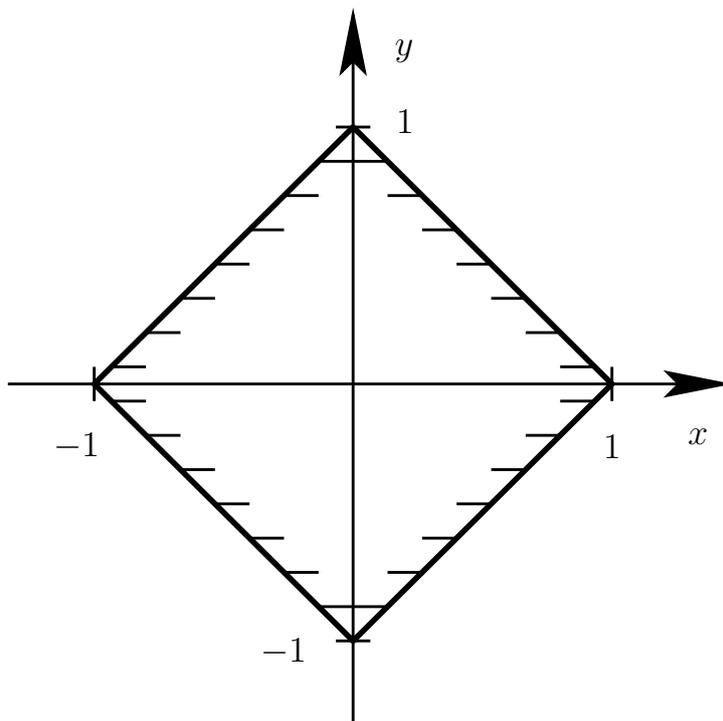


Abb. 1.3: Graphische Darstellung der Menge aller Punkte (x, y) mit $|x| + |y| \leq 1$ in der (x, y) -Ebene.

Fazit: Die Lösungsmenge ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 \\ &= \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} (x \geq 0 \text{ und } x - 1 \leq y \leq -x + 1) \text{ oder} \\ (x < 0 \text{ und } -x - 1 \leq y \leq x + 1) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist in Abbildung 1.3 graphisch dargestellt.

Funktionen

In Teilkapitel 2.1 werden Funktionen (einer und mehrerer Variablen) eingeführt.

In Teilkapitel 2.2 werden Polynomfunktionen und rationale Funktionen betrachtet. Danach lernen wir in Teilkapitel 2.3 grundlegende Eigenschaften von Funktionen kennen, nämlich das Monotonieverhalten (oder Wachstumsverhalten), gerade und ungerade Funktionen und periodische Funktionen. In Teilkapitel 2.4 lassen wir die klassischen aus der Schule bekannten Funktionentypen Revue passieren und betrachten ihre grundlegenden Eigenschaften: Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus, sowie weitere trigonometrische Funktionen. Mit Hilfe der Exponentialfunktion werden auch die sogenannten hyperbolischen Funktionen eingeführt.

In Teilkapitel 2.5 lernen wir die meist aus der Schule nicht bekannten Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv kennen und werden mit deren Hilfe den Begriff der Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion einführen. Mit Hilfe dieser neuen Begriffe können wir in Teilkapitel 2.6 weitere klassische Funktionen einführen: den (natürlichen) Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, sowie die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen und der hyperbolischen Funktionen.

In Teilkapitel 2.7 lernen wir schließlich die Verkettung von Funktionen kennen. Dieser Begriff wird bei der Kettenregel beim Differenzieren und bei der Substitutionsregel beim Integrieren eine Rolle spielen.

2.1 Funktionen: Definition und Beispiele

Wir beginnen mit der Definition einer Funktion. Obwohl Ihnen Funktionen aus der Schule vertraut sind, werden Sie möglicherweise feststellen, dass nicht alle der Begriffe in der nachfolgenden Definition in der Schule thematisiert worden sind.

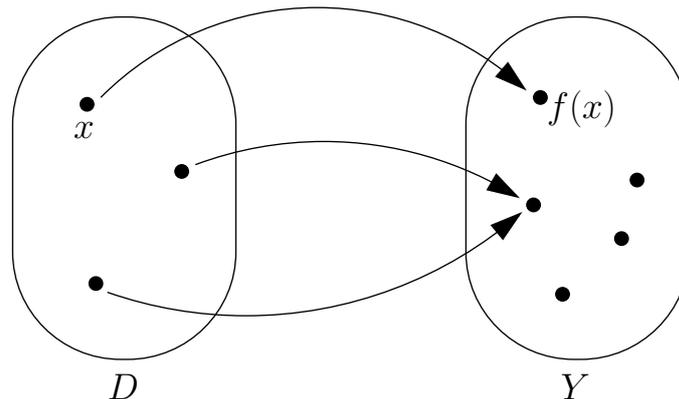
Definition 2.1. (Funktion/Abbildung)

Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) f von D nach (oder in) Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ **genau ein** $f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben in Zeichen:

$$f : D \rightarrow Y, \quad f(x) := \text{„Zuordnungsvorschrift“}$$

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

- x heißt die **Variable** der Funktion f .
- $f(x)$ heißt der **Funktionswert von f an der Stelle x** (oder das **Bild von x unter f**).
- Ist $y \in Y$ und $f(x) = y$, so heißt x ein **Urbild von y unter f** .
- D heißt die **Definitionsmenge** (oder der **Definitionsbereich**) von f .
- Y heißt die **Zielmenge** (oder der **Zielbereich**) von f .
- Sind $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir f eine **reelle Funktion**.



Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.2. (Funktionen mit einer Variablen)

- (a) Ordnet man jedem Buch der Universitätsbibliothek diejenigen Nutzer zu, die dieses Buch mindestens einmal ausgeliehen haben, dann erhält man **keine** Funktion.

Begründung: Erstens gibt es Bücher, die niemand ausgeliehen hat. Für diese Bücher hätten wir keinen Funktionswert. Zweitens gibt es Bücher, die von mehreren Nutzern ausgeliehen wurden. Diesen Büchern hätten wir nicht genau einen sondern mehrere Nutzer der Universitätsbibliothek zugewiesen.

(b) Beispiele für Funktionen sind:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &:= x^2, \\ g &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &:= x^2, \\ d &: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, & d(n) &:= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases} \\ w &: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, & w(t) &:= \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3. (Funktionen)

- (1) In der Schule wird manchmal nur die Funktionsvorschrift angegeben und diese dann als Funktion bezeichnet. Das kommt daher, dass dort fast nur reelle Funktionen betrachtet werden, d.h. die Zielmenge ist \mathbb{R} , und die Definitionsmenge ist eine Teilmenge von \mathbb{R} . Für die vollständige Beschreibung einer Funktion müssen neben der Funktionsvorschrift auch die Definitionsmenge und die Zielmenge angegeben werden. Deshalb schreiben wir in der Vorlesung immer die Definitionsmenge und die Zielmenge dazu.
- (2) Ist bei einer Funktion nur die Funktionsvorschrift angegeben, so gilt die Konvention, dass man die Definitionsmenge größtmöglich, also als die „maximale Definitionsmenge“ wählt.

Beispiel: Für die Funktionsvorschrift $f(x) := (x^2 - 1)^{-1}$ kann man alle reellen Zahlen außer $x = -1$ und $x = 1$ einsetzen. Also wählt man die Definitionsmenge als $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (die „maximale Definitionsmenge“) und die Zielmenge als \mathbb{R} . Wir haben also

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := (x^2 - 1)^{-1}.$$

Beispiel 2.4. (Funktionen mit mehreren Variablen)

- (a) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) := xy$, ist eine Funktion mit zwei Variablen.
- (b) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$, ist eine Funktion mit drei Variablen.
- (c) Die Temperatur T am Ort (x, y, z) zur Zeit t kann man als Funktion mit der Funktionsvorschrift

$$T(x, y, z, t) := \text{„Temperatur am Ort } (x, y, z) \text{ zur Zeit } t\text{“}$$

auffassen. Ist D die Menge der betrachteten Orte (z.B. alle Punkte auf dem Campus der Uni Paderborn) und $I = [a, b]$ das Zeitintervall, in dem uns die

Temperatur interessiert, so haben wir eine vollständige Funktionsdefinition

$$T : D \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x, y, z, t) := \text{„Temperatur am Ort } (x, y, z) \text{ zur Zeit } t\text{“}.$$

T ist eine Funktion mit vier Variablen.

- (d) Wir betrachten einen festen physikalischen Körper (kein Gas), z.B. ein Stück Eisen oder den menschlichen Körper oder die Erdkugel. Dieser Körper hat eine Dichte ρ . Bei einem Stück Metall wird diese vermutlich fast überall den gleichen Wert haben, aber bei dem menschlichen Körper oder bei der Erdkugel variiert die Dichte, d.h. sie ist ortsabhängig. (Stein hat eine höhere Dichte als Wasser; also erwarten wir im Himalaya eine höhere Dichte als im Ozean. – Beim menschlichen Körper haben verschiedene Sorten von Gewebe verschiedene Dichten. Dieses nutzt man in der Computertomographie, um Tumore, die eine andere Dichte als das umliegende Gewebe haben, zu finden.) Ist $D \subseteq \mathbb{R}^3$ also das Volumen, in dem wir die Dichte betrachten, so ist

$$\rho : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(x, y, z) := \text{„Dichte im Punkt } (x, y, z)\text{“}$$

eine Funktion mit drei Variablen.

- (e) Betrachten wir eine chemische Reaktion an der zwei Substanzen A und B beteiligt sind, und die als Ergebnis eine dritte (neue) Substanz C liefert. Welche Menge c wir von der Substanz C erhalten, hängt davon ab welche Mengen a und b der Substanzen A bzw. B an der Reaktion beteiligt waren. Wurde die chemische Reaktion mathematisch mit einer Reaktionsgleichung modelliert und man löst diese, so erhält man eine Funktion, die die Menge c der Substanz C in Abhängigkeit von den Mengen a und b der Substanzen A bzw. B beschreibt. Wir haben also eine Funktion

$$c : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad c(a, b) := \begin{cases} \text{„Menge der Substanz } c \\ \text{nach der Reaktion der} \\ \text{Mengen } a \text{ und } b \text{ der} \\ \text{Substanzen } A \text{ bzw. } B\text{“} \end{cases}$$

mit zwei Variablen.

Wir führen nun den Begriff des Graphen einer Funktion ein, mit dem wir reelle Funktionen dann geometrisch veranschaulichen können.

Definition 2.5. (Graph)

Ist $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion, so heißt die Menge

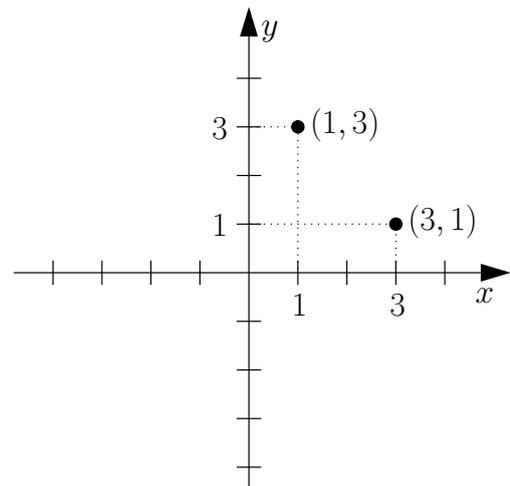
$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

der **Graph** von f .

- Sind $D, Y \subseteq \mathbb{R}$, so lässt sich der Graph von f als Schaubild in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen.
- Sind $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$, so kann man den Graphen von f als Fläche über der (x, y) -Koordinatenebene veranschaulichen.

Der Symbol „ Γ “ ist ein großer griechischer Buchstabe, genannt „gamma“. In Anhang C finden Sie eine Tabelle aller griechischen Buchstaben.

Im nebenstehenden Bild haben wir die geordneten Paare $(1, 3)$ und $(3, 1)$ als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.



Betrachten wir ein Beispiel für den Graph einer Funktion.

Beispiel 2.6. (Graph einer Funktion)

- (a) Beispiel für Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$

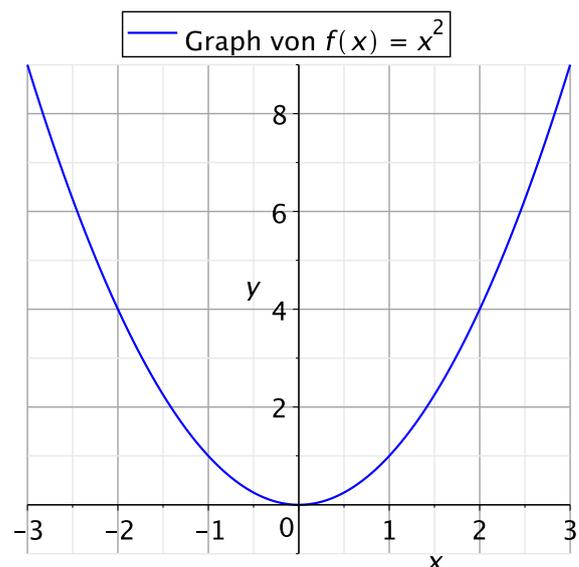
Die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2,$$

hat den Graph

$$\Gamma(f) = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Dieser ist im Bild rechts veranschaulicht.



- (b) Beispiele für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$

Der Graph der Funktion

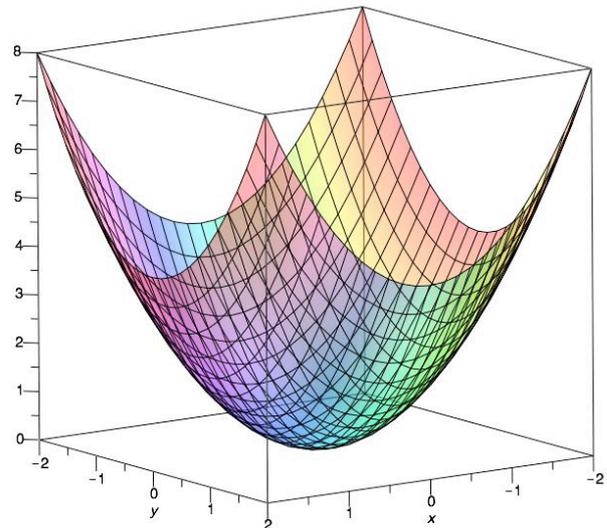
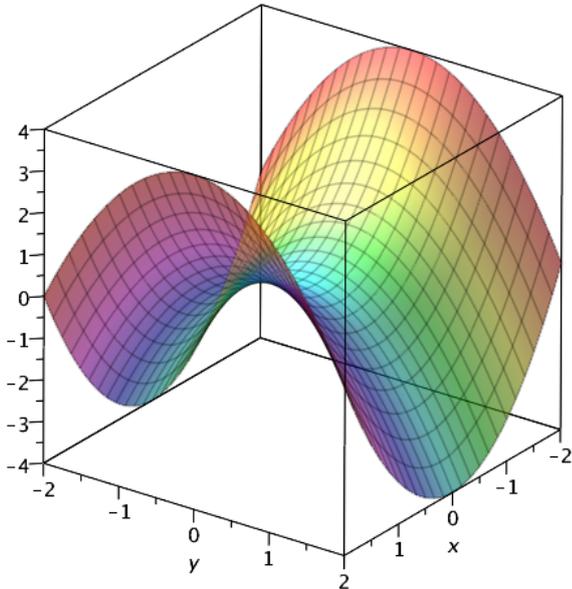
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 - y^2$$

zweier Variablen ist unten links veranschaulicht.

Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2$$

zweier Variablen ist unten rechts veranschaulicht.

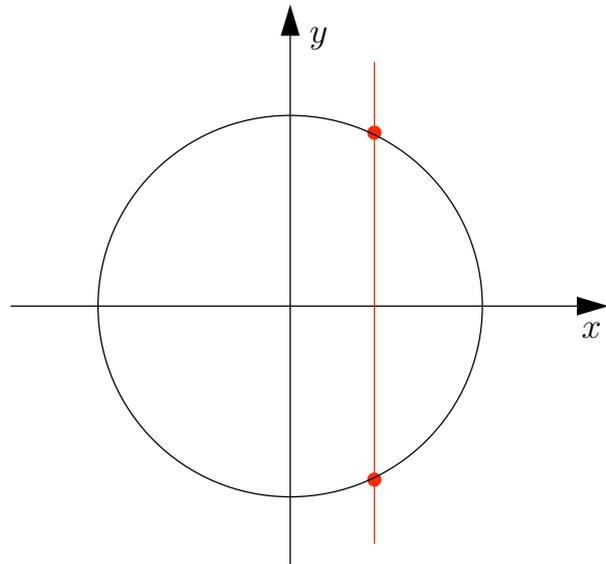


Bemerkung 2.7. (Kurven und Graphen von Funktionen)

Wann ist ein Schaubild einer Kurve die Darstellung des Graphen einer reellen Funktion $f : D \rightarrow Y$ mit $D, Y \subseteq \mathbb{R}$?

Wenn die Kurve mit jeder Parallelen zur y -Achse höchstens einen Schnittpunkt hat.

Beispiel: Eine Kreislinie (vgl. das Bild rechts) ist also kein Graph einer Funktion.



2.2 Polynomfunktionen und rationale Funktionen

In diesem Teilkapitel betrachten wir Polynomfunktionen und rationale Funktionen. Dabei lernen wir auch das Verfahren der Polynomdivision kennen.

Definition 2.8. (Polynomfunktionen)

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und „Koeffizienten“ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$.

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

heißt eine (*reelle*) **Polynomfunktion vom Grad n** (also $\text{Grad}(p) = n$).
Der Koeffizient a_n der höchsten Potenz x^n wird als **Leitkoeffizient** bezeichnet.

Betrachten wir einige Beispiele für Polynomfunktionen.

Beispiel 2.9. (Polynomfunktionen)

(a) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := 1 - 5x^3 + 3x + 7x^6 - x = 1 + 2x - 5x^3 + 7x^6$,
hat den Grad 6.

(b) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := 17 + 0x^3 = 17$, hat den Grad 0.

(c) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := 3 + x^2 + 4x - x^2 = 3 + 4x$, hat den Grad 1.

(d) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := 0$, ist das Nullpolynom. Dieses hat per Definition den Grad $-\infty$.

Notation 2.10. (Polynomfunktionen)

Es gelten die folgenden Bezeichnungen für Polynomfunktionen bis zum Grad 3:

Grad 0 : **konstante** Polynomfunktion: $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := a_0$

Grad 1 : **lineare** Polynomfunktion: $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := a_0 + a_1 x$

Grad 2 : **quadratische** Polynomfunktion:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Grad 3 : **kubische** Polynomfunktion:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Was passiert, wenn man Polynomfunktionen miteinander multipliziert? Wir erhalten wieder eine Polynomfunktion, deren Grad man explizit angeben kann.

Bemerkung 2.11. (Produkt von Polynomfunktionen)

Multipliziert man eine Polynomfunktion p von Grad $n \in \mathbb{N}$ mit einer Polynomfunktion q vom Grad $m \in \mathbb{N}$, so ist das Produkt $p \cdot q$ wieder eine Polynomfunktion und hat den Grad $n + m$.

Definition 2.12. (Nullstelle einer Polynomfunktion)

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 1 . $z \in \mathbb{R}$ heißt eine (**reelle**) **Nullstelle** von p , falls $p(z) = 0$ ist.

Beispiel 2.13. (Nullstelle von Polynomfunktion)

Die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) := x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, hat die Nullstelle $z = 1$, denn

$$p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Ist man an allen reellen Nullstellen einer Polynomfunktion interessiert, so möchte man diese als Produkt linearer Faktoren und gegebenenfalls quadratischer Faktoren ohne Nullstellen schreiben. Dieses geht mit Hilfe des Verfahrens der Polynomdivision und mittels der binomischen Formeln und quadratischer Ergänzung. Wir demonstrieren dieses für mehrere Beispiele

Beispiel 2.14. (Faktorisierung mittels Polynomdivision und quadratischer Ergänzung)

(a) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) := 2x^3 - 14x^2 + 10x + 2$

Durch Probieren findet man, dass $z = 1$ eine Nullstelle der Polynomfunktion $p(x) = 2x^3 - 14x^2 + 10x + 2$ ist:

$$p(1) = 2 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 2 = 2 - 14 + 10 + 2 = 0.$$

Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{r} (2x^3 \quad -14x^2 \quad +10x \quad +2) : (x-1) = 2x^2 - 12x - 2 \\ \underline{-(2x^3 \quad -2x^2)} \\ \quad -12x^2 \quad +10x \quad +2 \\ \quad \underline{-(-12x^2 \quad +12x)} \\ \qquad \qquad -2x \quad +2 \\ \qquad \qquad \underline{-(-2x \quad +2)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 - 14x^2 + 10x + 2 \\ &= (x-1)(2x^2 - 12x - 2) = 2(x-1)(x^2 - 6x - 1). \end{aligned}$$

Wir formen den quadratischen Term mittels quadratischer Ergänzung und den binomischen Formeln weiter um:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 1 &= \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{=(x-3)^2} - 9 - 1 = (x-3)^2 - 10 \\ &= (x-3)^2 - (\sqrt{10})^2 = (x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10}), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die dritte binomische Formel verwendet haben. Also finden wir insgesamt

$$p(x) = 2(x-1)(x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10}).$$

Es gibt drei reelle Nullstellen: $x_1 = 1$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$ und $x_3 = 3 - \sqrt{10}$.

(b) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) := x^3 - 2x^2 + x$

Hier kann man den Faktor x ausklammern und sieht damit auch direkt, dass $x = 0$ eine Nullstelle ist:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2,$$

wobei der letzte Schritt mit der zweiten binomischen Formel folgt. Es gibt zwei reelle Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

(c) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) := x^3 + 2x$

Hier kann man den Faktor x ausklammern und sieht damit auch direkt, dass $x = 0$ eine Nullstelle ist:

$$p(x) = x^3 + 2x = x(x^2 + 2).$$

Der quadratische Term erfüllt $x^2 + 2 \geq 2$ (weil Quadrate ≥ 0 sind) und hat damit keine reellen Nullstellen und lässt sich in \mathbb{R} nicht weiter faktorisieren. Wir finden also nur eine reelle Nullstelle $x_1 = 0$.

(d) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) := x^4 - 2x^2 + 1$

Dieses ist eine quadratische Gleichung in x^2 , nämlich

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2,$$

wobei wir zunächst die zweite binomische Formel und dann wegen der dritten binomischen Formel $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ genutzt haben. Also erhalten wir zwei verschiedene reelle Nullstellen, nämlich $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Als Nächstes betrachten wir rationale Funktionen.

Definition 2.15. (rationale Funktion)

Seien $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynomfunktionen mit $\text{Grad}(q) \geq 1$. Die Funktion

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit der Definitionsmenge $D_f := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ heißt dann eine **rationale Funktion**.

Bemerkung 2.16. (rationale Funktion)

Gilt $\text{Grad}(p) \geq \text{Grad}(q)$ bei einer rationalen Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := p(x)/q(x)$, so lässt sich f mit Hilfe von Polynomdivision auf die Form

$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

bringen, wobei s und r Polynomfunktionen sind mit

$$\begin{aligned} \text{Grad}(s) &= \text{Grad}(p) - \text{Grad}(q), \\ \text{Grad}(r) &< \text{Grad}(q). \end{aligned}$$

Beispiel 2.17. (rationale Funktionen)

$$(a) \quad f(x) := \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$$

Da $q(x) = x^2 + 1$ keine Nullstellen hat ist $D_f = \mathbb{R}$. Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2 + \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \\ \underline{-(x^4 + x^2)} \\ 2x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\ \underline{-(2x^3 + 2x)} \\ 2x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-(2x^2 + 2)} \\ 2x - 1 \end{array}$$

Also finden wir:

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 + \frac{2x - 1}{x^2 + 1}.$$

$$(b) f(x) := \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Da der Nenner in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Nullstellen hat, ist die maximale Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Wir nutzen im Zähler die zweite binomische Formel und im Nenner die dritte binomische Formel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Nun formen wir geschickt um:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1) - 2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Natürlich liefert Polynomdivision das gleiche Ergebnis.

2.3 Grundlegende Eigenschaften von reellwertigen Funktionen

Nullstellen betrachten wir auch für beliebige reellwertige Funktionen.

Definition 2.18. (Nullstelle eine reellwertigen Funktion)

Sei D eine Menge. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist $z \in D$ eine **Nullstelle von f** , falls $f(z) = 0$ ist.

Beispiel 2.19. (Nullstellen von reellwertigen Funktionen)

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, hat die beiden reellen Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$
- (b) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) := \frac{1}{x}$, hat keine Nullstellen.
- (c) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) := xy$, hat unendlich viele Nullstellen, nämlich alle Punkte der Form $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ und alle Punkte der Form $(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$, hat als einzige Nullstelle den Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Alle weiteren Eigenschaften, die wir in diesem Teilkapitel besprechen, beschränken sich auf reelle Funktionen, also auf Funktionen $f : D \rightarrow Y$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 2.20. (monotone Funktion)

Seien $D, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow Y$ eine reelle Funktion. Sei $I \subseteq D$ ein Intervall.

(1) f heißt **monoton wachsend auf I** , falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

(2) f heißt **monoton fallend auf I** , falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

(3) f heißt **streng monoton wachsend auf I** , falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) < f(x_2).$$

(4) f heißt **streng monoton fallend auf I** , falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) > f(x_2).$$

(5) Ist D ein Intervall und ist f **auf ganz $I = D$** (streng) monoton wachsend bzw. (streng) monoton fallend, so nennen wir f **(streng) monoton wachsend** bzw. **(streng) monoton fallend**.

(6) Sei D ein Intervall. Dann heißt $f : D \rightarrow Y$ **monoton** (bzw. **streng monoton**), falls f monoton wachsend oder monoton fallend (bzw. streng monoton wachsend oder streng monoton fallend) ist.

Statt „(streng) monoton wachsend“ kann man auch „(streng) monoton steigend“ sagen. Die Begriffe „(streng) monoton wachsend“ und „(streng) monoton fallend“ sind in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

Betrachten wir einige Beispiele, um uns die Begriffe (streng) monoton wachsend und (streng) monoton fallend besser vertraut zu machen.

Beispiel 2.21. (lineare Polynomfunktion)

Die lineare Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := ax + c$, ist:

- monoton wachsend und monoton fallend, wenn $a = 0$ ist;
- streng monoton wachsend, wenn $a > 0$ ist;
- streng monoton fallend, wenn $a < 0$ ist.

Dies sieht man von der geometrischen Anschauung her direkt an dem Graphen

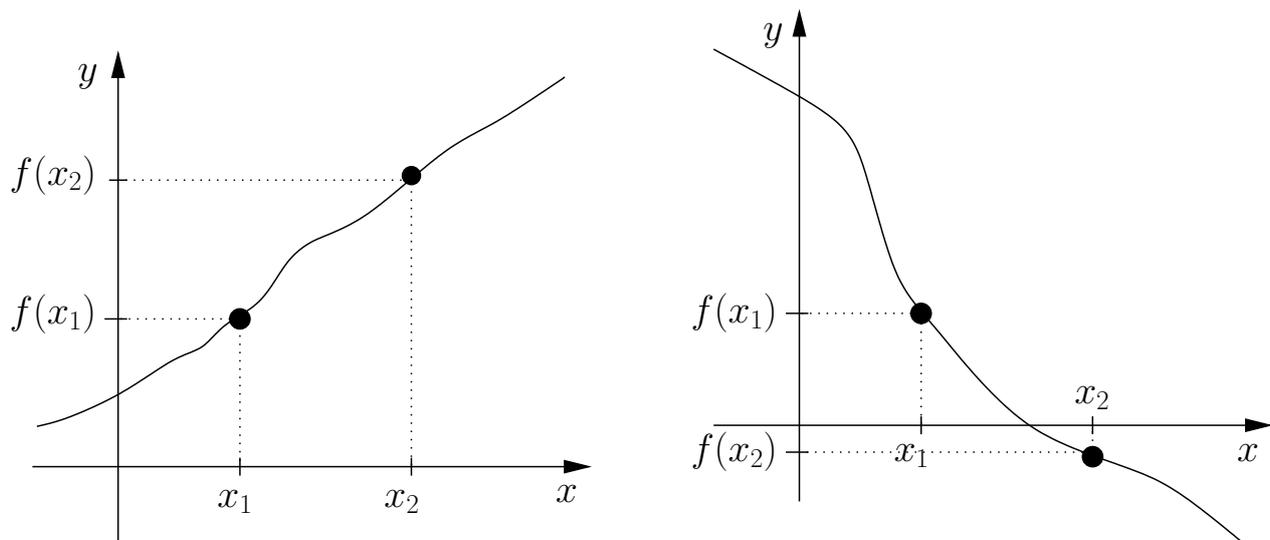


Abb. 2.1: Die Funktion im linken Bild ist streng monoton wachsend, und die Funktion im rechten Bild ist streng monoton fallend.

der jeweiligen Funktion (vgl. Abbildung 2.2). Formal weist man es wie folgt nach: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$f(x_1) = \begin{cases} a x_1 + c < a x_2 + c = f(x_2), & \text{falls } a > 0, \\ 0 x_1 + c = c = 0 x_2 + c = f(x_2), & \text{falls } a = 0, \\ a x_1 + c > a x_2 + c = f(x_2), & \text{falls } a < 0, \end{cases}$$

wobei wir benutzt haben, dass aus $x_1 < x_2$ für $a > 0$ folgt, dass $a x_1 < a x_2$ ist, und dass aus $x_1 < x_2$ für $a < 0$ folgt, dass $a x_1 > a x_2$ ist (bei Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt sich das Ungleichheitszeichen um).

Beispiel 2.22. (Standardparabel)

Die Standardparabel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nicht (streng) monoton wachsend und ist auch nicht (streng) monoton fallend, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2 = f(-1) && \text{mit } -2 < -1, \\ \text{aber } f(1) &= 1^2 = 1 < 4 = 2^2 = f(2) && \text{mit } 1 < 2. \end{aligned}$$

Allerdings ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, streng monoton fallend auf $] -\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, \infty[$, denn:

- Seien $x_1, x_2 \in] -\infty, 0]$ mit $x_1 < x_2 \leq 0$. Dann gilt $x_1^2 > x_2^2$ (da aus $x_1 < x_2 \leq 0$ folgt, dass $0 \leq -x_2 < -x_1$ und damit $0 \leq (-x_2)^2 = x_2^2 < (-x_1)^2 = x_1^2$) und somit ist $f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$. Also ist f auf $] -\infty, 0]$ streng monoton fallend.

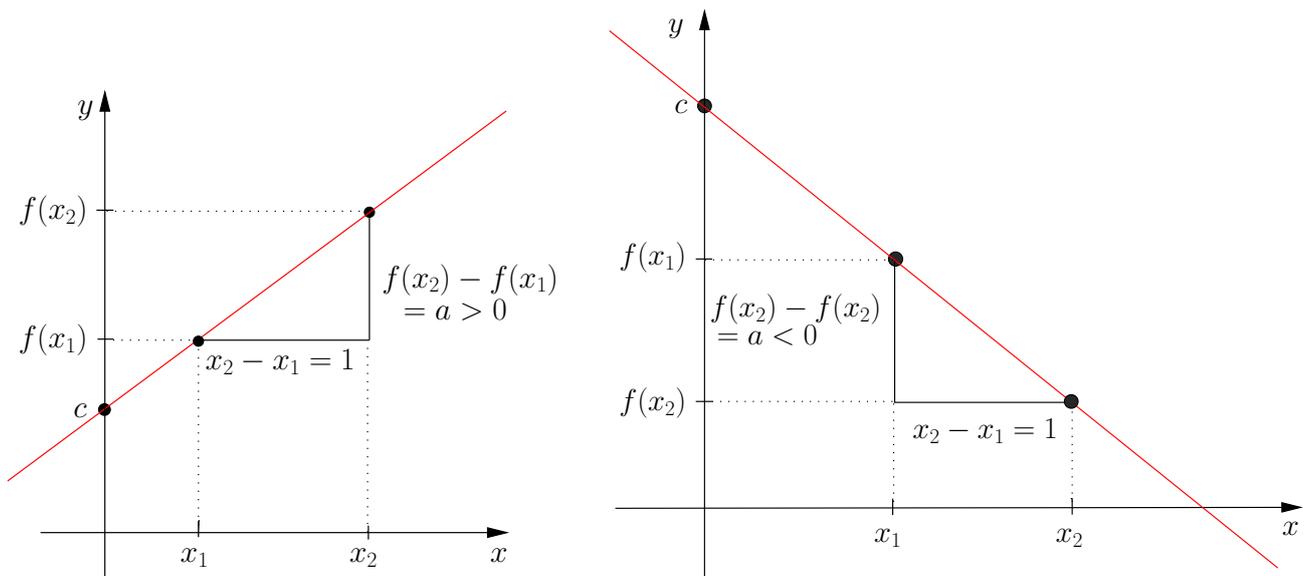


Abb. 2.2: Der Graph der linearen Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := ax + c$, mit $a > 0$ (links) und $a < 0$ (rechts).

- Seien $x_1, x_2 \in [0, \infty[$ mit $0 \leq x_1 < x_2$. Dann gilt $0 \leq x_1^2 < x_2^2$ und somit ist $f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$. Also ist f auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend.

Wir lernen nun weitere Eigenschaften von Funktionen kennen.

Definition 2.23. (periodische, gerade bzw. ungerade Funktion)

Seien $D, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow Y$ eine reelle Funktion.

(1) Sei $L > 0$. f heißt ***L-periodisch*** (d.h. hat die ***Periode*** L), falls für alle $x \in D$ gelten:

(i) $x \in D \implies x + L \in D$, und

(ii) $f(x + L) = f(x)$

(2) f heißt ***gerade***, falls für alle $x \in D$ gelten:

(i) $x \in D \implies -x \in D$, und

(ii) $f(-x) = f(x)$

(3) f heißt ***ungerade***, falls für alle $x \in D$ gelten:

(i) $x \in D \implies -x \in D$, und

(ii) $f(-x) = -f(x)$

Was bedeutet es anschaulich, wenn eine Funktion gerade, ungerade oder L -periodisch

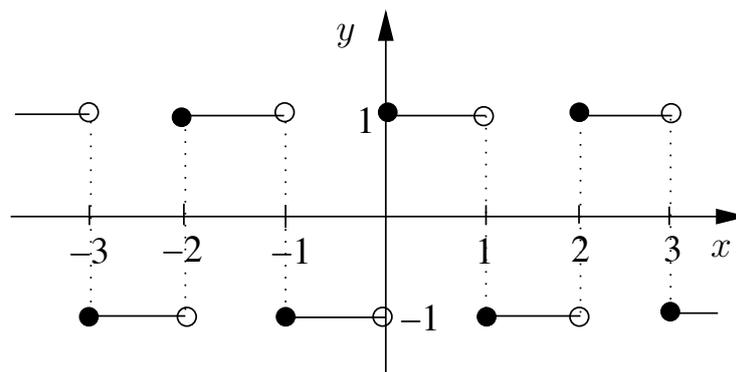


Abb. 2.3: Veranschaulichung des Graphen der Rechteckschwingung (2.1). An den Sprungstellen bedeuten die ausgefüllten bzw. nicht-ausgefüllten Punkte, dass der Funktionswert zu dem entsprechenden x -Wert durch den Wert im ausgefüllten Punkt (und nicht durch den Wert im nicht-ausgefüllten Punkt) definiert ist.

ist? Dieses wird in der nächsten Bemerkung erklärt.

Bemerkung 2.24. (Anschauung von periodisch, gerade, ungerade)

- (1) f ist genau dann **L -periodisch**, wenn der Graph von f beim Verschieben um L nach rechts oder links in sich selbst übergeht. – Anders ausgedrückt können wir den Graph einer L -periodischen Funktion zeichnen, indem wir den Graph zunächst auf einem beliebigen Intervall der Länge L zeichnen und dann immer fortgesetzt Kopien dieses Graphen rechts und links an das ursprüngliche Stück des Graphen heften.
- (2) f ist **gerade** genau dann, wenn der Graph von f achsensymmetrisch zu der y -Achse ist (d.h. bei Spiegelung an der y -Achse geht der Graph in sich selbst über).
- (3) f ist **ungerade** genau dann, wenn der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist (d.h. rotiert man den Graph um dem Punkt $(0, 0)$ um 180° , so geht er in sich selbst über).

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.25. (Rechteckschwingung)

Die Rechteckschwingung (siehe Abbildung 2.3) ist wie folgt definiert: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{wenn } x \in [2k - 1, 2k[\text{ für } k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{wenn } x \in [2k, 2k + 1[\text{ für } k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Sie ist periodisch mit der Periode $L = 2$, denn: Für jedes $x \in [2k - 1, 2k[$

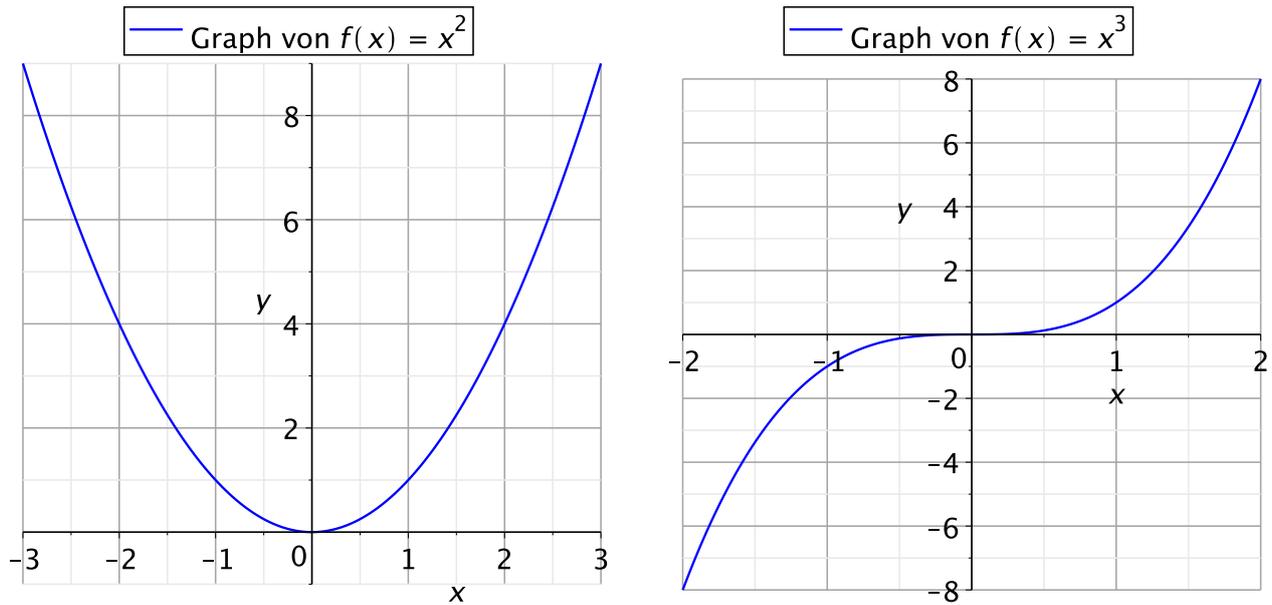


Abb. 2.4: Veranschaulichung der Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, (links) und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, (rechts).

ist $x + 2$ in $[(2k - 1) + 2, 2k + 2[= [2(k + 1) - 1, 2(k + 1)[$, und somit gilt $f(x) = f(x + 2) = -1$. Analog ist für $x \in [2k, 2k + 1[$ der Punkt $x + 2$ in $[2k + 2, (2k + 1) + 2[= [2(k + 1), 2(k + 1) + 1[$, und damit gilt $f(x) = f(x + 2) = 1$. Dieses zeigt die Periodizität mit der Periode $L = 2$.

Beispiel 2.26. (gerade bzw. ungerade Funktionen)

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist gerade, denn (i) es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ auch $-x \in \mathbb{R}$ und (ii) $f(-x) = (-x)^2 = ((-1)x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, ist ungerade, denn (i) es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ auch $-x \in \mathbb{R}$ und (ii) $f(-x) = (-x)^3 = ((-1)x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Graphen der beiden Funktionen sind in Abbildung 2.4 dargestellt.

2.4 Die klassischen Funktionen

In der folgenden Definition wird die **Eulersche Zahl** e vorerst als aus der Schule bekannt vorausgesetzt. Es gilt $e \in \mathbb{R}$ und $e \notin \mathbb{Q}$ und $e \approx 2,71828$. Auch das Verständnis des Ausdrucks e^x für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir als aus der Schule bekannt voraus.

(Siehe Anhang B.3 für eine elementare Einführung zu Potenzen mit rationalem Exponenten und Wurzeln.)

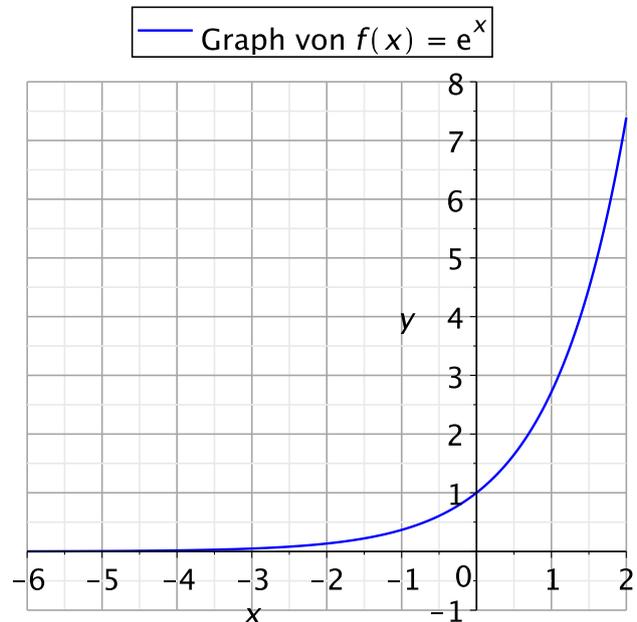
Definition 2.27. (Exponentialfunktion)

Sei e die **Eulersche Zahl**.

Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp(x) := e^x,$$

heißt die **Exponentialfunktion**.



Die **Exponentialfunktion** hat die folgenden **wichtigen Eigenschaften**:

- (1) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- (2) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, also $e^{x+y} = e^x e^y$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$
- (3) $\exp(0) = e^0 = 1$
- (4) Wenn $x_1 < x_2$ ist, dann gilt $\exp(x_1) < \exp(x_2)$, also $e^{x_1} < e^{x_2}$, d.h. \exp ist streng monoton wachsend.

Wir setzen voraus, dass die trigonometrischen Funktionen **Sinus** und **Cosinus**,

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

aus der Schule bekannt sind. Die Graphen dieser Funktionen sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Für eine Einführung des Bogenmaßes und des Sinus und Cosinus als Funktionen am Einheitskreis lesen Sie bitte Anhang B.6 dieses Skripts.

Wir halten einige **wichtige Eigenschaften des Sinus und des Cosinus** fest:

- (1) Sinus und Cosinus sind **2π -periodisch**:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- (2) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

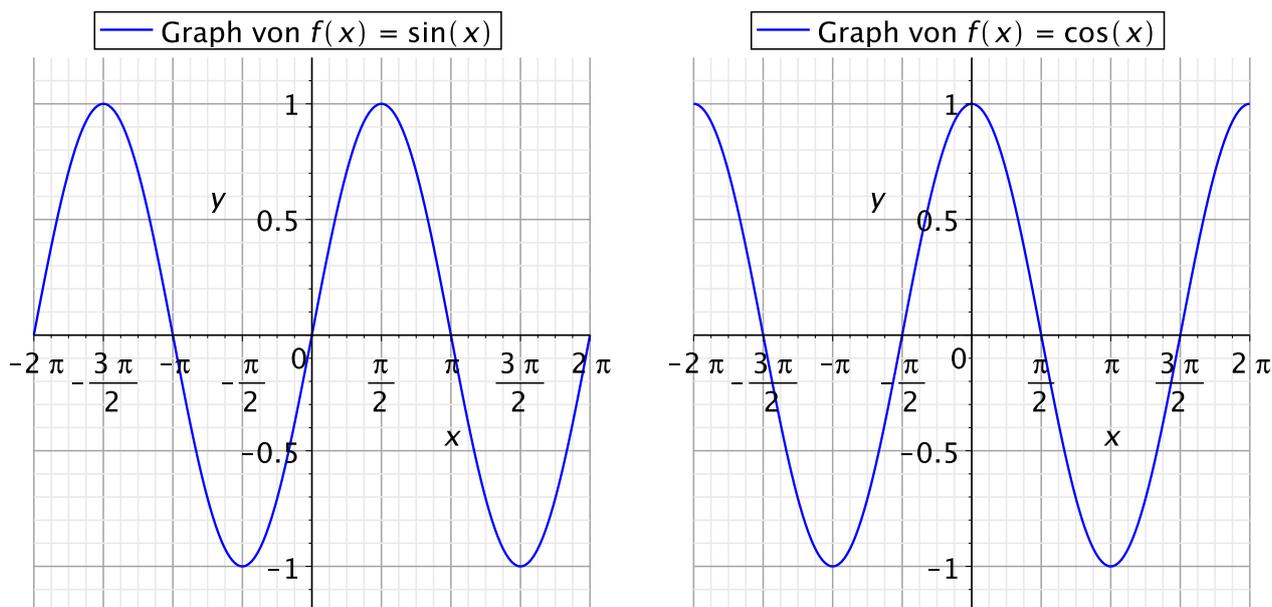


Abb. 2.5: Veranschaulichung der Graphen der Funktionen Sinus (links) und Cosinus (rechts).

(Dabei bedeutet $\sin^2(x) := [\sin(x)]^2$ und $\cos^2(x) := [\cos(x)]^2$.)

(3) **Additionstheoreme:** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y),$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).$$

(4) Der Sinus ist **ungerade**, und der Cosinus ist **gerade**:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(5) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Viele weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus lassen sich aus den oben aufgelisteten Eigenschaften herleiten bzw. finden sich in geeigneten Formelsammlungen.

Durch Quotientenbildung erhält man aus dem Sinus und Cosinus die Funktionen **Tangens** und **Cotangens**.

Definition 2.28. (Tangens und Cotangens)

$$\textit{Tangens:} \quad \tan : D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

$$\textit{mit } D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

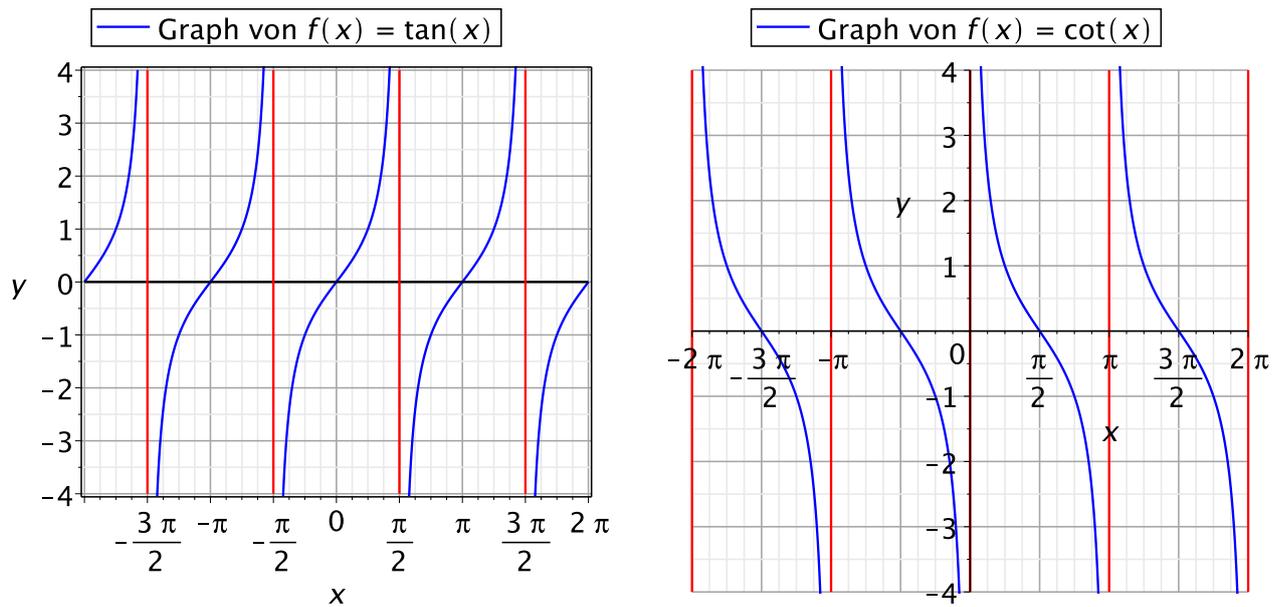


Abb. 2.6: Veranschaulichung der Graphen der Funktionen Tangens (links) und Cotangens (rechts) zusammen mit ihren Asymptoten (in rot).

Cotangens: $\cot : D_{\cot} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$
mit $D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

Die Graphen der Funktionen Tangens und Cotangens sind in Abbildung 2.6 dargestellt.

Aus der Exponentialfunktion lassen sich die folgenden Funktionen herleiten.

Definition 2.29. (Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus)

Sinus hyperbolicus: $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Cosinus hyperbolicus: $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Die Graphen von \sinh und \cosh sind in Abbildung 2.7 dargestellt.

Wir halten einige **wichtige Eigenschaften** dieser Funktionen fest:

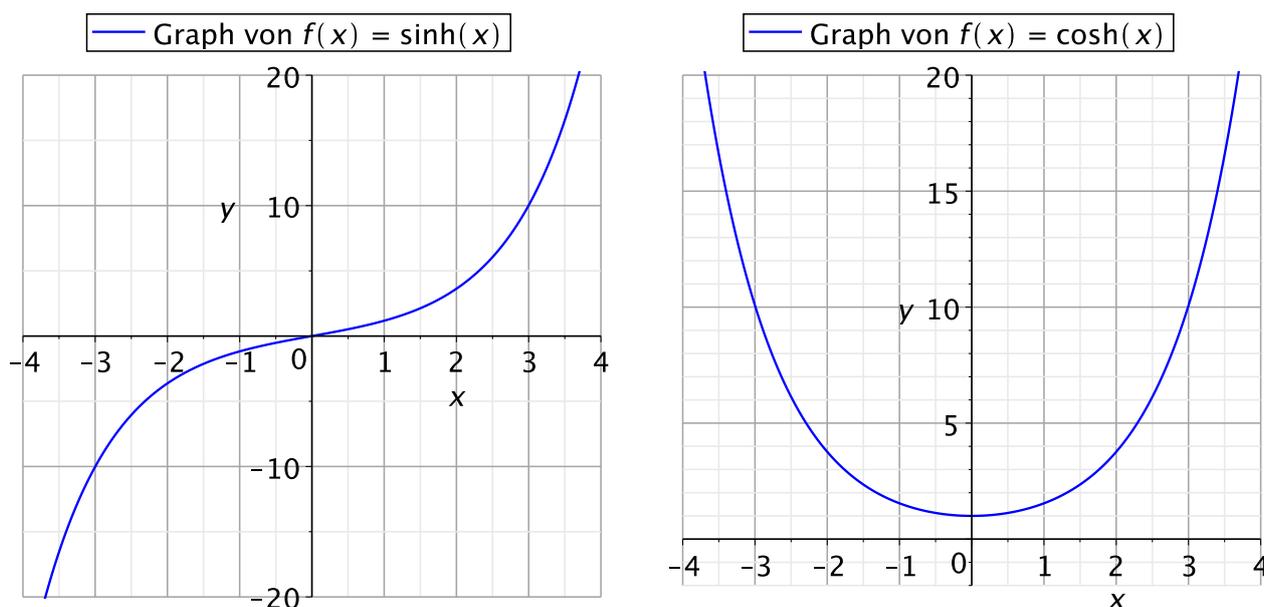


Abb. 2.7: Veranschaulichung der Graphen der Funktionen Sinus hyperbolicus (links) und Cosinus hyperbolicus (rechts).

(1) Im Punkt $x = 0$ sind die Funktionswerte

$$\sinh(0) = \frac{1}{2} (e^0 - e^{-0}) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0,$$

$$\cosh(0) = \frac{1}{2} (e^0 + e^{-0}) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.$$

(2) \sinh ist **ungerade**, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2} (e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = -\sinh(x).$$

\cosh ist **gerade**, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2} (e^{-x} + e^x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh(x).$$

(3) **Additionstheoreme:** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y),$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y).$$

(4) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Dabei bedeutet $\sinh^2(x) := [\sinh(x)]^2$ und $\cosh^2(x) := [\cosh(x)]^2$.)

Viele weitere Eigenschaften des Sinus hyperbolicus und des Cosinus hyperbolicus lassen sich aus den oben aufgelisteten Eigenschaften herleiten bzw. finden sich in geeigneten Formelsammlungen.

Zur Übung beweisen wir die erste Eigenschaft in (3) und die Eigenschaft (4):

Beweis der ersten Eigenschaft in (3): Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Nach der Definition von \sinh und \cosh und wegen $e^x e^y = e^{x+y}$ gelten

$$\begin{aligned} \sinh(x) \cosh(y) &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4} (e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}), \\ \cosh(x) \sinh(y) &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4} (e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}) + \frac{1}{4} (e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-x-y}) = \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y). \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Gleichung in (3) ist analog. □

Beweis von (4): Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir nutzen zunächst, dass \sinh ungerade und \cosh gerade ist (Eigenschaft (2) oben) und danach die zweite Eigenschaft in (3):

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \cosh(x) \cosh(x) - \sinh(x) \sinh(x) \\ &= \cosh(x) \cosh(-x) + \sinh(x) \sinh(-x) && \text{(wegen (2))} \\ &= \cosh(x-x) = \cosh(0) = 1, && \text{(nach (3) mit } x = x, y = -x) \end{aligned}$$

womit (4) bewiesen ist. □

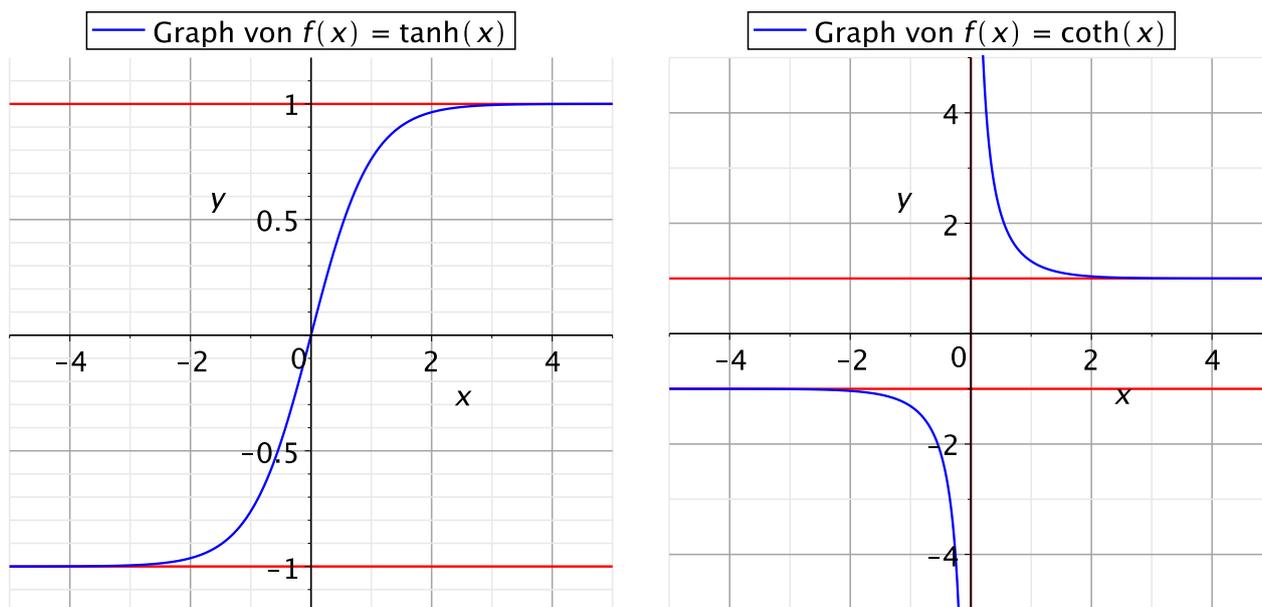


Abb. 2.8: Veranschaulichung der Graphen der Funktionen Tangens hyperbolicus (links) und Cotangens hyperbolicus (rechts) zusammen mit ihren Asymptoten (in rot).

Durch Quotientenbildung erhalten wir die folgenden Funktionen.

Definition 2.30. (Tangens hyperbolicus, Cotangens hyperbolicus)

Tangens hyperbolicus: $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Cotangens hyperbolicus: $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

Die Graphen der Funktionen \tanh und \coth sind in Abbildung 2.8 dargestellt.

Als Letztes betrachten wir die Betragsfunktion.

Definition 2.31. (Betragsfunktion)

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

heißt die **Betragsfunktion**.

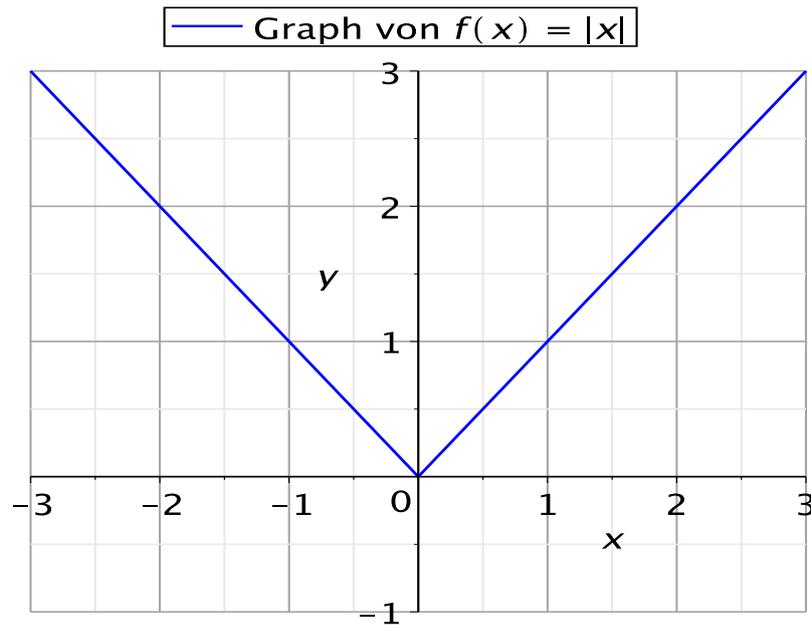


Abb. 2.9: Der Graph der Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$.

Der Graph der Betragsfunktion ist in Abbildung 2.9 veranschaulicht.

Die Betragsfunktion hat die folgenden **wichtigen Eigenschaften**:

- (1) $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (3) $|x| = \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand von x und y auf der Zahlengeraden.

2.5 Die Umkehrfunktion

Wir führen nun die wichtigen neuen Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv ein.

Definition 2.32. (injektiv, surjektiv und bijektiv)

Eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt:

- (1) **injektiv**, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ **höchstens eine** Lösung in D hat.
- (2) **surjektiv**, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ **mindestens eine** Lösung in D hat.

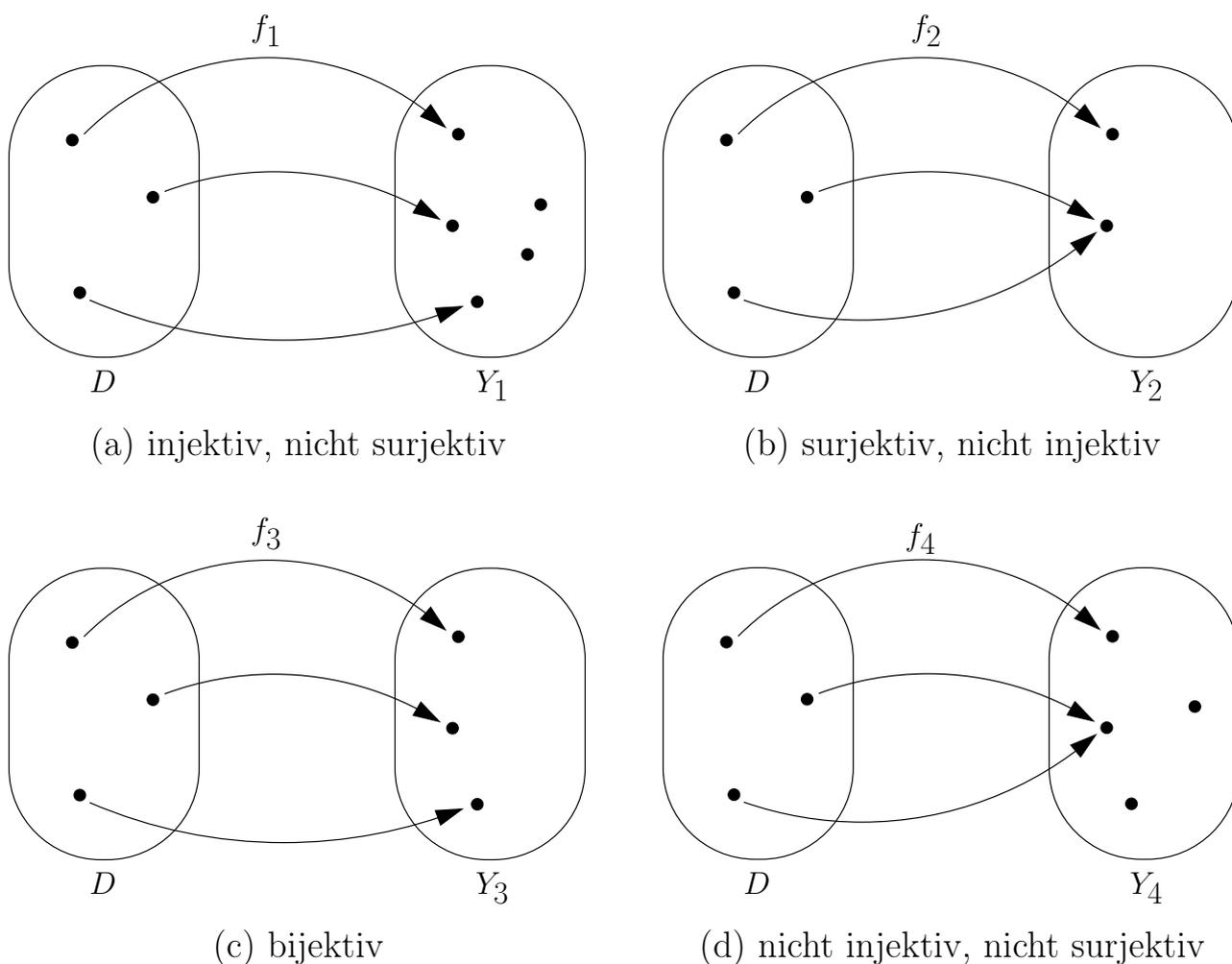


Abb. 2.10: Veranschaulichung der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv.

(3) **bijektiv**, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ **genau eine** Lösung in D hat (d.h. f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist).

Die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv sind in Abbildung 2.10 illustriert. Bevor wir Beispiele betrachten, führen wir noch den Begriff der Bildmenge ein.

Definition 2.33. (Bildmenge)

Sei $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion. Die Menge

$$B_f := f(D) := \{f(x) : x \in D\}$$

heißt die **Bildmenge** von f .

Bemerkung 2.34. (Bildmenge und surjektiv)

$B_f = \{f(x) : x \in D\}$ ist eine Teilmenge von Y und besteht aus allen Funktionswerten von $f : D \rightarrow Y$, also aus allen $y \in Y$, für die Gleichung $f(x) = y$ lösbar ist. f ist **surjektiv** genau dann, wenn $B_f = Y$ ist. Ist f **nicht surjektiv**, so kann man f surjektiv machen, indem man die Zielmenge Y durch die Bildmenge B_f ersetzt. Man erhält dann eine neue surjektive Funktion $g : D \rightarrow B_f$, $g(x) := f(x)$, die mit f bis auf die Zielmenge übereinstimmt.

Untersuchen wir nun einige Beispiele hinsichtlich dieser für uns neuen Eigenschaften von Funktionen.

Beispiel 2.35. (injektiv, surjektiv und bijektiv)

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$, ist injektiv aber nicht surjektiv. Die Bildmenge B_f ist die Menge der Quadratzahlen.

Begründung: Für $y \in \{1, 2, 3, \dots\}$ betrachten wir die Gleichung $x^2 = y$ und suchen Lösungen in \mathbb{N} .

Fall 1 : y ist Quadratzahl, d.h. $y \in \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\} = \{1, 4, 9, \dots\}$. Dann hat $x^2 = y$ die eindeutige Lösung $x = \sqrt{y} \in \mathbb{N}$.

Fall 2: $y \in \mathbb{N}$, aber y ist keine Quadratzahl. Dann hat $x^2 = y$ keine Lösung in \mathbb{N} .

Also hat $x^2 = y$ für $y \in \mathbb{N}$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{N}$, d.h. f ist injektiv. Da $B_f = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \neq \mathbb{N}$ ist, ist f aber nicht surjektiv.

- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nicht injektiv und nicht surjektiv. Die Bildmenge ist $B_f = [0, \infty[$.

Begründung: Für $y \in \mathbb{R}$ suchen wir reelle Lösungen von $x^2 = y$.

Fall 1: $y < 0$. Dann ist $x^2 = y$ nicht lösbar in \mathbb{R} . Also ist f nicht surjektiv.

Fall 2: $y = 0$. Dann hat $x^2 = 0$ genau die Lösung $x = 0$.

Fall 3: $y > 0$. Dann hat $x^2 = y$ zwei reelle Lösungen nämlich $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$. Also ist f nicht injektiv.

Aus Fall 1 bis 3 folgt, dass $B_f = [0, \infty[$.

- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist nicht injektiv aber surjektiv.

Begründung: Für $y \in [0, \infty[$ suchen wir reelle Lösungen von $x^2 = y$.

Fall 1: $y = 0$. Dann hat $x^2 = 0$ genau die Lösung $x = 0$.

Fall 2: $y > 0$. Dann hat $x^2 = y$ zwei reelle Lösungen nämlich $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$.

Also hat f für jedes $y \in [0, \infty[$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 = y$, d.h. f ist surjektiv. Da es für $y > 0$ aber zwei Lösungen zu $x^2 = y$ gibt, ist f aber nicht injektiv.

(d) $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist bijektiv.

Begründung: Für $y \in [0, \infty[$ suchen wir jetzt nicht-negative reelle Lösungen x der Gleichung $x^2 = y$. Für jedes $y \geq 0$ gibt es genau eine solche Lösung nämlich $x = \sqrt{y}$. Also ist f bijektiv.

Nun können wir den Begriff der Umkehrfunktion einführen.

Definition 2.36. (Umkehrfunktion)

Ist $f : D \rightarrow Y$ **bijektiv**, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau eine Lösung $x \in D$ von $f(x) = y$. Damit können wir die **Umkehrfunktion** (oder **inverse Funktion**) f^{-1} von f definieren:

$$f^{-1} : Y \rightarrow D, \quad f^{-1}(y) := \text{„eindeutige Lösung } x \text{ von } f(x) = y \text{ in } D\text{“}.$$

Die Umkehrfunktion ist dann bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Achtung: Die Notation f^{-1} für die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion f hat nichts mit $1/f$ zu tun!

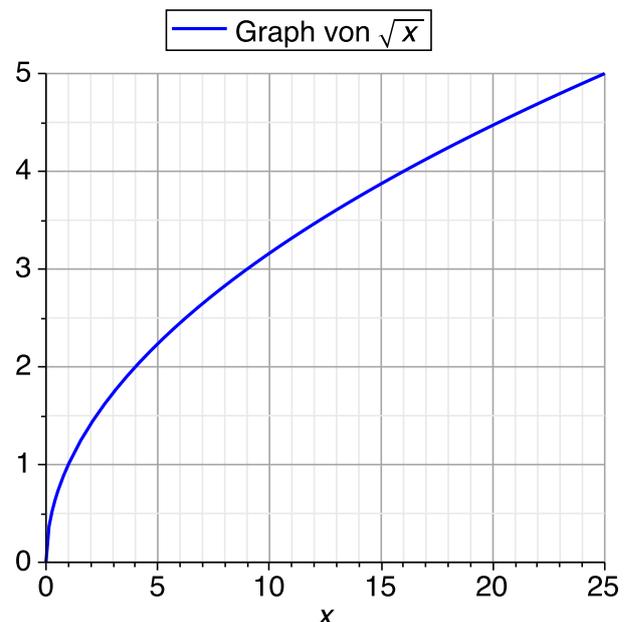
Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.37. (Umkehrfunktion)

Die Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist nach Beispiel 2.35 (d) bijektiv. Für $y \geq 0$ ist $x = \sqrt{y}$ die eindeutige nicht-negative Lösung von $x^2 = y$. Also ist

$$f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad f^{-1}(y) := \sqrt{y},$$

die Umkehrfunktion von f .



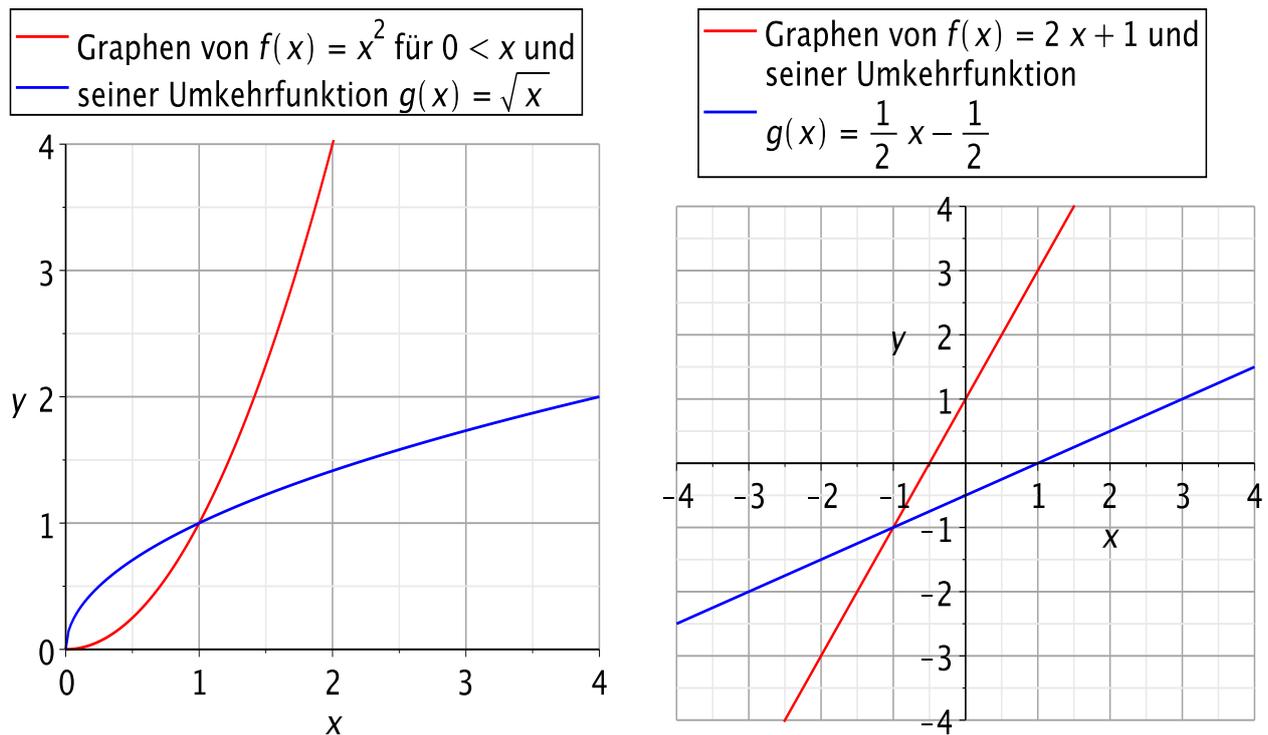


Abb. 2.11: Veranschaulichung des Graphen von $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $f(x) := x^2$, (links) bzw. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 1$, (rechts) zusammen mit dem Graphen der jeweiligen Umkehrfunktion.

Beispiel 2.38. (Umkehrfunktion)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 1$, ist bijektiv, denn die Gleichung

$$y = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y - 1 = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y - 1}{2} = x$$

hat für jedes $y \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung in \mathbb{R} , nämlich $x = (y - 1)/2$. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) := \frac{y - 1}{2} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 2.39. (Graph der Umkehrfunktion)

Ist eine Funktion f bijektiv, so ergibt sich der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $y = x$. Falls die Achsen des Koordinatensystems nicht gleich skaliert sind, so muss man die Achsen mitspiegeln. Dieses ist in Abbildung 2.11 illustriert.

Begründung: Mathematisch zeigt man dieses wie folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(f^{-1}) &= \{(y, f^{-1}(y)) : y \in Y\} \\ &= \{(f(x), f^{-1}(f(x))) : x \in D\} = \{(f(x), x) : x \in D\},\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt genutzt haben, dass sich jedes $y \in Y$ eindeutig als $y = f(x)$ mit $x \in D$ darstellen lässt, da f bijektiv ist. Im letzten Schritt nutzen wir, dass aus der Definition der Umkehrfunktion $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ folgt.

Der nachfolgende Hilfssatz liefert ein nützliches hinreichendes (aber nicht notwendiges) Kriterium für die Injektivität einer Funktion.

Hilfssatz 2.40. (streng monoton \Rightarrow injektiv)

*Sei $f : D \rightarrow Y$ eine reelle Funktion, die **streng monoton wachsend** oder **streng monoton fallend** ist. Dann ist f **injektiv**.*

Beweis von Hilfssatz 2.40: Wir betrachten nur den Fall, dass f streng monoton wachsend ist. Der Fall, dass f streng monoton fallend ist, geht analog.

Sei also f streng monoton wachsend, d.h. für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Angenommen, f wäre nicht injektiv. Dann gäbe es (mindestens) ein $y \in Y$, für das die Gleichung $f(x) = y$ (mindestens) zwei Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) = y$ hat. Da f streng monoton wachsend ist, folgt nun aber $f(x_1) < f(x_2)$. ∇ Das ist ein Widerspruch zu $f(x_1) = f(x_2) = y$. Da unsere Annahme, dass f nicht injektiv sei, zu einem Widerspruch geführt hat, muss diese Annahme falsch sein. Also ist f injektiv. \square

2.6 Die Umkehrfunktionen der klassischen Funktionen

Nun führen wir den natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ein.

Definition 2.41. (natürlicher Logarithmus)

Die *Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist streng monoton wachsend und somit nach Hilfssatz 2.40 injektiv.

Ihre Bildmenge ist

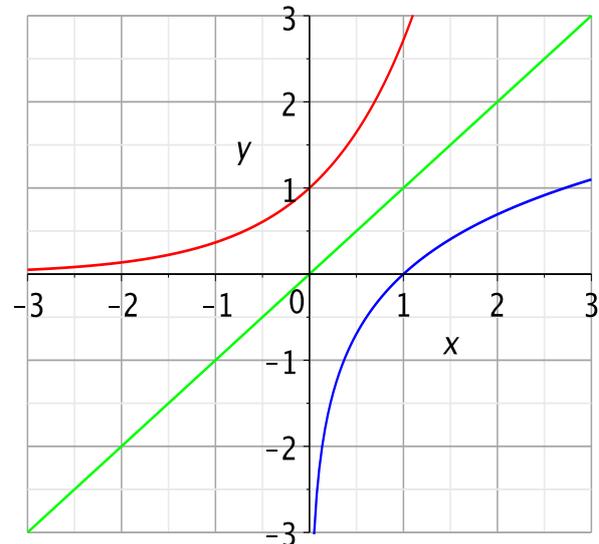
$$B_{\exp} = \exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[.$$

Also ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ bijektiv.

Die Umkehrfunktion heißt der **natürliche Logarithmus**

$$\ln := \exp^{-1} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

— Graph von $f(x) = e^x$
 — Graph von $g(x) = \ln(x)$
 — und die Diagonale $h(x) = x$



Wir halten einige **wichtige Eigenschaften** des **natürlichen Logarithmus** fest:

- (1) $\ln(1) = 0$, da $\exp(0) = 1$.
- (2) \ln ist streng monoton wachsend.
- (3) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
- (4) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
- (5) $\ln(x^p) = p \ln(x)$ für alle $x > 0$ und alle $p \in \mathbb{R}$.

An dieser Stelle führen wir noch die Exponentialfunktion und den Logarithmus mit einer beliebigen Basis $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$ ein.

Definition 2.42. (Exponentialfunktion und Logarithmus zur Basis a)

Sei $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$. Wir definieren die **Exponentialfunktion zur Basis a** durch

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[, \quad \exp_a(x) := a^x := e^{\ln(a)x}.$$

Diese Funktion ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion ist der **Logarithmus zur Basis a** , gegeben durch

$$\log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a(y) := \frac{\ln(y)}{\ln(a)}.$$

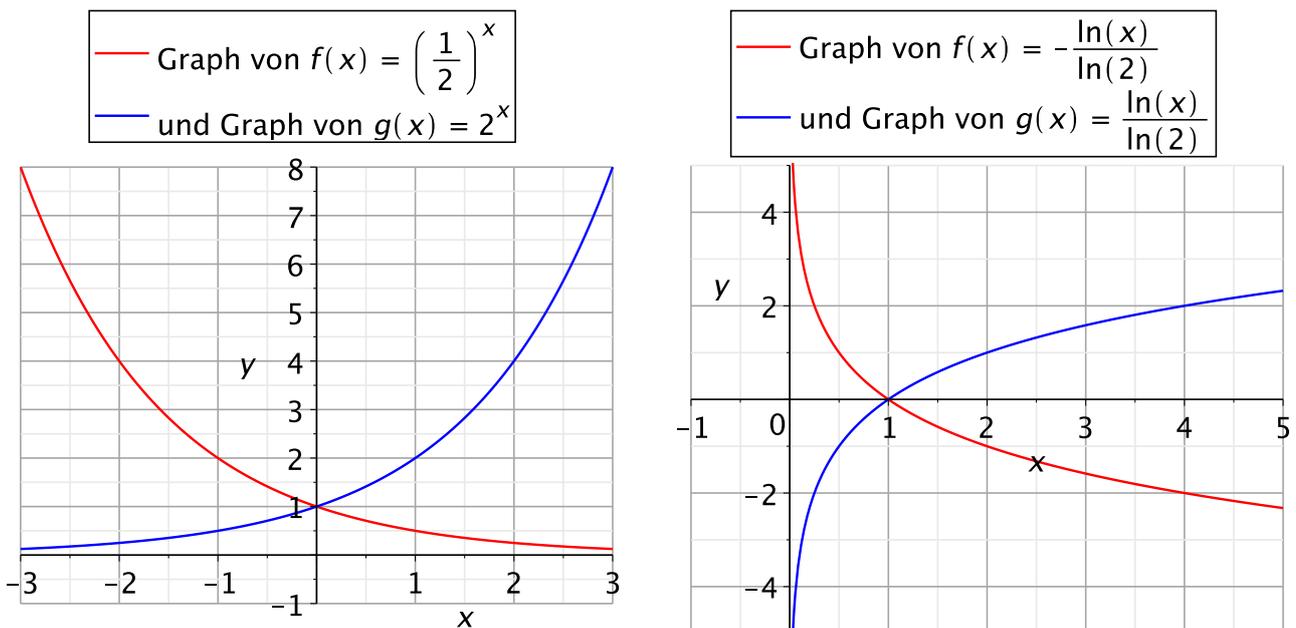


Abb. 2.12: Graphen von $\exp_2(x) = 2^x$ (blau) und $\exp_{1/2}(x) = (1/2)^x$ (rot) im linken Bild, und die Graphen der zugehörigen Umkehrfunktionen $\log_2(x)$ (blau) bzw. $\log_{1/2}(x)$ (rot) im rechten Bild.

In Abbildung 2.12 sind die Graphen der Exponentialfunktion und der zugehörige Logarithmus zur Basis $a = 1/2$ und $a = 2$ veranschaulicht.

Man überzeugt sich leicht, dass die Formel für $\log_a(y)$ stimmt, indem man $y = a^x$ (wobei per Definition $a^x = e^{\ln(a)x}$) nach x auflöst:

$$\begin{aligned} y = e^{\ln(a)x} &\iff \ln(y) = \ln(e^{\ln(a)x}) \\ \iff \ln(y) = \ln(a)x &\iff \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir kurz die **Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen**. Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, ob diese Funktionen jeweils injektiv sind, bzw. mit welchen Einschränkungen an ihre Definitionsmenge diese Funktionen jeweils injektiv werden. Weiter benötigen wir die Bildmenge der gegebenenfalls eingeschränkten injektiven Funktion, da diese die Definitionsmenge der Umkehrfunktion wird.

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind weder injektiv noch surjektiv. Durch Einschränkung der Zielmenge erreicht man Surjektivität, und durch Einschränkung der Definitionsmenge erreicht man Injektivität. Betrachtet man

$$s : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \quad s(x) := \sin(x),$$

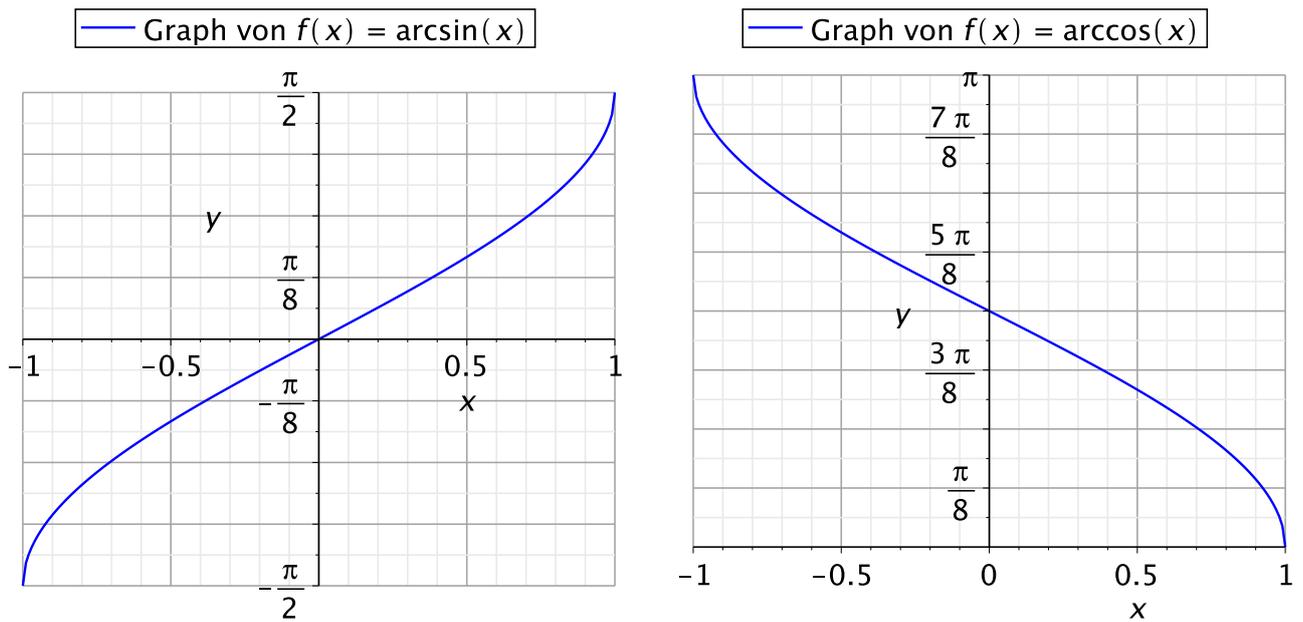


Abb. 2.13: Veranschaulichung der Graphen von arcsin (links) und arccos (rechts).

$$c : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad c(x) := \cos(x),$$

so sind s und c bijektiv und haben jeweils eine Umkehrfunktion.

Definition 2.43. (Arcussinus und Arcuscosinus)

- (1) Die Umkehrfunktionen von $s : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $s(x) := \sin(x)$, heißt **Arcussinus** und wird mit

$$\arcsin := s^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

bezeichnet.

- (2) Die Umkehrfunktionen von $c : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $c(x) := \cos(x)$, heißt **Arcuscosinus** und wird mit

$$\arccos := c^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

bezeichnet.

Die Graphen des Arcussinus und des Arcuscosinus sind in Abbildung 2.13 dargestellt.

Der Tangens $\tan : D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}$ ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv. Betrachtet

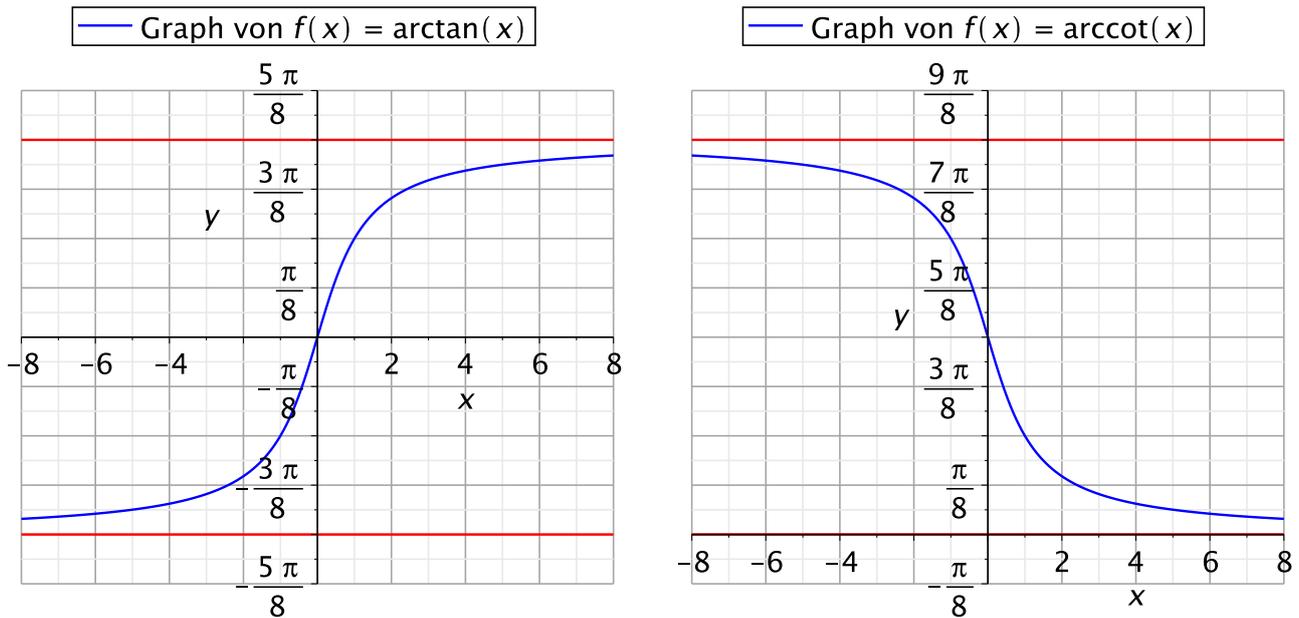


Abb. 2.14: Veranschaulichung der Graphen \arctan (links) und arccot (rechts) mit ihren jeweiligen Asymptoten (in rot).

man

$$t : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t(x) := \tan(x),$$

so ist t bijektiv und hat eine Umkehrfunktion. Analog ist der Cotangens $\cot : D_{\cot} \rightarrow \mathbb{R}$ zwar surjektiv, aber nicht bijektiv. Betrachtet man

$$u :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \cot(x),$$

so ist u bijektiv und hat eine Umkehrfunktion.

Definition 2.44. (Arcustangens und Arcuscotangens)

(1) Die Umkehrfunktionen von $t : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) := \tan(x)$, heißt **Arcustangens** und wird mit

$$\arctan := t^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

bezeichnet.

(2) Die Umkehrfunktionen von $u :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := \cot(x)$, heißt **Arcuscotangens** und wird mit

$$\operatorname{arccot} := u^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

bezeichnet.

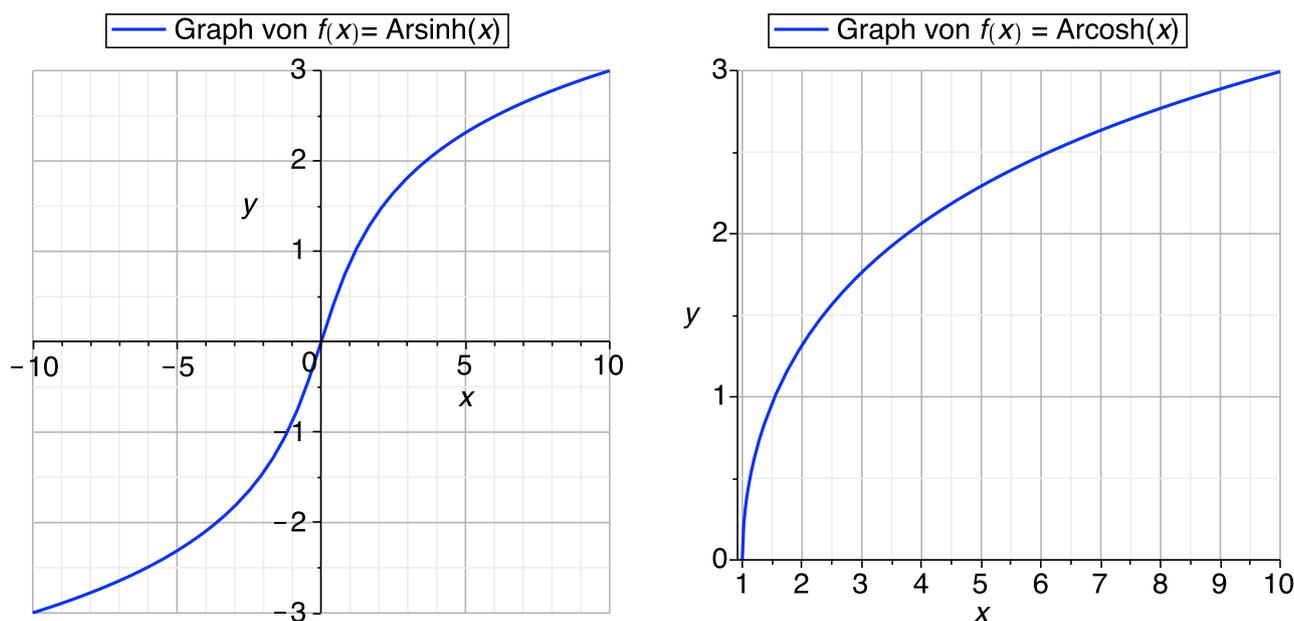


Abb. 2.15: Der Graph von Arsinh (links) und der Graph von Arcosh (rechts).

Die Graphen des Arcustangens und Arcuscotangens sind in Abbildung 2.13 veranschaulicht.

Zuletzt betrachten wir kurz die **Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen**. Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, ob diese Funktionen jeweils injektiv sind, bzw. mit welchen Einschränkungen an ihre Definitionsmenge diese Funktionen jeweils injektiv werden. Weiter benötigen wir die Bildmenge der gegebenenfalls eingeschränkten injektiven Funktion, da diese die Definitionsmenge der Umkehrfunktion wird.

Der Sinus hyperbolicus $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv.

Der Cosinus hyperbolicus $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv, aber die Funktion $c : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ ist bijektiv und hat somit eine Umkehrfunktion

Definition 2.45. (Areasinus und Areacosinus)

- (1) Die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Areasinus** und wird mit $\text{Arsinh} := \sinh^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet.
- (2) Die Umkehrfunktion von $c : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$, $c(x) := \cosh(x)$, heißt **Areacosinus** und wird mit $\text{Arcosh} := \cosh^{-1} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ bezeichnet.

Die Graphen des Areasinus und des Areacosinus sind in Abbildung 2.15 veran-

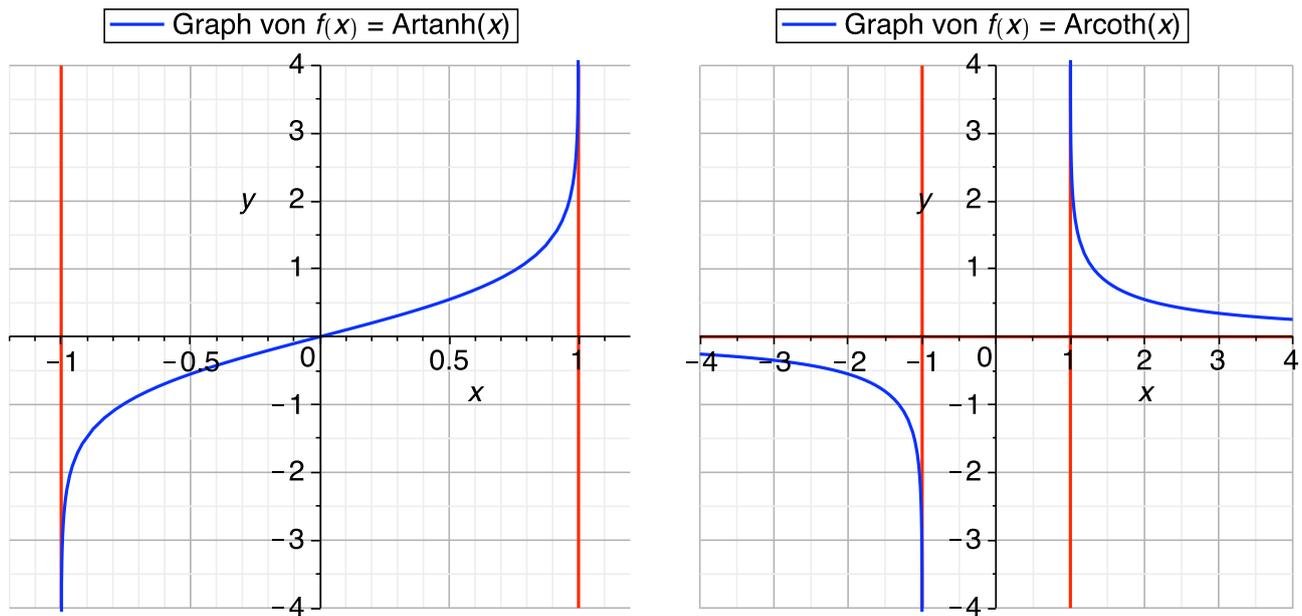


Abb. 2.16: Der Graph von Artanh (links) und der Graph von Arcoth (rechts) mit ihren jeweiligen Asymptoten.

schaulicht.

Die Tangens hyperbolicus und der Cotangens hyperbolicus sind beide injektiv, und nach der Einschränkung der Zielmenge auf die Bildmenge erhalten wir jeweils eine bijektive Funktion.

Definition 2.46. (Areatangens und Areacotangens)

- (1) Die Umkehrfunktion von $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ heißt der **Areatangens** und wird mit $\text{Artanh} := \tanh^{-1} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet.
- (2) Die Umkehrfunktion von $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ heißt **Areacotangens** und wird mit $\text{Arcoth} := \coth^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezeichnet.

Die Graphen des Areatangens und des Areacotangens sind in Abbildung 2.16 veranschaulicht.

Die Eigenschaften und Graphen der Areafunktionen können direkt aus den Eigenschaften und Graphen von $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$ und $\coth(x)$ hergeleitet werden. Beispielsweise wissen wir, dass die Geraden $g(x) = -1$ und $h(x) = 1$ horizontale Asymptoten für $\tanh(x)$ und $\coth(x)$ sind. Daher wissen wir, dass die vertikale Linie durch $(-1, 0)$ und die vertikale Linie durch $(1, 0)$ beide vertikale Asymptoten von $\text{Artanh}(x)$ und $\text{Arcoth}(x)$ sind.

Zur Übung leiten wir eine explizite Darstellung für den Arcsinus her.

Beispiel 2.47. (explizite Formel für $\operatorname{Arsinh}(x)$)

Wir wollen eine explizite Darstellung der Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh}(x)$ von $\sinh(x)$ finden. Dazu setzen wir $\sinh(x) = y$ und lösen nach $x = \operatorname{Arsinh}(y)$ auf:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \Longleftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2y,$$

und mit der Substitution $z = e^x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} = 2y \quad | \cdot z & \Longleftrightarrow z^2 - 1 = 2yz \quad | - 2yz \\ & \Longleftrightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow (z^2 - 2yz + y^2) - 1 - y^2 = 0 \\ & \begin{array}{l} \text{2. binom.} \\ \text{Formel} \\ \downarrow \\ \Longleftrightarrow \end{array} (z - y)^2 - (1 + y^2) = 0 \\ & \begin{array}{l} \text{3. binom.} \\ \text{Formel} \\ \downarrow \\ \Longleftrightarrow \end{array} (z - y + \sqrt{1 + y^2})(z - y - \sqrt{1 + y^2}) = 0 \\ & \Longleftrightarrow z = y \pm \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Daher sehen wir, dass gilt

$$e^x = z = y \pm \sqrt{1 + y^2}.$$

Weil $e^x > 0$ gilt und weil aus $\sqrt{1 + y^2} > \sqrt{y^2} = y$ die Abschätzung

$$y - \sqrt{1 + y^2} < y - y = 0$$

folgt, können wir die Lösung mit dem Minuszeichen ausschließen. Daher gilt

$$\begin{aligned} e^x = y + \sqrt{1 + y^2} & \Longleftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \\ & \Longleftrightarrow \operatorname{Arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}), \end{aligned}$$

und wir haben eine explizite Formel für $\operatorname{Arsinh}(x)$ hergeleitet.

2.7 Verkettung von Funktionen

Zuletzt lernen wir die Verkettung oder das „nacheinander Ausführen“ von Funktionen kennen. Wir werden dieses benötigen, wenn wir die Kettenregel beim Ableiten und die Substitutionsregel beim Integrieren besprechen.

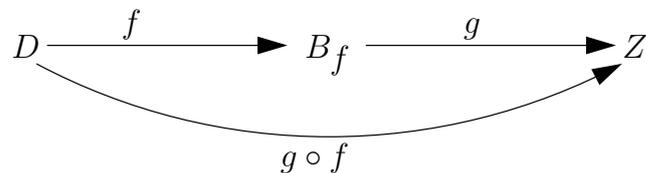
Definition 2.48. (Verkettung von Funktionen)

Seien $f : D \rightarrow Y$ und $g : \tilde{D} \rightarrow Z$ Funktionen. Ist $B_f \subseteq \tilde{D}$, so können wir die **Verkettung**

$$g \circ f : D \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

definieren. „ $g \circ f$ “ wird als „ g verkettet mit f “ oder kurz als „ g nach f “ gelesen.

Die Idee hinter der Verkettung von Funktion ist in der nachfolgenden Skizze veranschaulicht: Für die Bildmenge $B_f = f(D)$ von f muss $B_f \subseteq \tilde{D}$ gelten, damit wir $y = f(x)$ (für jedes $x \in D$) in $g(y)$ einsetzen dürfen.



Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.49. (Verkettung von Funktionen)

(a) Seien

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &:= \sin(x), \\
 g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &:= x^2.
 \end{aligned}$$

Dann gilt $B_f = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R} = D_g$ und $B_g = [0, \infty[\subseteq \mathbb{R} = D_f$, und wir erhalten die Verkettungen

$$\begin{aligned}
 g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (g \circ f)(x) &= [\sin(x)]^2 = \sin^2(x), \\
 f \circ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (f \circ g)(x) &= \sin(x^2).
 \end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

(b) Seien

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &:= e^x, \\
 g : [0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &:= \sqrt{x}.
 \end{aligned}$$

Dann gilt $B_f =]0, \infty[\subseteq [0, \infty[= D_g$ und $B_g = [0, \infty[\subseteq \mathbb{R} = D_f$, und wir erhalten die Verkettungen

$$\begin{aligned}
 g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (g \circ f)(x) &= \sqrt{e^x}, \\
 f \circ g :]0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}, & (f \circ g)(x) &= e^{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

(c) Seien

$$\begin{aligned} f &:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &:= \ln(x), \\ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &:= \sin(x). \end{aligned}$$

Dann gilt $B_f = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} = D_g$ und wir erhalten

$$g \circ f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = \sin(\ln(x)).$$

Da $B_g = [-1, 1]$ keine Teilmenge von $D_f =]0, \infty[$ ist, ist $f \circ g$ nicht definiert.

Ein Sonderfall ist die Verkettung einer bijektiven Funktion mit ihrer Umkehrfunktion.

Bemerkung 2.50. (Verkettung von Funktion und Umkehrfunktion)

Ist $f : D \rightarrow Y$ bijektiv und $f^{-1} : Y \rightarrow D$ die Umkehrfunktion von f , so sind $f^{-1} \circ f : D \rightarrow D$ und $f \circ f^{-1} : Y \rightarrow Y$ definiert, und es gilt

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = x && \text{für alle } x \in D, \\ (f \circ f^{-1})(y) &= f(f^{-1}(y)) = y && \text{für alle } y \in Y. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Es ist unbefriedigend, dass quadratische Gleichungen der Form $x^2 + c = 0$ mit $c > 0$ keine reellen Lösungen haben. Daher führen wir in Teilkapitel 3.1 die komplexen Zahlen als Erweiterung des Zahlbereichs der reellen Zahlen ein und lernen die Grundrechenarten Addition, Multiplikation (und damit auch Division und Subtraktion) kennen. Wir entwickeln auch bereits eine geometrische Anschauung der komplexen Zahlen in der „Gaußschen Zahlenebene“.

In Teilkapitel 3.2 werden wir sehen, dass nun alle quadratischen Gleichungen (mit reellen Koeffizienten) mit Vielfachheit gezählt genau zwei komplexe (nicht notwendigerweise verschiedene) Lösungen haben.

In Teilkapitel 3.3 führen wir dann die Polardarstellung der komplexen Zahlen ein. Wir lernen, wie man zwischen der „Normaldarstellung“ (oder kartesischen Darstellung) komplexer Zahlen und der Polardarstellung hin und her wechselt. Mit Hilfe der sogenannten Euler-Formel können wir komplexe Zahlen in der Polardarstellung sehr bequem multiplizieren und dividieren. Beide Prozesse bekommen nun auch eine einfache geometrische Anschauung.

In Teilkapitel 3.4 betrachten wir beliebige komplexe Polynome vom Grad n und lernen, dass diese (mit Vielfachheit gezählt) immer jeweils n komplexe Nullstellen haben. Speziell werden wir Gleichungen der Form $z^n = w$ mit einer vorgegebenen komplexen Zahl w lösen. Dieses führt für $w = 1$ auf die n -ten Einheitswurzeln und für beliebiges n auf „gedrehte und skalierte Kopien“ der n -ten Einheitswurzeln.

3.1 Einführung in die komplexen Zahlen

Motivation: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in \mathbb{R} keine Lösung. Es war eine geniale Idee von Carl Friedrich Gauß (1777–1855), einfach so zu tun, als gäbe es eine Lösung dieser Gleichung. Es ist klar, dass die Lösung keine reelle Zahl sein kann, sondern ein anderes Objekt sein muss. Wir nennen dieses Objekt die **imaginäre Einheit** und bezeichnen es mit i . Für i gilt also $i^2 = -1$.

Definition 3.1. (komplexe Zahlen)

(1) Sei i die **imaginäre Einheit**, d.h. es gelte $i^2 = -1$. Dann heißt ein Objekt der Form

$$a + bi \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

eine **komplexe Zahl**. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet.

(2) Sind $a + bi$ und $c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so gilt per Definition

$$a + bi = c + di \quad \iff \quad a = c \text{ und } b = d.$$

Bemerkung 3.2. (\mathbb{R} als Teilmenge von \mathbb{C})

Die komplexen Zahlen enthalten die reellen Zahlen als Teilmenge, denn jede reelle Zahl a kann man als $a + 0 \cdot i = a + 0i$ schreiben. Also gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Man kann mit komplexen Zahlen wie mit reellen Zahlen rechnen, wenn man $i^2 = -1$ betrachtet. Betrachten wir dazu zunächst einige Beispiele.

Beispiel 3.3. (Rechnen mit komplexen Zahlen)

(a) $(1 + 2i) + (3 - i) = 1 + 3 + 2i - i = 4 + i$

(b) $(1 + 2i) \cdot (3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 \underset{i^2 = -1}{=} 3 + 5i + 2 = 5 + 5i$

(c) Um einen Bruch mit Nenner $3 - i$ zu vereinfachen, erweitern wir den Bruch mit $3 + i$ und vereinfachen:

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i + 6i + 2i^2}{9 - i^2}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ i^2=-1}}{=} \frac{3 + 7i - 2}{9 - (-1)} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Warum haben wir mit $3 + i$ erweitert? Durch diesen „Trick“ wurde der Nenner reell, nämlich 10. Die Division durch 10 können wir nun als Multiplikation mit $1/10$ auffassen.

Die von uns bereits intuitiv angewendeten Rechenregeln sind korrekt, und wir halten diese als Definition fest.

Definition 3.4. (Addition und Multiplikation komplexer Zahlen)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir:

- (1) **Addition in \mathbb{C} :** $(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$
 (2) **Multiplikation in \mathbb{C} :** $(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

Betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel 3.5. (Addition und Multiplikation komplexer Zahlen)

- (a) $(5 - 6i) + (\pi + \sqrt{2}i) = (5 + \pi) + (\sqrt{2} - 6)i$
 (b) $(-\sqrt{3} - 3i) \cdot (2 - \sqrt{3}i) = -2\sqrt{3} + 3i - 6i + 3\sqrt{3}i^2$
 $= -2\sqrt{3} - 3i - 3\sqrt{3} = -5\sqrt{3} - 3i$

Wir führen noch einige Bezeichnungen ein.

Definition 3.6. (Realteil und Imaginärteil, Betrag und konjugiert komplexe Zahl)

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Folgende Bezeichnungen sind üblich:

- $\operatorname{Re}(z) := a$ ist der **Realteil** von z ,
 $\operatorname{Im}(z) := b$ ist der **Imaginärteil** von z ,
 $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ ist der **Betrag** von z ,
 $\bar{z} := a - bi$ ist die **zu z konjugiert komplexe Zahl**.

Achtung: Der Imaginärteil von $z = a + bi$ ist $\operatorname{Im}(z) = b$ (und **nicht** bi).

Beispiel 3.7. (Real-, Imaginärteil, Betrag, konjugiert komplexe Zahl)

Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = 2 - 3i = 2 + (-3)i.$$

Dann sind der Realteil bzw. der Imaginärteil von z

$$\operatorname{Re}(z) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}(z) = -3,$$

und der Betrag und die zu z konjugiert komplexe Zahl sind

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \quad \text{bzw.} \quad \bar{z} = 2 - (-3)i = 2 + 3i.$$

Die zu \bar{z} konjugiert komplexe Zahl ist

$$\overline{\bar{z}} = 2 - 3i = z.$$

Die komplexen Zahlen haben eine **geometrische Anschauung**.

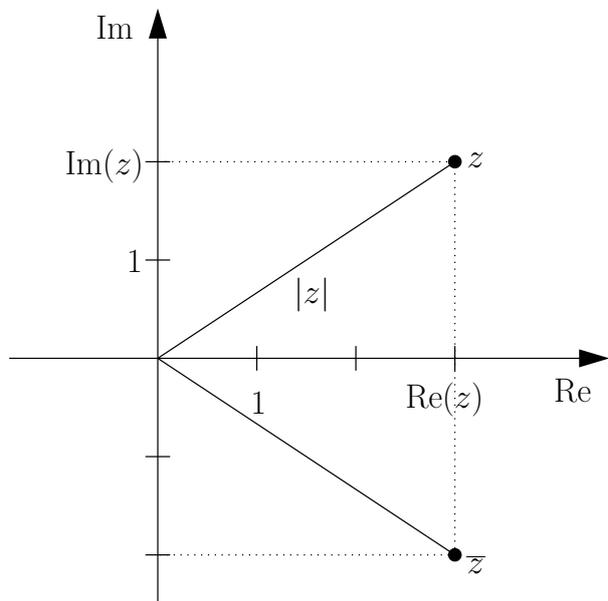
Bemerkung 3.8. (Gaußsche Zahlenebene)

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) ist durch das geordnete Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Daher ist es sinnvoll, sich $z = a + bi$ als Punkt (a, b) in einem kartesischen Koordinatensystem, die sogenannte **Gaußsche Zahlenebene**, vorzustellen.

Die x -Achse nennt man die **reelle Achse** (beschriftet mit Re), weil auf ihr die reellen Zahlen liegen. Die y -Achse heißt die **imaginäre Achse** (beschriftet mit Im).

Der Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist der **Abstand von** $z = a + bi$ (also von dem Punkt (a, b)) **zum Nullpunkt**.

Die zu $z = a + bi$ konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bi$ (also der Punkt $(a, -b)$) entsteht durch **Spiegelung von** $z = a + bi$ (also dem Punkt (a, b)) **an der reellen Achse**.



Bei der **Addition** zweier komplexer Zahlen $z = a+bi$ und $w = c+di$, also der Punkte (a, b) und (c, d) erhalten wir die komplexe Zahl $z+w = (a+c)+(b+d)i$, also den Punkt $(a+c, b+d)$.

Beispiel: Wir haben die komplexe Zahl $z = 3+2i$ und ihre konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = 3-2i$ in der Skizze rechts oben in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht.

Wir halten einige Rechenregeln für komplexe Zahlen fest.

Hilfssatz 3.9. (Rechenregeln für komplexe Zahlen)

Für $w, z \in \mathbb{C}$ gelten:

$$(1) \overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$$

$$(2) \overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}$$

$$(3) \overline{\bar{z}} = z$$

$$(4) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$(5) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

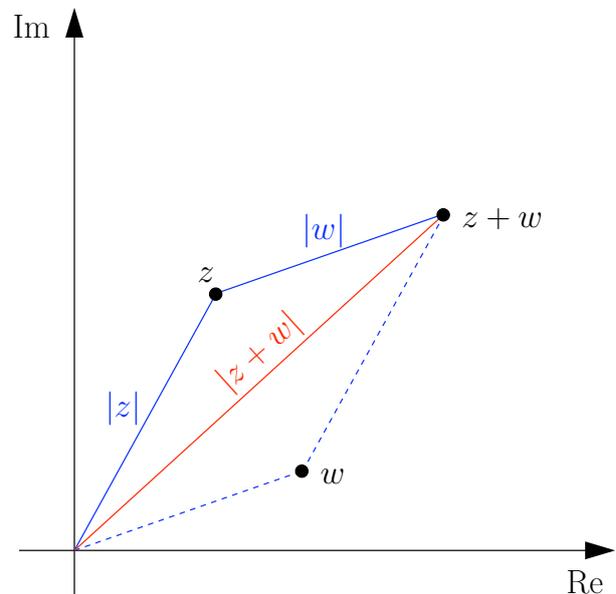
$$(6) |\bar{z}| = |z|$$

$$(7) z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$(8) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$(9) \text{Dreiecksungleichung: } |z+w| \leq |z| + |w|$$

$$(10) \text{Untere Dreiecksungleichung: } \left| |z| - |w| \right| \leq |z+w|$$



Die **Dreiecksungleichung** ist in der Abbildung neben Hilfssatz 3.9 illustriert: Es ist anschaulich klar, dass die Länge $|z+w|$ einer Seite des Dreiecks immer kleiner als die (oder gleich der) Summe der Längen $|z|$ und $|w|$ der beiden anderen Seiten sein muss.

Beweis von Hilfssatz 3.9: Die Rechenregeln in Hilfssatz 3.9 zeigt man durch direktes Nachrechnen, wobei die Beweise von (9) und (10) anspruchsvoll sind. \square

Da im Hilfssatz 3.9 die komplexen Zahlen z und w auch reell sein dürfen (da

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist), gelten alle Aussagen in Hilfssatz 3.9 auch für reelle Zahlen. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $x = x + 0i$ und somit $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$, d.h. der Betrag von $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist der aus der Schule bekannte (Absolut-)Betrag einer reellen Zahl. Also gelten insbesondere Eigenschaften (8), (9) und (10) in Hilfssatz 3.9 auch für den (Absolut-)Betrag reeller Zahlen.

Bemerkung 3.10. (Quotienten/Division komplexer Zahlen)

Aus Hilfssatz 3.9 (7) folgt für jedes $z \neq 0$ durch Erweitern mit \bar{z} :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (3.1)$$

Analog folgt für den Quotienten w/z zweier komplexer Zahlen w und z mit $z \neq 0$ durch Erweitern mit \bar{z} , dass

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{1}{|z|^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot w \cdot \bar{z} \quad (3.2)$$

gilt. Im rechten Ausdruck in (3.1) und (3.2) ist der Nenner nun reell, und wir können die Multiplikation der komplexen Zahlen im Zähler wie üblich mit Definition 3.4 (2) ausführen und erhalten eine Zahl in der „üblichen“ Darstellung $a + bi$ einer komplexen Zahl.

Wir sehen also: Um den Quotienten w/z zweier komplexer Zahlen w und z mit $z \neq 0$ in die übliche Form $a + bi$ zu bringen, erweitern wir mit der zum Nenner z konjugiert komplexen Zahl \bar{z} .

Betrachten wir noch zwei Beispiele für die Division komplexer Zahlen.

Beispiel 3.11. (Division komplexer Zahlen)

(a) Um $\frac{1}{i}$ zu berechnen erweitern wir mit $\bar{i} = -i$, also $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

(b) Um den Quotienten

$$\frac{4 + 5i}{3 - 2i}$$

zu berechnen, erweitern wir mit $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$ und erhalten

$$\frac{4 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(4 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{12 + 15i + 8i + 10i^2}{3^2 + (-2)^2}$$

$$= \frac{12 + 23i - 10}{13} = \frac{2 + 23i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{23}{13}i.$$

Bemerkung 3.12. (Erweiterung des Zahlkörpers)

Wir bemerken, dass die Einführung der komplexen Zahlen zur Erweiterung des Zahlkörpers der reellen Zahlen eigentlich nicht so geheimnisvoll ist, denn wir haben solch eine Vorgehensweise bereits früher in der Schule kennengelernt:

- (1) Da $x + 1 = 0$ in \mathbb{N}_0 keine Lösung hatte, wurden die negativen Zahlen (und damit die ganzen Zahlen \mathbb{Z}) eingeführt.
- (2) Da die Gleichung $2x = 1$ keine Lösung in den ganzen Zahlen \mathbb{Z} hat, wurden die Brüche (also die rationalen Zahlen \mathbb{Q}) eingeführt.
- (3) Da $x^2 = 2$ keine Lösung in den rationalen Zahlen \mathbb{Q} hat; wurden die irrationalen und damit die reellen Zahlen \mathbb{R} eingeführt.

Wir sehen also, dass die Einführung der komplexen Zahlen nichts „Obskures“ sondern nur eine Weiterentwicklung unserer üblichen Vorgehensweise ist.

Achtung: Die komplexen Zahlen sind **nicht angeordnet**, d.h. es gibt (im Gegensatz zu den reellen Zahlen) keine Relation „ $<$ “ auf \mathbb{C} .

3.2 Das Lösen quadratischer Gleichungen

Wir kommen nun auf quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ zurück und werden zeigen, dass jede solche Gleichung mit Vielfachheit gezählt in \mathbb{C} genau zwei nicht notwendigerweise verschiedene komplexe Lösungen hat.

Betrachten wir also eine beliebige quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.3}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ ist. Wir dürfen auf beiden Seiten durch $a \neq 0$ teilen und erhalten somit

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{=: p} x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=: q} = 0 \iff x^2 + px + q = 0 \tag{3.4}$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$. Es reicht also aus, Gleichungen der Form (3.4) zu betrachten.

Mittels der quadratischen Ergänzung und der ersten binomischen Formel erhält man

$$\begin{aligned}
 0 &= x^2 + px + q \\
 &= \left(x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q \\
 &= \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \underbrace{\left(\frac{p^2}{4} - q \right)}_{=: D} = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - D. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

- **Fall $D = 0$:** Ist $D = 0$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$0 = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{p}{2},$$

und diese **einzige reelle** Lösung hat die **Vielfachheit 2**, weil der Faktor $x + \frac{p}{2}$ mit der Potenz 2 auftritt. Mit Vielfachheit gezählt haben wir also zwei reelle Lösungen.

- **Fall $D > 0$:** Für den Fall, dass $D = \frac{p^2}{4} - q > 0$ gilt, erhält man mit der dritten binomischen Formel aus (3.5) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{D} \right) \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{D} \right) \\
 &= \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right),
 \end{aligned}$$

deren **zwei reelle** Lösungen die aus der Schule bekannte **p-q-Formel** sind:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

- **Fall $D < 0$:** Mit den komplexen Zahlen können wir nun auch den Fall

$$D = \frac{p^2}{4} - q < 0$$

behandeln. Dazu schreiben wir

$$D = \frac{p^2}{4} - q = - \left(q - \frac{p^2}{4} \right) = i^2 \underbrace{\left(q - \frac{p^2}{4} \right)}_{=: -D > 0},$$

und erhalten mit der dritten binomischen Formel aus (3.5)

$$0 = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - i^2 \left(q - \frac{p^2}{4} \right)$$

$$= \left(x + \frac{p}{2} + i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right) \left(x + \frac{p}{2} - i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right).$$

Für $D < 0$ erhalten wir also die beiden komplexen, nicht-reellen Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} - i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Wir beobachten, dass jede der beiden Lösungen jeweils die zur anderen Lösung konjugiert komplexe Zahl ist.

Natürlich muss man die Formeln für die Lösungen in den drei Fällen nicht auswendig lernen! Statt dessen sollte man sich die Vorgehensweise mit quadratischer Ergänzung, Anwendung der binomischen Formeln, für $D < 0$ das Umschreiben von $D = i^2 \cdot (-D)$ und zuletzt die Anwendung der dritten binomischen Formel merken. – Wir halten unsere Ergebnisse in einem Satz fest.

Satz 3.13. (Lösungen quadratischer Gleichungen)

Jede quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$, hat in \mathbb{C} genau zwei nicht notwendigerweise verschiedene Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, d.h. es gilt

$$0 = ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2).$$

Dabei können **nur** die folgenden drei Fälle auftreten:

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$ (zwei verschiedene reelle Lösungen)
- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = x_2$ (eine reelle Lösung mit Vielfachheit 2)
- $x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\overline{x_2} = x_1$ (zwei verschiedene komplexe, nicht reelle Lösungen, die konjugiert komplex zueinander sind)

Betrachten wir dazu einige Beispiele.

Beispiel 3.14. (quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten)

(a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Wir formen die quadratische Gleichung $x^2 + 3x + 2 = 0$ wie folgt mittels quadratischer Ergänzung und der binomischen Formeln um:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 3x + 2 = \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} \right) - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = (x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

Also finden wir zwei verschiedene reelle Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$.

(b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

Wir formen die quadratische Gleichung $x^2 - 8x + 16 = 0$ mittels der zweiten binomischen Formel um:

$$0 = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2.$$

Wir erhalten also die einzige reelle Lösung $x = 4$ mit der Vielfachheit 2.

(c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

Wir formen die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 13 = 0$ wie folgt mittels quadratischer Ergänzung und der binomischen Formeln um:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + 13 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 13 \\ &= (x - 2)^2 + 9 = (x - 2)^2 - (3i)^2 \\ &= (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i). \end{aligned}$$

Nun lesen wir ab, dass die quadratische Gleichung die folgenden beiden nicht-reellen, zueinander konjugiert komplexen Lösungen hat:

$$x_1 = 2 + 3i \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - 3i.$$

3.3 Polardarstellung komplexer Zahlen

Wir leiten nun die Polardarstellung von komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene her:

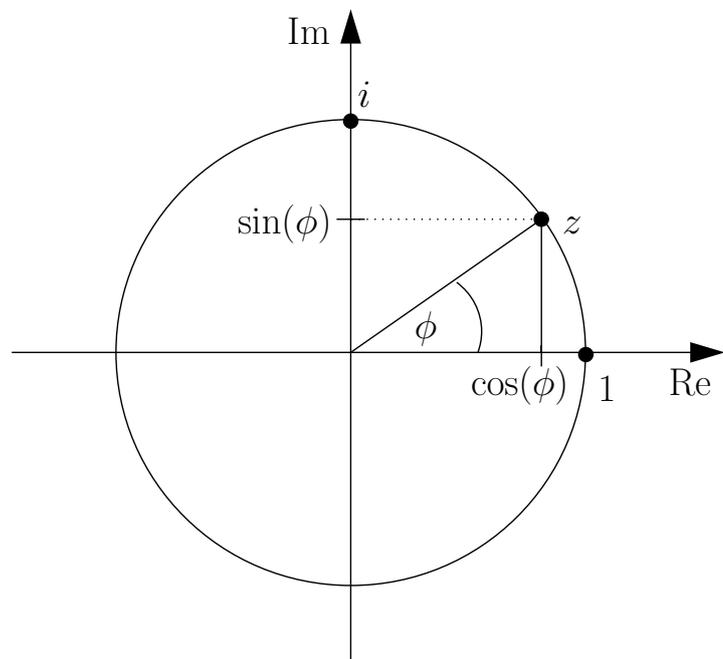
Sei zunächst $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, d.h. z liegt auf der **Einheitskreislinie**

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Dann gilt (siehe Skizze)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \cos(\phi) \\ \operatorname{Im}(z) &= \sin(\phi) \end{aligned} \right\}$$

$$\implies z = \cos(\phi) + \sin(\phi) i.$$



Dabei ist ϕ der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der Strecke vom Ursprung nach z . Man misst ϕ gegen den Uhrzeigersinn. Der Winkel ϕ wird im Bogenmaß angegeben und heißt das **Argument** von z , also $\phi = \arg(z)$. Das Argument $\arg(z)$ von z ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, und man gibt es üblicherweise als Winkel aus $[0, 2\pi[$ an.

Nun betrachten wir beliebige komplexe Zahlen $z \neq 0$, d.h. es sei $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit Betrag $|z| = r$. Ist ϕ der Winkel in Bogenmaß zwischen der positiven reellen Achse und der Strecke vom Ursprung nach z , so finden wir analog

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} &= \cos(\phi), & \frac{\operatorname{Im}(z)}{r} &= \sin(\phi) \\ \iff \operatorname{Re}(z) &= r \cos(\phi), & \operatorname{Im}(z) &= r \sin(\phi) \\ \iff z &= r \cos(\phi) + r \sin(\phi) i = r [\cos(\phi) + \sin(\phi) i]. \end{aligned}$$

Dieses ist die **Polardarstellung** von $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Es ist üblich, das Argument $\phi = \arg(z)$ durch einen Winkel im Intervall $[0, 2\pi[$ anzugeben.

Methode 3.15. (Umrechnung zw. Normal- und Polardarstellung)

*Machen wir uns klar, wie die **Umrechnung** zwischen der **Normaldarstellung** komplexer Zahlen $z = a + bi$ und der **Polardarstellung** funktioniert:*

(1) *Liegt z in Polardarstellung*

$$z = r [\cos(\phi) + \sin(\phi) i]$$

vor, so ist die Normaldarstellung gegeben durch

$$z = a + bi \quad \text{mit} \quad a = r \cos(\phi), \quad b = r \sin(\phi).$$

(2) *Liegt z in der Normaldarstellung $z = a + bi$ vor, so wissen wir direkt*

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Weiter wissen wir wegen $a = r \cos(\phi)$ und $b = r \sin(\phi)$, dass gilt

$$\cos(\phi) = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad \sin(\phi) = \frac{b}{r}.$$

*Anhand der Vorzeichen von $a = \operatorname{Re}(z)$ und $b = \operatorname{Im}(z)$ bestimmt man mit der unten stehenden Tabelle, in welchem **Quadranten** die komplexe Zahl z liegt.*

- Ist $\operatorname{Re}(z) = 0$ bzw. $\operatorname{Im}(z) = 0$ so wissen wir bereits, dass das Argument $\pi/2$ oder $3\pi/2$ bzw. 0 oder π ist. In diesem Fall können wir direkt am Vorzeichen von $\operatorname{Im}(z)$ bzw. $\operatorname{Re}(z)$ ablesen, was das korrekte Argument $\phi = \arg(z)$ ist.
- Sind $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$ beide ungleich null, so lässt sich die komplexe Zahl z eindeutig einem Quadranten zuordnen. Wir suchen dann das Argument $\phi = \arg(z)$ so in dem zu dem Quadranten gehörenden Intervall für die Winkel, dass

$$\cos(\phi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} \quad \text{und} \quad \sin(\phi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{r}$$

erfüllt sind.

Quadrant	Bedingungen an $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$	zugehörige Winkel
1. Quadrant	$\operatorname{Re}(z) \geq 0$ und $\operatorname{Im}(z) \geq 0$	$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ($0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$)
2. Quadrant	$\operatorname{Re}(z) \leq 0$ und $\operatorname{Im}(z) \geq 0$	$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ ($90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$)
3. Quadrant	$\operatorname{Re}(z) \leq 0$ und $\operatorname{Im}(z) \leq 0$	$\pi \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$ ($180^\circ \leq \phi \leq 270^\circ$)
4. Quadrant	$\operatorname{Re}(z) \geq 0$ und $\operatorname{Im}(z) \leq 0$	$\frac{3\pi}{2} \leq \phi \leq 2\pi$ ($270^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$)

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 3.16. (Polardarstellung)

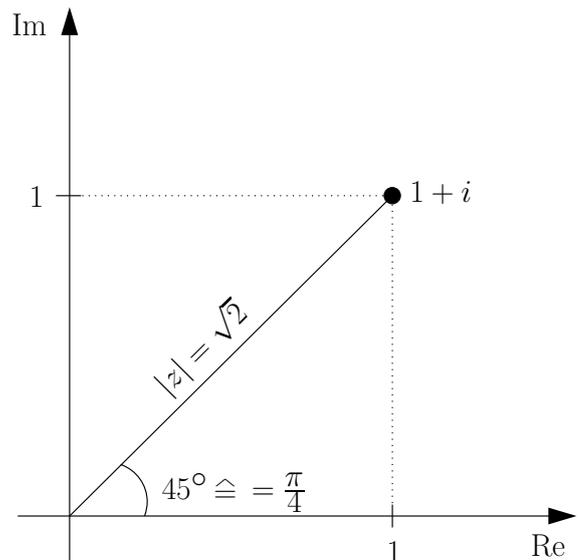
- (a) Für die komplexe Zahl $z = 1 + i$ gilt

$$z = 1+i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i \right]$$

denn: $r = |1+i| = \sqrt{2}$, und ϕ lässt sich aus der nebenstehenden Zeichnung ablesen oder mit Hilfe der folgenden Überlegungen berechnen: An

$$\cos(\phi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(\phi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



können wir ablesen, dass z im 1. Quadranten liegt und dass genauer $\phi = \arg(z) = \pi/4$ ist.

(b) Für die komplexe Zahl $z = -1 + \sqrt{3}i$ finden wir

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Wir haben hier $\operatorname{Re}(z) = -1 < 0$ und $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{3} > 0$, d.h. $z = -1 + \sqrt{3}i$ liegt im 2. Quadranten. Damit bekommen wir $\pi/2 < \phi < \pi$. Weiter gilt

$$\cos(\phi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\phi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir wissen, dass (wegen $\frac{\pi}{3} \cong 60^\circ$ und $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \cong 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$), also

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{und daher} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit dem Winkel/Argument $\phi = \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ liegen wir im 2. Quadranten. Also folgt die Polardarstellung:

$$z = 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) i \right].$$

Mit der Polardarstellung kann man die Multiplikation und Division komplexer Zahlen sehr viel einfacher durchführen als mit der kartesischen Darstellung.

Satz 3.17. (Rechnen mit der Polardarstellung)

Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit den Polardarstellungen

$$z = r [\cos(\phi) + \sin(\phi) i] \quad \text{bzw.} \quad w = s [\cos(\psi) + \sin(\psi) i].$$

Dann gelten:

$$(1) \quad \bar{z} = r [\cos(\phi) - \sin(\phi) i] = r [\cos(-\phi) + \sin(-\phi) i]$$

$$(2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(\phi) - \sin(\phi) i] = \frac{1}{r} [\cos(-\phi) + \sin(-\phi) i]$$

$$(3) \quad z \cdot w = (r \cdot s) \cdot [\cos(\phi + \psi) + \sin(\phi + \psi) i]$$

$$(4) \quad z^k = r^k [\cos(k\phi) + \sin(k\phi) i] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s} [\cos(\phi - \psi) + \sin(\phi - \psi) i]$$

Anschauliche Bedeutung von Satz 3.17 (3): Multiplikation in \mathbb{C} kann man sich so vorstellen: Will man $z \cdot w$ berechnen, so nimmt man den Punkt z , streckt ihn um $s = |w|$ am Ursprung und dreht den entstandenen Punkt dann um $\psi = \arg(w)$ gegen den Uhrzeigersinn.

Anschauliche Bedeutung von Satz 3.17 (5): Division z/w fasst man als Multiplikation

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot \frac{\bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = (z \cdot \bar{w}) \cdot \frac{1}{|w|^2}$$

auf und erhält damit eine analoge Interpretation. Eine Drehung um $-\psi$ gegen der Uhrzeigersinn ist dabei eine Drehung um Ψ im Uhrzeigersinn.

Beweis von Satz 3.17:

(1) Dieses folgt direkt, wenn man nutzt, dass Cosinus eine gerade Funktion und Sinus eine ungerade Funktion ist.

(2) Wir erweitern mit \bar{z} und nutzen, dass Cosinus eine gerade Funktion und Sinus eine ungerade Funktion ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{r^2} \cdot r [\cos(\phi) - \sin(\phi) i] \\ &= \frac{1}{r} [\cos(\phi) - \sin(\phi) i] = \frac{1}{r} [\cos(-\phi) + \sin(-\phi) i]. \end{aligned}$$

(3) Nachrechnen unter Ausnutzung der Additionstheoreme für Sinus und Cosi-

nus (vgl. Seite 46) liefert:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r [\cos(\phi) + \sin(\phi) i] \cdot s [\cos(\psi) + \sin(\psi) i] \\ &= r s \left[\underbrace{\cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi)}_{=\cos(\phi+\psi)} + \underbrace{\sin(\phi) \cos(\psi) i + \cos(\phi) \sin(\psi) i}_{=\sin(\phi+\psi) i} \right] \\ &= r s [\cos(\phi + \psi) + \sin(\phi + \psi) i]. \end{aligned}$$

(4) Durch wiederholte Anwendung von (3) findet man für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z = (r \cdot r) \cdot [\cos(\phi + \phi) + \sin(\phi + \phi) i] \\ &= r^2 [\cos(2\phi) + \sin(2\phi) i], \\ z^3 &= z \cdot z^2 = (r \cdot r^2) \cdot [\cos(\phi + 2\phi) + \sin(\phi + 2\phi) i] \\ &= r^3 [\cos(3\phi) + \sin(3\phi) i], \\ &\vdots \\ z^k &= z \cdot z^{k-1} = (r \cdot r^{k-1}) \cdot [\cos(\phi + (k-1)\phi) + \sin(\phi + (k-1)\phi) i] \\ &= r^k [\cos(k\phi) + \sin(k\phi) i]. \end{aligned}$$

Für $k = 0$ gilt per Definition $z^0 = 1$ und $1 = r^0 = r^0 [\cos(0) + \sin(0) i]$.

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ ist $k = -\ell$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}$. Mit (2) und dem bereits bewiesenen Fall (4) für positives k folgt dann

$$\begin{aligned} z^k &= z^{-\ell} = (z^{-1})^\ell = \left(\frac{1}{z} \right)^\ell = \left(\frac{1}{r} [\cos(-\phi) + \sin(-\phi) i] \right)^\ell \\ &= \frac{1}{r^\ell} [\cos(-\phi) + \sin(-\phi) i]^\ell = r^{-\ell} [\cos(-\ell\phi) + \sin(-\ell\phi) i] \\ &= r^k [\cos(k\phi) + \sin(k\phi) i]. \end{aligned}$$

(5) Mit (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= z \cdot \frac{1}{w} = r [\cos(\phi) + \sin(\phi) i] \cdot \frac{1}{s} [\cos(-\psi) + \sin(-\psi) i] \\ &= \frac{r}{s} [\cos(\phi - \psi) + \sin(\phi - \psi) i]. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Notation 3.18. (Polardarstellung mit Euler-Formel)

Definiert man für $\phi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\phi} := \cos(\phi) + \sin(\phi) i, \quad (\text{Euler-Formel})$$

so erhält man die Polardarstellung

$$z = r e^{i\phi} \quad \text{mit} \quad r = |z|, \quad \phi = \arg(z).$$

Mit $z = r e^{i\phi}$ und $w = s e^{i\psi}$ aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lautet Satz 3.17 dann:

- (1) $\bar{z} = r e^{-i\phi}$
- (2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\phi}} = \frac{1}{r} e^{-i\phi}$
- (3) $z \cdot w = (r e^{i\phi}) \cdot (s e^{i\psi}) = (r s) e^{i(\phi+\psi)}$
- (4) $z^k = (r e^{i\phi})^k = r^k e^{ik\phi}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
- (5) $\frac{z}{w} = \frac{r e^{i\phi}}{s e^{i\psi}} = \frac{r}{s} e^{i(\phi-\psi)}$

Wir können nun mit $e^{i\phi}$ mit den üblichen Rechengesetzen für die Exponentialfunktion rechnen. Die Aussagen von Satz 3.17 sind damit ganz natürlich.

Betrachten wir ein Beispiel für das Rechnen mit der Euler-Formel.

Beispiel 3.19. (Rechnen mit der Polardarstellung mit Euler-Formel)

Seien $z = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$, $w = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}, & \bar{w} &= \sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{6}}, \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}, & \frac{1}{w} &= \frac{1}{\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{5\pi}{6}}, \\ z \cdot w &= 2 e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{6}}, \\ \frac{z}{w} &= \frac{2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{6}} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{2} i, \\ z^3 &= (2 e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{3} \cdot 3} = 8 e^{i\pi} = 8 \cdot (-1) = -8. \end{aligned}$$

3.4 Komplexe Nullstellen von Polynomen*

In Teilkapitel 3.2 haben wir bereits gesehen, dass jede quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

mit Vielfachheit gezählt genau zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Lösungen in \mathbb{C} hat. Eine analoge Aussage gilt für polynomiale Gleichungen beliebigen Grades.

Satz 3.20. (Fundamentalsatz der Algebra)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $c_n \neq 0$. Wir betrachten das **komplexe Polynom**

$$p(x) = c_n x^n + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = \sum_{k=0}^n c_k x^k.$$

Die Gleichung $p(x) = 0$ hat dann immer **mindestens eine** Lösung in \mathbb{C} .

Durch wiederholte Anwendung dieser Aussage, lässt sich das Polynom somit **faktorisieren** als

$$p(x) = c_n (x - z_1)(x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_n),$$

wobei z_1, z_2, \dots, z_n die n (nicht notwendigerweise verschiedenen) Lösungen von $p(x) = 0$ in \mathbb{C} sind.

Insbesondere gilt Satz 3.20 natürlich auch für reelle Polynomfunktionen, also wenn $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sind.

Im Folgenden betrachten wir nur einen **Sonderfall polynomialer Gleichungen n -ter Ordnung**: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir suchen **alle** komplexen Lösungen der Gleichung

$$x^n = 1.$$

Ist z eine Lösung von $x^n = 1$, so gilt für $|z|$:

$$|z|^n = |z^n| = |1| = 1, \quad \text{also} \quad |z| = 1.$$

Deshalb hat z die Polardarstellung $z = e^{i\phi}$ mit einem geeigneten Argument ϕ . Wir setzen diese in die Gleichung $x^n = 1$ ein:

$$z^n = 1 \quad \iff \quad (e^{i\phi})^n = 1$$

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

$$\begin{aligned}
&\iff e^{in\phi} = 1 \\
&\iff e^{in\phi} = e^{i2k\pi} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\
&\iff n\phi = 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \phi = \frac{2k}{n}\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Für $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ erhalten wir in (3.6) Winkel im Intervall $[0, 2\pi[$. Für alle anderen $k \in \mathbb{Z}$, also für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, erhalten wir Winkel der Form

$$\phi = \frac{2\ell}{n}\pi + m2\pi \quad \text{mit } \ell \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ und } m \in \mathbb{Z}.$$

Für solche Winkel gilt aber

$$e^{i\left(\frac{2\ell}{n}\pi + m2\pi\right)} = e^{i\frac{2\ell}{n}\pi} \cdot \underbrace{e^{im2\pi}}_{=1} = e^{i\frac{2\ell}{n}\pi},$$

d.h. für die Winkel

$$\phi = \frac{2k}{n}\pi \quad \text{mit } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

erhalten wir bereits alle verschiedenen Lösungen $z = e^{i\phi}$ der Gleichung $x^n = 1$.

Also hat $x^n = 1$ genau die n verschiedenen (komplexen) Lösungen

$$1, \quad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad \dots, \quad e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}, \tag{3.7}$$

genannt die **n -ten Einheitswurzeln**.

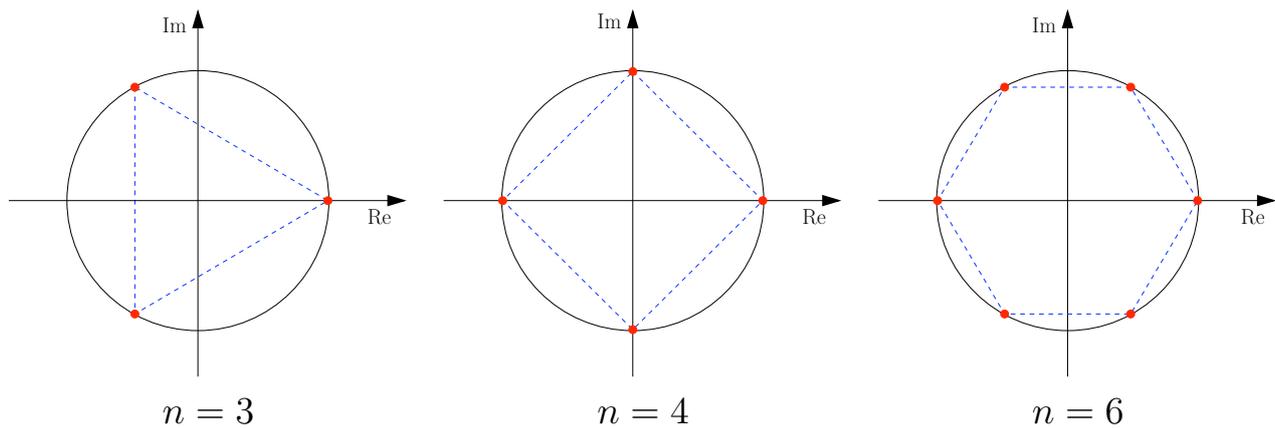
Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 3.21. (3-te Einheitswurzeln)

Wir berechnen die dritten Einheitswurzeln: Mit (3.7) finden wir (mit $n = 3$)

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{0\pi}{3}} &= e^0 = 1, \\
e^{i\frac{2\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\
e^{i\frac{4\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,
\end{aligned}$$

wobei wir $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ benutzt haben.

Abb. 3.1: n -te Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene.

In Abbildung 3.1 sind die n -ten Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene für $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$ dargestellt. Wir sehen, dass die n -ten Einheitswurzeln die **Ecken eines gleichseitigen n -Ecks** sind, welches so positioniert und skaliert wurde, dass seine Ecken alle auf dem Einheitskreis liegen und dass eine Ecke der Punkt $(1, 0)$, also die Zahl $z = 1$, ist.

Mit den n -ten Einheitswurzeln und der Polardarstellung können wir nun jede Gleichung der Form $x^n = w$ mit $w \in \mathbb{C}$ in den komplexen Zahlen lösen und erhalten n (komplexe) Lösungen. Wir bezeichnen die Lösungen von $x^n = w$ auch als **n -te Wurzeln von w** . Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel 3.22. (n -te Wurzeln einer komplexen Zahl)

Wir wollen alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$x^3 = 8i$$

bestimmen. Ist z Lösung, so gilt für $|z|$:

$$|z|^3 = |z^3| = |8i| = 8 \quad \implies \quad |z| = 2.$$

Also hat z die Polardarstellung $z = 2e^{i\phi}$ mit geeignetem ϕ . Einsetzen in $x^3 = 8i$ und Ausnutzen von $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ liefert:

$$\begin{aligned} z^3 = 8i &\iff (2e^{i\phi})^3 = 8i \\ &\iff 8e^{i3\phi} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff e^{i3\phi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff e^{i3\phi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{e^{i2k\pi}}_{=1} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff e^{i3\phi} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\iff 3\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \phi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Also ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5}{6}\pi}, 2e^{i\frac{3}{2}\pi} \right\} = \left\{ \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i \right\}.$$

Teil II

Analysis

Folgen in \mathbb{R}

In diesem Kapitel lernen wir Folgen in \mathbb{R} kennen und untersuchen deren Eigenschaften, insbesondere deren Konvergenz bzw. Divergenz. Genauer ist dieses Kapitel wie folgt aufgebaut:

In Teilkapitel 4.1 führen wir den Begriff einer Folge in \mathbb{R} ein und lernen beschränkte, alternierende und monotone Folgen kennen. In Teilkapitel 4.2 führen wir den Begriff der Konvergenz einer Folge in \mathbb{R} gegen einen Grenzwert ein. Dieser ist einer der schwierigsten Begriffe der Analysis – lassen Sie sich also nicht entmutigen, falls Sie Konvergenz nicht direkt verstehen sollten! Wir lernen auch, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge in \mathbb{R} immer eindeutig bestimmt ist.

In Teilkapitel 4.3 betrachten wir konvergente Folgen in \mathbb{R} mit Grenzwert null, sogenannte Nullfolgen, und es werden verschiedene Resultate über konvergente Folgen im Kontext von Nullfolgen vorgestellt. Im Teilkapitel 4.4 lernen wir Rechenregeln für konvergente Folgen kennen. Mit diesen können wir die Grenzwerte komplizierter konvergenter Folgen auf die Grenzwerte einfacher konvergenter Folgen zurückführen. In Teilkapitel 4.5 werden verschiedene Resultate zur Konvergenz von Folgen in \mathbb{R} vorgestellt. In Teilkapitel 4.6 werden Folgen betrachtet, deren Folgenglieder in einem gewissen Sinn gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ streben.

4.1 Folgen in \mathbb{R} : Definition und Eigenschaften

Wir definieren zunächst Folgen in \mathbb{R} .

Definition 4.1. (Folge in \mathbb{R})

Eine Funktion $a : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Definitionsmenge $D := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ und der Zielmenge \mathbb{R} heißt eine **Folge in \mathbb{R}** (oder **Zahlenfolge in \mathbb{R}**).

Schreibweise: Statt $a(n)$ schreibt man üblicherweise a_n und bezeichnet a_n als das **Folglied** mit Index n . Die Folge bezeichnet man dann mit $(a_n)_{n \geq n_0}$ oder kurz (a_n) .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 4.2. (Folgen in \mathbb{R})

- (a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
- (b) $(2^n)_{n \geq 0}$: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$
- (c) $(1)_{n \geq 1}$: $1, 1, 1, 1, 1, \dots$
- (d) $((-1)^n)_{n \geq 0}$: $1, -1, 1, -1, 1, \dots$
- (e) $(n!)_{n \geq 0}$: $1, 1, 2, 6, 24, 120, \dots$
- (f) $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$: $0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^4, \left(\frac{4}{5}\right)^5, \dots$

Die Folgen aus (b) und (d) sind in Abbildung 4.1 veranschaulicht.

Definition 4.3. (gleiche Folgen in \mathbb{R})

Seien $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$. Zwei Folgen in \mathbb{R} , $(a_n)_{n \geq n_0}$ und $(b_n)_{n \geq m_0}$, sind gleich, wenn gilt: (i) $n_0 = m_0$ und (ii) $a_n = b_n$ für alle $n \geq n_0$.

Wir lernen nun verschiedene grundlegende Eigenschaften von Folgen in \mathbb{R} kennen.

Definition 4.4. (beschränkte Folge in \mathbb{R})

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} . $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Schranke $S \geq 0$ gibt, so dass gilt

$$|a_n| \leq S \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

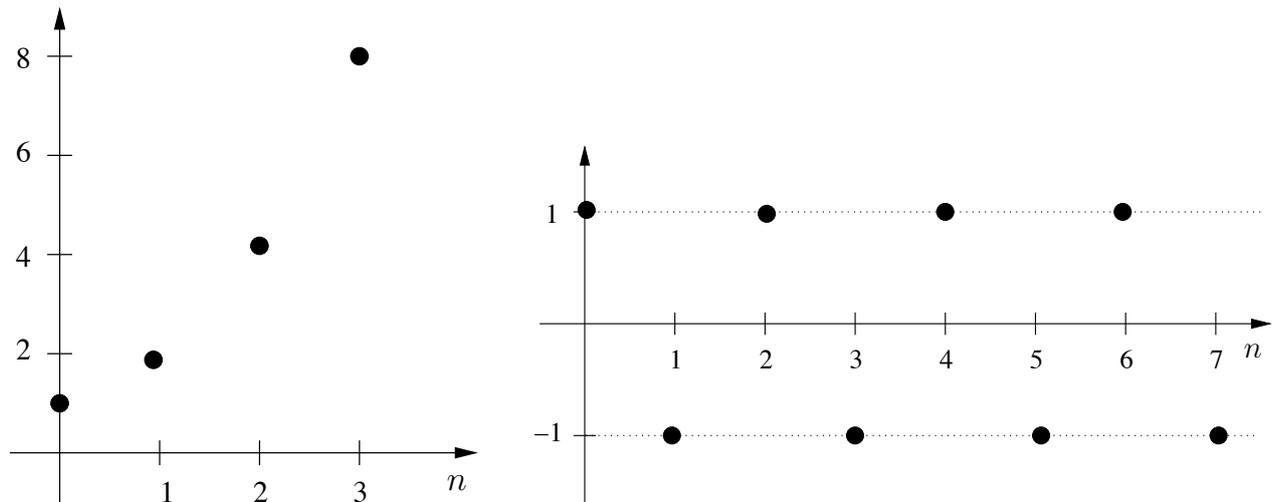


Abb. 4.1: Im linken Bild sind die ersten vier Folgenglieder der Folge $(2^n)_{n \geq 0}$ veranschaulicht. Im rechten Bild sind die ersten acht Folgenglieder der Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$ veranschaulicht.

Ist $(a_n)_{n \geq n_0}$ in \mathbb{R} nicht beschränkt, so heißt $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine **unbeschränkte Folge**.

Bemerkung: Es gilt: $|a_n| \leq S \iff -S \leq a_n \leq S$

Beispiel 4.5. (beschränkte Folgen in \mathbb{R})

(a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist beschränkt.

Begründung: Für alle $n \geq 1$ gilt $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$.

(b) $(2^n)_{n \geq 0}$ ist unbeschränkt.

Begründung: Da 2^n beliebig groß werden kann, wenn wir n hinreichend groß wählen, gibt es kein $S \geq 0$ mit $|2^n| \leq S$ für alle $n \geq 0$.

(c) $((-1)^n n!)_{n \geq 0}$ ist unbeschränkt.

Begründung: Da $n!$ beliebig groß werden kann, wenn wir n hinreichend groß wählen, gibt es kein $S \geq 0$ mit $|(-1)^n n!| = n! \leq S$ für alle $n \geq 0$.

Zuletzt lernen wir noch alternierende und monotone Folgen kennen.

Definition 4.6. (alternierende Folge und monotone Folge)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} .

- (1) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **alternierend**, wenn die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.
- (2) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **monoton wachsend**, wenn gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq n_0$.
- (3) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **monoton fallend**, wenn gilt: $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq n_0$.
- (4) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **streng monoton wachsend**, wenn gilt: $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq n_0$.
- (5) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **streng monoton fallend**, wenn gilt: $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \geq n_0$.
- (6) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **monoton** (bzw. **streng monoton**), wenn $(a_n)_{n \geq n_0}$ monoton wachsend oder monoton fallend (bzw. streng monoton wachsend oder streng monoton fallend) ist.

Beispiel 4.7. (alternierende und monotone Folgen)

(a) $((-1)^n)_{n \geq 0}$ ist alternierend.

(b) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 0}$ ist alternierend.

(c) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist streng monoton fallend, denn

$$\left(n < n + 1 \iff \frac{1}{n} > \frac{1}{n + 1} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(d) $(n)_{n \geq 0}$ ist streng monoton wachsend, denn

$$n < n + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

(e) $(2(1 + (-1)^n))_{n \geq 0}$ ist weder alternierend noch monoton fallend noch monoton wachsend, denn

$$2(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 4 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4.2 Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}

Wir führen nun die Begriffe einer konvergenten Folge und des Grenzwertes ein. Diese gehören zu den schwierigsten Begriffen der Analysis. Lassen Sie sich von dem abstrakten Konzept der Konvergenz gegen einen Grenzwert aber nicht abschrecken. Wenn Sie dieses verstanden haben, dann wird es einfach und intuitiv. – Das Konzept des Grenzwertes einer Zahlenfolge ist für die Analysis zentral, denn es ermöglicht uns, in den nachfolgenden Kapiteln Grenzwerte von reellen Funktionen, die Stetigkeit reeller Funktionen und schließlich die Begriffe der Ableitung und des Integrals einzuführen.

Wir betrachten zunächst ein paar **Beispiele** von sogenannten **konvergenten Folgen in \mathbb{R}** und **deren Grenzwerten** sowie von sogenannten **divergenten Folgen in \mathbb{R}** , um ein Gefühl für die Begriffe der **Konvergenz**, des **Grenzwertes** und der **Divergenz** zu bekommen. Unsere fünf Beispiel-Folgen sind:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} & \text{(b)} \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1} & \text{(c)} \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1} \\ \text{(d)} \quad (n)_{n \geq 1} & \text{(e)} \quad ((-1)^n)_{n \geq 0}. \end{array}$$

Wenn wir sagen, „**eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$** “, dann bedeutet dieses anschaulich, dass sich die **Werte a_n der Zahl a tendenziell immer weiter annähern (und irgendwann auch nicht wieder entfernen), wenn der Index $n \geq n_0$ immer größer wird**. Betrachten wir zunächst die ersten drei Beispiele:

- (a) Für die Folge $(1/n)_{n \geq 1}$ nähern sich die Folgenglieder $a_n = 1/n$ immer dichter der Zahl $a = 0$ an, wenn n größer wird. Dabei kommen wir der Zahl $a = 0$ beliebig nahe, indem wir n groß genug wählen: Z.B. gilt für die Entfernung $\varepsilon := 1/10^6 = 10^{-6}$, dass

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \leq 10^{-6} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon := 10^6. \quad (4.1)$$

Also vermuten wir, dass die Folge $(1/n)_{n \geq 1}$ konvergent ist mit dem Grenzwert $a = 0$.

Wichtig ist bei der Idee der Konvergenz aber nicht nur, dass wir für jede Entfernung $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden können, so dass a_{n_ε} höchstens die Entfernung ε zu a hat, sondern dass auch **alle nachfolgenden Folgenglieder a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ höchstens die Entfernung ε zu a haben**. In diesem Beispiel ist das für $\varepsilon = 10^{-6}$ erfüllt, denn (4.1) gilt für alle $n \geq n_\varepsilon = 10^6$.

In (4.1) haben wir eine feste Entfernung $\varepsilon = 10^{-6}$ betrachtet. Eine zu (4.1) analoge Bedingung muss **für jedes** $\varepsilon > 0$ gelten. Natürlich muss man dann gegebenenfalls auch ein neues zu ε passendes n_ε finden.

- (b) Für die Folge $(n/(n+1))_{n \geq 1}$ sehen wir, dass für großes $n \geq 1$ der Zähler n und der Nenner $n+1$ der Folgenglieder $b_n = n/(n+1)$ sich relativ zur Größe von n nur wenig unterscheiden. Wir haben also für großes n

$$b_n = \frac{n}{n+1} \approx 1,$$

und je größer n wird, desto dichter liegt der Wert von $b_n = \frac{n}{n+1}$ bei der Zahl 1. Also vermuten wir, dass die Folge $(n/(n+1))_{n \geq 1}$ konvergent ist mit dem Grenzwert $b = 1$.

Man kann sich dieses mit Hilfe des vorigen Beispiels auch noch anders klar machen: Schreiben wir

$$b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1) - 1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad (4.2)$$

so können wir mit den Überlegungen für $(1/n)_{n \geq 1}$ vermuten, dass die Folge $(1/(n+1))_{n \geq 1}$ gegen den Grenzwert $b = 0$ konvergiert. Daher sollte wegen der Darstellung der Folgenglieder (4.2) die Folge $(n/(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $b = 1 - a = 1 - 0 = 1$ konvergieren.

- (c) Bei der Folge $((-1)^n/n)_{n \geq 0}$ handelt es sich um eine Folge, die abwechselnd positive und negative Werte annimmt, aber auch hier nähern sich die Folgenglieder $c_n = (-1)^n/n$ der Zahl null immer weiter an. Wir vermuten also, dass auch hier der Grenzwert $c = 0$ ist. Analog zur Folge $(1/n)_{n \geq 1}$ finden wir für z.B. $\varepsilon := 1/10^6 = 10^{-6}$, dass gilt

$$|c_n - c| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \leq 10^{-6} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon := 10^6.$$

An diesem Beispiel sehen wir, dass es **nicht** erforderlich ist, dass sich die Folgenglieder dem Grenzwert „von einer Seite“ her nähern: Die Folgenglieder

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

sind abwechselnd kleiner bzw. größer als der Grenzwert $c = 0$.

Wir halten noch einmal fest, was wir aus diesen drei Beispielen über konvergente Folgen gelernt haben.

Bemerkung 4.8. (Anschauung der Konvergenz von Folgen in \mathbb{R})

- (1) Die Folgenglieder a_n einer konvergenten Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ nähern sich dem Grenzwert a immer weiter an, wenn $n \geq n_0$ wächst. Dabei muss die Annäherung **nicht** „monoton“ sein, d.h. die Folgenglieder können sich von beiden Seiten dem Grenzwert nähern, und sie dürfen sich sogar „zwischendurch“ wieder von a weiter entfernen, solange (2) erfüllt ist.
- (2) Wichtig ist aber, dass **für jede beliebige fest vorgegebene Entfernung $\varepsilon > 0$, alle Folgenglieder a_n ab einem gewissen Index n_ε nicht weiter als diese Entfernung ε vom Grenzwert a entfernt sind**, also dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ gilt. Dabei hängt die Wahl von n_ε natürlich von der Entfernung ε ab.

Betrachten wir nun die beiden letzten Beispiele von Folgen.

- (d) Die Folgenglieder $a_n = n$ der Folge $(n)_{n \geq 1}$ werden beliebig groß, wenn $n \geq 1$ wächst. Insbesondere können wir keine reelle Zahl a finden, an die sich die Folgenglieder immer weiter annähern. Daher vermuten wir, dass die Folge $(n)_{n \geq 1}$ **keinen Grenzwert hat und damit divergent ist**. (Man sagt „eine Folge ist divergent“ bzw. „eine Folge divergiert“, wenn sie nicht gegen einen Grenzwert konvergiert.)
- (e) Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$ ist ein anderer Fall als $(n)_{n \in \mathbb{N}}$. Hier gilt

$$b_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ +1 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Folgenglieder sind also abwechselnd -1 und $+1$. Wir könnten nun vermuten, dass $b = 1$ und $\tilde{b} = -1$ beides Grenzwerte der Folge sind. Dies ist aber nicht der Fall, denn eine konvergente Folge hat **nur einen Grenzwert**, und dieser ist **eindeutig bestimmt**.

Dass die beiden Zahlen $b = 1$ und $\tilde{b} = -1$ keine Grenzwerte der Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$ sind, kann man sich bereits mit unserem bisherigen intuitiven Verständnis der Konvergenz wie folgt klar machen: Betrachten wir z.B. $b = 1$. Wäre $b = 1$ ein Grenzwert der Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$, dann sollte es für $\varepsilon = 1/10$ ein n_ε geben, so dass alle x_n mit $n \geq n_\varepsilon$ höchstens den Abstand $\varepsilon = 1/10$ von $b = 1$ haben. Dies ist aber für alle b_n mit Wert -1 , also alle x_n mit ungeraden $n \geq 0$, nicht erfüllt, denn für diese gilt

$$|b_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > \frac{1}{10} = \varepsilon.$$

Analog kommt $\tilde{b} = -1$ (und auch jede andere reelle Zahl) als Grenzwert nicht in Frage. Wir sehen also, dass die Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$ keinen Grenzwert 1 oder -1 haben kann und vermutlich **divergent** ist.

Nun definieren wir den Grenzwert und die Begriffe „konvergent“ und „divergent“. Diese abstrakte Definition beschreibt lediglich mathematisch, was wir bereits an unseren Beispielen gesehen haben.

Definition 4.9. (konvergente Folge in \mathbb{R} und Grenzwert)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} .

- (1) $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $n_\varepsilon \geq n_0$ so, dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| \leq \varepsilon$. (Beachten Sie, dass die Wahl für n_ε von ε abhängt.)
- (2) Konvergiert $(a_n)_{n \geq n_0}$ gegen a (d.h. wenn $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergent ist gegen a), so schreibt man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und nennt a den **Grenzwert** oder **Limes** von $(a_n)_{n \geq n_0}$.

- (3) Konvergiert $(a_n)_{n \geq n_0}$ **nicht** (d.h. wenn $(a_n)_{n \geq n_0}$ nicht konvergent ist), so heißt $(a_n)_{n \geq n_0}$ **divergent**. (Man sagt dann, dass $(a_n)_{n \geq n_0}$ **divergiert**.)

Die **Anschauung hinter der abstrakten Definition des Grenzwertes** liefert die Beobachtung, dass die Bedingung

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \tag{4.3}$$

äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \quad \Bigg| + a \\ \iff & a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Aussage (4.4) bedeutet aber, dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ in dem Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ liegen müssen (siehe auch Abbildung 4.2). Da (4.3) und (4.4) für jedes $\varepsilon > 0$ gelten müssen, können wir $\varepsilon > 0$ immer kleiner machen, und zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ finden wir ein n_ε , so dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ im Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ liegen. Indem wir $\varepsilon > 0$ immer kleiner machen schrumpft das Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ irgendwann auf den einen Punkt a zusammen. Dieser Punkt a ist der Grenzwert der konvergenten Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$.

Achtung: Die Limes-Schreibweise darf **nur** verwendet werden, wenn eine Folge

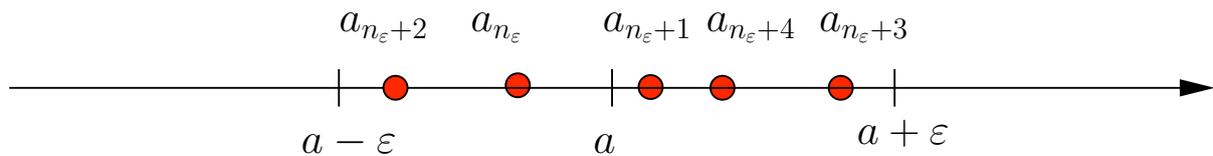


Abb. 4.2: Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man ein n_ε finden, so dass alle a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ in dem abgeschlossenen Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ liegen. Dies ist angedeutet, indem wir die ersten fünf Folgenglieder a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ eingezeichnet haben. Alle weiteren nicht mehr eingezeichneten a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ liegen natürlich ebenfalls in $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

konvergiert! Bevor man schreibt „ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ “, muss man sich erst davon überzeugt haben, dass dieser Grenzwert auch wirklich existiert, d.h. dass die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergiert!

Wir wollen nun für einige unserer Beispiele konvergenter Folgen vom Anfang dieses Teilkapitels die Konvergenz mit Hilfe der Definition 4.9 nachweisen. Dabei geben wir zunächst für drei Beispiele eine ganz ausführliche Argumentation, bei der wir unsere Gedanken/Überlegungen mit aufschreiben.

Beispiel 4.10. (konvergente Folge in \mathbb{R} mit Grenzwert 0)

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = (1/n)_{n \geq 1}$ gegen den Grenzwert $a = 0$ konvergiert, also dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nachweis: Wir gehen gemäß Definition 4.9 vor. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann suchen wir ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (welches von ε abhängt) so, dass gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad (4.5)$$

Wir überlegen uns nun, dass für $n \geq n_\varepsilon$ immer gilt:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Damit erhalten wir

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad (4.6)$$

Wenn wir nun n_ε so wählen können, dass gilt

$$\frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon, \quad (4.7)$$

dann folgt aus (4.6) und (4.7), dass (4.5) erfüllt ist, und wir haben gezeigt, dass die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a = 0$ konvergiert.

Umformen von (4.7) liefert

$$\frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad | : \varepsilon \quad \iff \quad \frac{1}{\varepsilon n_\varepsilon} \leq 1 \quad | \cdot n_\varepsilon \quad \iff \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq n_\varepsilon,$$

wobei alle „ \leq “-Zeichen erhalten bleiben, da $\varepsilon > 0$ und $n_\varepsilon \geq 1 > 0$ gelten. Wählen wir also $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ gilt, so folgt (4.7).

Abschließend halten wir unseren Nachweis der Konvergenz noch einmal zusammengefasst in **Kurzform** fest:

Zu $\varepsilon > 0$ beliebig wählen wir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ ($\Leftrightarrow 1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$), und dann gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Also konvergiert $(1/n)_{n \geq 1}$ gegen den Grenzwert $a = 0$.

Beispiel 4.11. (Konvergenz einer konstanten Folge in \mathbb{R})

Sei $(a_n)_{n \geq n_0} = (c)_{n \geq n_0}$ mit $a_n = c$ für alle $n \geq n_0$ eine **konstante Folge**. Dann ist die Folge $(c)_{n \geq n_0}$ konvergent mit dem Grenzwert $a = c$.

Nachweis: Um dieses nachzuweisen, müssen wir zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon \geq n_0$ (das in der Regel von ε abhängt) finden, so dass gilt

$$|a_n - a| = |c - c| = 0 \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Diese Bedingung ist hier aber automatisch für alle $n \geq n_0$ erfüllt, d.h. wir können $n_\varepsilon := n_0$ wählen.

Wir halten den Nachweis der Konvergenz noch einmal in **Kurzform** fest:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt für $n_\varepsilon := n_0$, dass

$$|a_n - a| = |c - c| = 0 \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon = n_0.$$

Also konvergiert die konstante Folge $(c)_{n \geq n_0}$ gegen den Grenzwert $a = c$.

Beispiel 4.12. (konvergente Folge in \mathbb{R} mit Grenzwert $\neq 0$)

Um zu zeigen, dass die Folge

$$(b_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)_{n \geq 1}$$

gegen den Grenzwert $b = 1$ konvergiert, gehen wir wie folgt vor:

Wir betrachten ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Wir suchen nun ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$|b_n - b| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad (4.8)$$

Da wir nur $n \geq n_\varepsilon$ betrachten müssen, können wir $1/(n+1)$ in (4.8) wie folgt nach oben abschätzen:

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad (4.9)$$

Aus (4.9) folgt also

$$|b_n - b| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad (4.10)$$

Können wir nun $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$ gilt, dann folgt aus (4.10), dass (4.8) gilt. Die Bedingung $1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$ kann aber wie folgt in eine äquivalente Bedingung für n_ε umgewandelt werden:

$$\frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \left| : \varepsilon > 0 \right. \iff \frac{1}{\varepsilon n_\varepsilon} \leq 1 \quad \left| \cdot n_\varepsilon \geq 1 \right. \iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n_\varepsilon.$$

Wir halten unseren Nachweis wieder in **Kurzform** fest:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählen wir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ gilt, so ist $1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$, und es gilt

$$|b_n - b| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon,$$

d.h. die Folge $(n/(n+1))_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $b = 1$.

Beispiel 4.13. (alternierende divergente Folge)

Um zu zeigen, dass die Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$ divergiert, zeigen wir, dass sie keinen Grenzwert hat, also dass keine reelle Zahl $g \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $((-1)^n)_{n \geq 0}$ ist.

Dazu müssen wir für jedes $g \in \mathbb{R}$ zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für kein $n_\varepsilon \geq 0$ die Grenzwert-Bedingung erfüllt ist. Dies bedeutet aber, dass für dieses spezielle $\varepsilon > 0$ für jede Wahl von $n_\varepsilon \geq 0$ ein $N \geq n_\varepsilon$ existiert, so dass $|a_N - g| = |(-1)^N - g| > \varepsilon$ gilt.

Sei also $g \in \mathbb{R}$ ein Kandidat für einen Grenzwert. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$, und $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sei beliebig. Dann sind n_ε und $n_\varepsilon + 1$ zwei aufeinander folgende natürlichen Zahlen, d.h. eine der beiden Zahlen ist gerade und die andere ist ungerade. Also erhalten wir unter den Folgengliedern $a_{n_\varepsilon} = (-1)^{n_\varepsilon}$ $a_{n_\varepsilon+1} = (-1)^{n_\varepsilon+1}$ einmal den Wert -1 und einmal den Wert $+1$.

Ist $g < 0$, so gilt $|1 - g| > |1 - 0| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$, d.h. wir haben

$$|a_{n_\varepsilon} - g| = |1 - g| > \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |a_{n_\varepsilon+1} - g| = |-1 - g| > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Ist $g \geq 0$, so gilt $|-1 - g| \geq |-1 - 0| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$, d.h. wir haben

$$|a_{n_\varepsilon} - g| = |-1 - g| > \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |a_{n_\varepsilon+1} - g| = |1 - g| > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

In beiden Fällen sehen wir, dass die Konvergenzbedingung verletzt ist.

Also $((-1)^n)_{n \geq 0}$ keinen Grenzwert und ist somit divergent.

Da wir nun verstanden haben, wie das ganze funktioniert, geben wir den Nachweis der Konvergenz einer Folge ab jetzt nur noch in der „Kurzform“ geben (bei der die Hintergrund-Überlegungen nur noch auf dem „Schmierzettel“ stehen).

Beispiel 4.14. (konvergente Zahlenfolgen und Grenzwerte)

(a) Die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen 0, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Nachweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|(-1)^n/n - 0| = 1/n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählen wir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ gilt, so ist $1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$, und es gilt

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

(b) Die Folge $(e^{-n})_{n \geq 0}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0.

Nachweis: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $|e^{-n} - 0| = e^{-n}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da der natürliche Logarithmus eine streng monoton wachsende Funktion ist, gilt

$$e^{-n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \begin{array}{c} \text{ln an-} \\ \text{wenden} \\ \downarrow \\ \iff \end{array} \quad -n_\varepsilon \leq \ln(\varepsilon) \quad \iff \quad n_\varepsilon \geq -\ln(\varepsilon).$$

Wählen wir n_ε so, dass $n_\varepsilon \geq \max\{0, -\ln(\varepsilon)\}$ ist, so gilt

$$|e^{-n} - 0| = e^{-n} \leq e^{-n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon,$$

wobei wir in $e^{-n} \leq e^{-n_\varepsilon}$ genutzt haben, dass $n \geq n_\varepsilon \iff -n \leq -n_\varepsilon$ und dass e^x eine (streng) monoton wachsende Funktion ist.

Wir beweisen nun zwei wichtige Eigenschaften von konvergenten Folgen.

Satz 4.15. (Eindeutigkeit des Grenzwertes und Beschränktheit)

- (1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge in \mathbb{R} ist **eindeutig** bestimmt (d.h. eine konvergente Folge in \mathbb{R} hat **genau einen** Grenzwert).
- (2) Jede **konvergente** Folge in \mathbb{R} ist **beschränkt**.

Beweis von Satz 4.15: Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} .

- (1) *Beweis durch Widerspruch:* Angenommen, $(a_n)_{n \geq n_0}$ habe zwei Grenzwerte $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{a} \neq a$. Dann ist der Abstand $d := |\tilde{a} - a| > 0$.

Wir wählen nun $\varepsilon \in]0, \frac{d}{2}[$. Da $(a_n)_{n \geq n_0}$ sowohl gegen a als auch gegen \tilde{a} konvergiert, existieren $n_{a,\varepsilon} \geq n_0$ und $n_{\tilde{a},\varepsilon} \geq n_0$, so dass gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leq \varepsilon && \text{für alle } n \geq n_{a,\varepsilon}, \\ |a_n - \tilde{a}| &\leq \varepsilon && \text{für alle } n \geq n_{\tilde{a},\varepsilon}. \end{aligned}$$

Sei nun $n_\varepsilon := \max\{n_{a,\varepsilon}, n_{\tilde{a},\varepsilon}\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} d = |\tilde{a} - a| &= |(\tilde{a} - a_n) + (a_n - a)| \\ &\leq \underbrace{|\tilde{a} - a_n|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \varepsilon} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{d}{2} = d \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir dabei die Dreiecksungleichung (siehe Hilfssatz 3.9 (9)) genutzt. Es ist also $d < d$. ζ Dieses ist ein Widerspruch! Daher kann die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ also nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben.

- (2) Die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ sei konvergent gegen a . Also existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $n_1 \geq n_0$ mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \text{für alle } n \geq n_1. \quad (4.11)$$

Sei $M := \max\{|a_{n_0}|, \dots, |a_{n_1}|, 1 + |a|\}$. Dann ist

$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle } n \geq n_0, \quad (4.12)$$

d.h. die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist beschränkt.

Nachweis von (4.12):

- Fall 1: $n_0 \leq n \leq n_1 \implies |a_n| \leq M$ (nach der Definition von M)

- Fall 2: $n > n_1 \implies |a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \leq M$, wobei wir in der ersten Abschätzung die Dreiecksungleichung (siehe Hilfssatz 3.9 (9)) und in der zweiten Abschätzung (4.11) genutzt haben. \square

Aus Teil (2) von Satz 4.15 folgt mittels Kontraposition (vgl. Anhang D), dass unbeschränkte Folgen divergent sind. Dieses wird häufig eingesetzt, um die Divergenz einer Folge zu begründen, und wir halten diese Folgerung als Hilfssatz fest.

Folgerung 4.16. (aus Satz 4.15: unbeschränkt \implies divergent)

*Ist eine Folge in \mathbb{R} **unbeschränkt**, so ist sie **divergent**.*

Achtung: Umgekehrt darf man **nicht** argumentieren, d.h. **eine beschränkte Folge muss nicht konvergent sein!**

Vgl. Beispiel 4.13: $((-1)^n)_{n \geq 0}$ ist beschränkt und trotzdem divergent!

Beispiel 4.17. (unbeschränkt \implies divergent)

- Die Folge $(n)_{n \geq 1}$ ist unbeschränkt; also ist sie divergent.
- Die Folge $(n!)_{n \geq 1}$ ist unbeschränkt; also ist sie divergent.

4.3 Nullfolgen in \mathbb{R}

In diesem Teilkapitel lernen wir mathematische Aussagen über sogenannte Nullfolgen in \mathbb{R} , d.h. konvergente Folgen in \mathbb{R} mit Grenzwert null, kennen.

Definition 4.18. (Nullfolge)

*Eine Folge in \mathbb{R} , die gegen 0 konvergiert, heißt eine **Nullfolge**.*

Beispiel 4.19. (Nullfolgen)

- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist eine Nullfolge (vgl. Beispiel 4.10).
- $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n \geq 0}$ ist eine Nullfolge (vgl. Beispiel 4.26 unten).

(c) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist eine Nullfolge (vgl. Beispiel 4.14 (a)).

Die nächste Bemerkung hält einen wichtigen Zusammenhang zwischen konvergen-
ten Folgen und Nullfolgen fest.

Bemerkung 4.20. (konvergente Folgen und Nullfolgen)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} . Dann gilt:

$$(a_n)_{n \geq n_0} \text{ konvergiert gegen } a \iff (a_n - a)_{n \geq n_0} \text{ ist eine Nullfolge.}$$

Beispiel 4.21. (zu Bemerkung 4.20)

Nach Beispiel 4.12 gilt für die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$

$$\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Nach Bemerkung 4.20 gilt dann auch, dass die Folge $\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)_{n \geq 1}$ gegen 0 kon-
vergiert. In der Tat finden wir

$$\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n - (n+1)}{n+1} = \frac{-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

weil nach Beispiel 4.10 $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ gegen 0 konvergiert.

Wir lernen nun weitere Resultate über Folgen und Nullfolgen kennen.

Satz 4.22. (beschränkte Folge mal Nullfolge = Nullfolge)

Seien $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \geq n_0}$ eine beschränkte Folge. Dann ist
 $(b_n a_n)_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge.

Beweis von Satz 4.22: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine beschränkte Folge ist, gibt es ein $S > 0$, so dass $|a_n| \leq S$ für
alle $n \geq n_0$ gilt.

Da $(b_n)_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge ist, existiert $n_{\varepsilon/S} \geq n_0$ so, dass für alle $n \geq n_{\varepsilon/S}$ gilt:
 $|b_n| = |b_n - 0| \leq \varepsilon/S$.

Für jedes $n \geq n_\varepsilon$ gilt also

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = \underbrace{|a_n|}_{\leq S} \cdot |b_n| \leq S \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq \varepsilon/S} \leq S \cdot \frac{\varepsilon}{S} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n b_n)_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge. \square

Betrachten wir zwei Beispiele zur Anwendung von Satz 4.22.

Beispiel 4.23. (beschränkte Folge mal Nullfolge = Nullfolge)

- (a) Die Folge $(1/n)_{n \geq 1}$ ist eine Nullfolge, und die Folge $((-1)^n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt. Nach Satz 4.22 ist die Folge

$$\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1} = \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \geq 1}$$

somit eine Nullfolge.

- (b) Die Folge $(1/n)_{n \geq 1}$ ist eine Nullfolge, und die Folge $(\sin(n))_{n \geq 1}$ ist beschränkt, da $|\sin(n)| \leq 1$ für alle $n \geq 1$ gilt. Nach Satz 4.22 ist die Folge

$$\left(\frac{\sin(n)}{n} \right)_{n \geq 1} = \left(\sin(n) \cdot \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$$

somit eine Nullfolge.

Satz 4.24. (Nullfolge ist Majorante \implies Folge ist Nullfolge)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} . Findet man einen Index $n_1 \geq n_0$ und eine Nullfolge $(b_n)_{n \geq n_1}$ mit

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{für alle } n \geq n_1,$$

so ist auch $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge. Die Folge $(b_n)_{n \geq n_1}$ heißt dann eine **Majorante für** $(a_n)_{n \geq n_0}$.

Beweis von Satz 4.24: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da $(b_n)_{n \geq n_1}$ eine Nullfolge ist, existiert $n_\varepsilon \geq n_1$ so, dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $|b_n| = |b_n - 0| \leq \varepsilon$.

Für jedes $n \geq n_\varepsilon$ gilt also

$$|a_n - 0| = |a_n| \leq b_n = |b_n| \leq \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge. □

Beispiel 4.23 (b) hätten wir auch mit Satz 4.24 behandeln können.

Beispiel 4.25. (Anwendung von Satz 4.24)

Für die Folge $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \geq 1}$ gilt

$$\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

wobei wir $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genutzt haben. Also ist die Nullfolge $(1/n)_{n \geq 1}$ eine Majorante für die Folge $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \geq 1}$. Nach Satz 4.24 ist $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \geq 1}$ somit eine Nullfolge.

Als letztes Beispiel betrachten wir die geometrische Folge.

Beispiel 4.26. (Konvergenz bzw. Divergenz der geometrischen Folge)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Für die **geometrische Folge** $(q^n)_{n \geq 0}$ gilt:

Fall 1: $|q| < 1$. Dann ist $(q^n)_{n \geq 0}$ eine Nullfolge (siehe unten).

Fall 2: $|q| > 1$. Dann ist $(q^n)_{n \geq 0}$ unbeschränkt, also divergent.

Fall 3: $q = 1$. Dann ist $(q^n)_{n \geq 0}$ die konstante Folge $(1)_{n \geq 0}$, also konvergiert $(q^n)_{n \geq 0}$ gegen 1.

Fall 4: $q = -1$. Dann ist $(q^n)_{n \geq 0} = ((-1)^n)_{n \geq 0}$. Diese Folge ist divergent (nach Beispiel 4.13).

Nachweis für Fall 1: Sei $|q| < 1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \leq |q|^{n_\varepsilon}.$$

Weil der Logarithmus streng monoton wachsend ist, folgt

$$|q|^{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \quad \iff \quad e^{\ln(|q|^{n_\varepsilon})} = e^{n_\varepsilon \ln(|q|)} \leq \varepsilon \quad \xLeftrightarrow{\text{ln anwenden}} \quad n_\varepsilon \ln(|q|) \leq \ln(\varepsilon).$$

Wegen $|q| < 1$ ist $\ln(|q|) < 0$ und somit folgt

$$n_\varepsilon \ln(|q|) \leq \ln(\varepsilon). \quad \iff \quad n_\varepsilon \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}.$$

Wählen wir also $n_\varepsilon \geq \max\left\{0, \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}\right\}$ so gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \leq |q|^{n_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Also ist $(q^n)_{n \geq 0}$ mit $|q| < 1$ eine Nullfolge. \square

4.4 Rechnen mit konvergenten Folgen in \mathbb{R}

In vielen Fällen können wir eine komplizierte Folge in \mathbb{R} als Summe, Differenz, Produkt oder Quotient einfacher Folgen in \mathbb{R} schreiben. Sind die einzelnen einfachen Folgen in \mathbb{R} konvergent und kennen wir deren Grenzwerte, so können wir die Konvergenz der komplizierten Folge und deren Grenzwert oft leicht mittels der Grenzwertsätze aus der Konvergenz und den Grenzwerten der einfachen Folgen herleiten. Betrachten wir zunächst ein motivierendes Beispiel.

Beispiel 4.27. (Rechnen mit konv. Folgen und deren Grenzwerten)

Betrachten wir die Folge

$$(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} \right)_{n \geq 1}.$$

Für diese Folge ist es nicht direkt ersichtlich, dass sie konvergiert und was ihr Grenzwert ist. Da sowohl im Nenner wie im Zähler die höchste Potenz n^2 ist, teilen wir den Nenner und den Zähler durch n^2 (d.h. wir erweitern mit $1/n^2$):

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}. \quad (4.13)$$

Wir haben bereits gezeigt, dass die Folge $(1/n)_{n \geq 1}$ gegen 0 konvergiert, und als Produkt der Nullfolge $(1/n)_{n \geq 1}$ mit sich selbst konvergiert $(1/n^2)_{n \geq 1}$ ebenfalls gegen 0. Weiter konvergiert die konstante Folge $(c)_{n \geq 1}$ gegen den Grenzwert c . Damit wissen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c = c \quad \text{für jede Konstante } c \in \mathbb{R}.$$

Wir würden nun gerne wie folgt argumentieren: Für die Folge im Zähler des umgeformten Folgengliedes (4.13) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 \right)}_{= 1} - \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)}_{= 0} = 1 - 0 = 1, \quad (4.14)$$

und für die Folge im Nenner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) = \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \right)}_{= 2} + \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right)}_{= 0} = 2 + 0 = 2. \quad (4.15)$$

Daraus würden wir nun gerne schließen, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

wobei wir im letzten Schritt (4.14) und (4.15) verwendet haben.

Die Grenzwertsätze im nachfolgenden Satz liefern uns die Rechtfertigung für unsere Argumentation im vorigen Beispiel.

Satz 4.28. (Grenzwertsätze für konvergente Folgen in \mathbb{R})

Seien $(a_n)_{n \geq n_0}$, $(b_n)_{n \geq n_0}$ **konvergente** Folgen mit den Grenzwerten

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Dann gelten:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = a + b$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = a \cdot b$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left|\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right| = |a|$$

$$(4) \quad \text{Falls } a \neq 0 \text{ ist, gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{a}.$$

Was ist mit der Differenz und dem Quotienten zweier konvergenter Folgen in \mathbb{R} ?

Folgerung 4.29. (Differenz bzw. Quotient konvergenter Folgen in \mathbb{R})

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.28.

(1) Dann folgt aus Satz 4.28 (1) und (2), dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + (-1) \cdot b_n) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = a + (-1)b = a - b. \end{aligned}$$

(2) Dann folgt aus Satz 4.28 (2) und (4): Ist $a \neq 0$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \cdot b_n\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{b}{a}.$$

Beweisideen für Satz 4.28: Für den Beweis nutzt man die Definition 4.9 der Konvergenz einer Folge und verwendet dabei jeweils die folgenden Abschätzungen:

(1) folgt mit der Dreiecksungleichung (siehe Hilfssatz 3.9 (9)) aus:

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (-1)(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

(2) folgt aus:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a b| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - a b| \\ &= |a_n (b_n - b) + (a_n - a) b| \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b| \end{aligned}$$

(3) folgt aus: $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$

(mit der unteren Dreiecksungleichung aus Hilfssatz 3.9 (10))

(4) Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ mit $a \neq 0$, existiert zu $\varepsilon = |a|/2$ ein $n_1 \geq n_0$ mit

$$|a_n - a| \leq \frac{|a|}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_1. \quad (4.16)$$

Mit der unteren Dreiecksungleichung (siehe Hilfssatz 3.9 (10)) gilt

$$|a_n - a| = |a - a_n| \geq ||a| - |a_n|| \geq |a| - |a_n|. \quad (4.17)$$

Aus (4.17) und (4.16) folgt dann für alle $n \geq n_1$

$$|a| - |a_n| \leq \frac{|a|}{2} \quad \iff \quad \frac{|a|}{2} \leq |a_n| \quad \iff \quad \frac{1}{|a_n|} \leq \frac{2}{|a|}. \quad (4.18)$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{a_n a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n| |a|} \stackrel{(4.18)}{\leq} \frac{2}{|a|^2} |a_n - a| \quad \text{für alle } n \geq n_1. \quad \square$$

Wir zeigen ausführlich, wie man Satz 4.28 (1) beweist. Die anderen Aussagen in Satz 4.28 können analog bewiesen werden.

Beweis von Satz 4.28 (1): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die beiden Folgen $(a_n)_{n \geq n_0}$ und $(b_n)_{n \geq n_0}$ jeweils mit den Grenzwert a bzw. b konvergieren, gilt: Zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ gibt es jeweils ein $n_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \geq n_0$ bzw. ein $n_{b, \frac{\varepsilon}{2}} \geq 0$ mit

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\text{bzw.} \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_{b, \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Sei nun $n_\varepsilon := \max\{n_{a, \frac{\varepsilon}{2}}, n_{b, \frac{\varepsilon}{2}}\}$. Dann gilt

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \quad (4.19)$$

$$\text{bzw.} \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad (4.20)$$

Mit der Dreiecksungleichung (siehe Hilfssatz 3.9 (9)) folgt dann für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (-1)(b_n - b)| \\ &\leq |(a_n - a)| + |(-1)(b_n - b)| \\ &= \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile (4.19) und (4.20) genutzt haben. Also konvergiert die Folge $(a_n + b_n)_{n \geq n_0}$ gegen $a + b$. \square

Betrachten wir einige Beispiele für die Anwendung der Grenzwertsätze.

Beispiel 4.30. (Anwendung der Grenzwertsätze)

$$(a) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot 0 = 0, \quad \text{weil } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ist.}$$

$$\text{Genauso gilt für jedes feste } k \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Man sieht dieses durch wiederholtes Anwenden der obigen Argumentation.

$$(b) \quad \frac{3n^2 - n + 1}{n^2} = 3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 - 0 + 0 = 3,$$

$$\text{denn:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c = c \text{ für jedes } c \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \quad \frac{2n+1}{n^2+n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0+0}{1+0+0} = 0,$$

denn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

(d) Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1+0)^k = 1$, denn: Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$$

Wendet man nun Satz 4.28 (2) wiederholt (genauer $(k-1)$ -mal) an, so folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = 1 \cdot 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] = 1 \cdot 1 = 1 \\ &\vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} \right] = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Warnung: Diese Methode funktioniert nicht für die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
Es gilt nämlich

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \neq 1 \quad (\text{mit der Euler-Zahl } e).$$

In unseren Beispielen haben wir schon gesehen, was passiert, wenn die Folgenglieder durch eine rationale Funktion, also den Quotient zweier Polynomfunktionen, gegeben sind. In der nachfolgenden Bemerkung halten wir dieses allgemein fest.

Bemerkung 4.31. (Folge ist Quotient von Polynomfunktionen)

Seien p, q reelle Polynomfunktionen, wobei q nicht das Nullpolynom sein darf. Dann gilt:

- (1) Falls $\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q)$, so gilt $\frac{p(n)}{q(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(2) Falls $\text{Grad}(p) = \text{Grad}(q) =: k$, so gilt

$$\frac{p(n)}{q(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k},$$

wobei a_k der Leitkoeffizient von p und b_k der Leitkoeffizient von q ist.

(3) Falls $\text{Grad}(p) > \text{Grad}(q)$, so ist die Folge $(p(n)/q(n))$ unbeschränkt, d.h. divergent.

Den Nachweis dieser Aussagen erhält man, indem man wie in Beispiel 4.27 den Nenner und Zähler durch die **höchste Potenz des Nenners** teilt.

Betrachten wir dazu noch einige Beispiele.

Beispiel 4.32. (Folge ist Quotient von Polynomfunktionen)

(a) $\frac{n+1}{2n^2+n+4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, da $\text{Grad}(\text{Zähler}) = 1 < 2 = \text{Grad}(\text{Nenner})$.

(b) $\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$, da $\text{Grad}(\text{Zähler}) = 2 = \text{Grad}(\text{Nenner})$.

(c) $\left(\frac{n^3-n}{2n^2+n+4}\right)$ ist divergent, da $\text{Grad}(\text{Zähler}) = 3 > 2 = \text{Grad}(\text{Nenner})$.

Zieht man die Wurzel einer konvergenten nicht-negativen Folge, so erhält man wieder eine konvergente Folge.

Satz 4.33. (Wurzelfolge einer konvergenten nicht-negativen Folge)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} mit $a_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ und mit dem Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dann gelten:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, d.h. die Folge $(\sqrt{a_n})_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen \sqrt{a} .

(2) Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$,

d.h. die Folge $(\sqrt[k]{a_n})_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $\sqrt[k]{a}$.

Beweis von Satz 4.33 (1) : Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Fall 1: Sei $a = 0$, d.h. $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist eine Nullfolge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und

$\tilde{\varepsilon} := \varepsilon^2 > 0$. Dann existiert ein $n_{\tilde{\varepsilon}} \geq n_0$ mit

$$0 \leq a_n = |a_n| = |a_n - 0| \leq \tilde{\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_{\tilde{\varepsilon}}.$$

Also folgt durch Ziehen der Wurzel:

$$0 \leq \underbrace{\sqrt{a_n}}_{=|\sqrt{a_n}-0|} \leq \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_{\tilde{\varepsilon}} =: n_{\varepsilon},$$

d.h. $(\sqrt{a_n})_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $0 = \sqrt{0} = \sqrt{a}$.

- Fall 2: Sei $a > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| &= |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot \frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} = \frac{|(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})|}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{|(\sqrt{a_n})^2 - (\sqrt{a})^2|}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |a_n - a|, \end{aligned} \quad (4.21)$$

wobei wir im dritten Schritt die dritte binomische Formel genutzt haben. Mit dieser Abschätzung folgt aus der Konvergenz von $(a_n)_{n \geq n_0}$ gegen a die Konvergenz von $(\sqrt{a_n})_{n \geq n_0}$ gegen \sqrt{a} wie folgt: Sie $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(a_n)_{n \geq n_0}$ gegen a konvergiert, existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \sqrt{a} \varepsilon$ ein $n_{\tilde{\varepsilon}} \geq n_0$ so dass gilt

$$|a_n - a| \leq \tilde{\varepsilon} = \sqrt{a} \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_{\tilde{\varepsilon}}.$$

Mit Abschätzung (4.21) folgt nun

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \sqrt{a} \varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{a} \varepsilon = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_{\tilde{\varepsilon}} =: n_{\varepsilon},$$

d.h. $(\sqrt{a_n})_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen \sqrt{a} . □

Beispiel 4.34. (Wurzelfolgen)

$$(a) \quad \sqrt{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

$$(b) \quad \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = \sqrt[k]{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{0} = 0 \quad \text{für jedes feste } k \in \mathbb{N}$$

Warnung: Das funktioniert nicht für $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)_{n \geq 1}$. Es gilt nämlich $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \frac{n^2 + \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^4 - n^3}} &= \frac{n^2 + \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^4 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}} = \frac{n^2 + \sqrt[3]{n}}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{n^2 + \sqrt[3]{n^6 \frac{1}{n^5}}}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{n^2 + n^2 \sqrt[3]{\frac{1}{n^5}}}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \\
 &= \frac{n^2 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n^5}}\right)}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n^5}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{0}}{\sqrt{1 - 0}} = 1
 \end{aligned}$$

(d) Bei der Folge $(\sqrt{n^2 + n} - n)_{n \geq 1}$ liegt das Problem vor, dass wir die Differenz der Terme $\sqrt{n^2 + n} = n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ und n haben, die für $n \rightarrow \infty$ beide wie n wachsen. Daher ist unklar, was für $n \rightarrow \infty$ mit ihrer Differenz passiert. Um den Grenzwert der Folge $(\sqrt{n^2 + n} - n)_{n \geq 1}$ zu bestimmen, erweitern wir mit $\sqrt{n^2 + n} + n$, um mit der dritten binomischen Formel die Wurzel im Zähler des entstehenden Bruchs loszuwerden:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n^2 + n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
 &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + n} = \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die dritte binomische Formel benutzt haben.

4.5 Konvergenzkriterien für Folgen in \mathbb{R}

In diesem Teilkapitel lernen wir weitere Kriterien für die Konvergenz von Folgen kennen.

Satz 4.35. (Einschlusskriterium)

Sei $(b_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge. Falls ein Index $n_1 \geq n_0$ und konvergente Folgen $(a_n)_{n \geq n_1}$ und $(c_n)_{n \geq n_1}$ existieren mit

(i) $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq n_1$, und

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$,

so ist auch $(b_n)_{n \geq n_0}$ konvergent gegen den Grenzwert $b := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Beweis von Satz 4.35: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_\varepsilon \geq n_1$ mit $|a_n - b| \leq \varepsilon$ und $|c_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$-\varepsilon \leq -|a_n - b| \leq a_n - b \leq b_n - b \leq c_n - b \leq |c_n - b| \leq \varepsilon.$$

Also gilt

$$-\varepsilon \leq b_n - b \leq \varepsilon \quad \text{d.h.} \quad |b_n - b| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \quad \square$$

Beispiel 4.36. (Folge mit n -ten Wurzeln)

(a) Behauptung: $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Beweis: Es gilt $\sqrt[n]{n} \geq 1$, weil die n -te Wurzel einer Zahl ≥ 1 ebenfalls ≥ 1 ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$.

Idee: Wir zeigen, dass $(a_n)_{n \geq 1} := (\sqrt[n]{n} - 1)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Nachweis: Es gilt

$$a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad \iff \quad 1 + a_n = \sqrt[n]{n} \quad \iff \quad (1 + a_n)^n = n,$$

und für $n \geq 2$ finden wir mit dem binomischen Satz (vgl. Satz 1.30)

$$\begin{aligned} n = (1 + a_n)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \underbrace{a_n^k}_{\geq 0} \geq \binom{n}{0} a_n^0 + \binom{n}{2} a_n^2 \\ &= 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

genutzt haben. Es folgt durch Umformen für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 &\iff n-1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \\ \iff (n-1) \cdot \frac{2}{n(n-1)} \geq a_n^2 &\iff \frac{2}{n} \geq a_n^2 \end{aligned}$$

und somit $a_n^2 \leq 2/n$ für alle $n \geq 2$, d.h.

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $(a_n)_{n \geq 2} = (\sqrt[n]{n} - 1)_{n \geq 2}$ eine Nullfolge nach Satz 4.24. Mit Bemerkung 4.20 folgt die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. \square

(b) Behauptung: Für festes $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Beweis: Wir unterscheiden die beiden Fälle $c \geq 1$ und $0 < c < 1$.

- Fall 1: Sei $c \geq 1$. Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq c$. Dann gilt $1 \leq c \leq n$ für alle $n \geq n_1$. Durch Ziehen der n -ten Wurzel erhält man:

$$\begin{array}{ccc} 1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} & & \\ n \rightarrow \infty \downarrow & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Mit dem Einschlusskriterium aus Satz 4.35 mit den Folgen $(a_n)_{n \geq n_1} := (\sqrt[n]{1})_{n \geq n_1} = (1)_{n \geq n_1}$ und $(b_n)_{n \geq n_1} := (\sqrt[n]{n})_{n \geq n_1}$ folgt die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

- Fall 2: Sei $0 < c < 1$. Da $1/c > 1$ ist, folgt mit Fall 1 und Satz 4.28 (4):

$$\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{c}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

Beispiel 4.37. (für das Einschlusskriterium)

Für die Folge $(b_n)_{n \geq 1} = (\sqrt[n]{1 + 7^n})_{n \geq 1}$ gilt für alle $n \geq 1$:

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{1 + 7^n} \leq \sqrt[n]{7^n + 7^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{7^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 7,$$

wobei wir genutzt haben, dass \sqrt{x} eine (streng) monoton wachsende Funktion ist. Mit $a_n := 7$ und $c_n := \sqrt[n]{2} \cdot 7$ haben wir zwei Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(c_n)_{n \geq 1}$ definiert, für die gilt

$$7 = a_n \leq \sqrt[n]{1 + 7^n} \leq c_n = \sqrt[n]{2} \cdot 7 \quad \text{für alle } n \geq 1. \quad (4.22)$$

Beide Folgen sind konvergent mit den Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} \cdot 7) = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 7 \cdot 1 = 7,$$

wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ nach Beispiel 4.36 (b) gilt. Nach dem Einschlusskriterium aus Satz 4.35 folgt dann mit (4.22), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 7^n} = 7$ ist.

Satz 4.38. (Monotonieprinzip)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} . Ist $(a_n)_{n \geq n_0}$ monoton und beschränkt, so ist $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergent.

Betrachten wir ein Beispiel für die Anwendung des Monotonieprinzips.

Beispiel 4.39. (Anwendung des Monotonieprinzips)

Die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)_{n \geq 1}$ ist konvergent, denn:

- Es gilt

$$|a_n| = \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h. $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)_{n \geq 1}$ ist beschränkt.

- Wir formen a_{n+1} passend um, um $a_{n+1} > a_n$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=a_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{\underbrace{n^2 + 2n}_{>1}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=a_n} \\ &> 1 \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=a_n} = \frac{n}{n+1} = a_n, \end{aligned}$$

also $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\left(\frac{n}{n+1} \right)_{n \geq 1}$ ist streng monoton wachsend.

Nach dem Monotonieprinzip ist die Folge somit konvergent.

4.6 Uneigentliche Grenzwerte für Folgen in \mathbb{R}

Zuletzt betrachten wir noch Folgen, deren Werte in einem noch genau zu definierenden Sinn gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ und streben.

Definition 4.40. (divergent gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$)

(1) Eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **divergent gegen $+\infty$** , falls gilt: Für jedes $R > 0$ existiert ein $n_R \geq n_0$ so, dass für alle $n \geq n_R$ gilt: $a_n \geq R$.

Man sagt dann auch, $(a_n)_{n \geq n_0}$ hat den **uneigentlichen Grenzwert $+\infty$** , und man schreibt

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad a_n \rightarrow +\infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(2) Eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ heißt **divergent gegen $-\infty$** , falls gilt: Für jedes $R > 0$ existiert $n_R \geq n_0$ so, dass für alle $n \geq n_R$ gilt: $a_n \leq -R$.

Man sagt dann auch, $(a_n)_{n \geq n_0}$ hat den **uneigentlichen Grenzwert $-\infty$** , und man schreibt

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{bzw.} \quad a_n \rightarrow -\infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Die Bedingung „Für jedes $R > 0$ existiert ein $n_R \geq n_0$ so, dass für alle $n \geq n_R$ gilt: $a_n \geq R$.“ bedeutet anschaulich, dass die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig groß werden. Analog bedeutet „Für jedes $R > 0$ existiert $n_R \geq n_0$ so, dass für alle $n \geq n_R$ gilt: $a_n \leq -R$.“, dass die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig klein werden (im Sinne von negativ und im Betrag beliebig groß werden).

Betrachten wir ein paar Beispiele.

Beispiel 4.41. (divergent gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$)

(a) $n! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ und $-n! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

(b) $2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ und $-2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

(c) $((-2)^n)_{n \geq 0}$ ist divergent, aber die Folge ist weder divergent gegen $+\infty$ noch divergent gegen $-\infty$, d.h. die Folge hat keinen uneigentlichen Grenzwert.

Bemerkung 4.42. (divergent gegen $-\infty$ bzw. $+\infty \Rightarrow$ unbeschränkt)

Ist $(a_n)_{n \geq n_0}$ divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so ist $(a_n)_{n \geq n_0}$ unbeschränkt. Dieses folgt (fast) unmittelbar aus Definition 4.40.

Zum Abschluss halten wir noch eine alternative Charakterisierung von „divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ “ fest, die nützlich ist, um Folgen bequem auf die Eigenschaften „divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ “ zu überprüfen.

Hilfssatz 4.43. (divergent gegen $+\infty$ bzw. divergent gegen $-\infty$)

- (1) $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist **divergent gegen $+\infty$** genau dann, wenn
- (i) ein $n_1 \geq n_0$ existiert mit $a_n > 0$ für alle $n \geq n_1$ und
 - (ii) $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_1}$ eine Nullfolge ist.
- (2) $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist **divergent gegen $-\infty$** genau dann, wenn
- (i) ein $n_1 \geq n_0$ existiert mit $a_n < 0$ für alle $n \geq n_1$ und
 - (ii) $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_1}$ eine Nullfolge ist.

Mit Hilfssatz 4.43 kann man nun bequem einen formalen Nachweis für die Folgen in Beispiel 4.41 geben.

Beispiel 4.44. (divergent gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$)

(a) Für $(n!)_{n \geq 0}$ gilt:

- (i) $n! > 0$ für alle $n \geq 0$.
- (ii) $(1/n!)_{n \geq 0}$ ist eine Nullfolge.

Also ist $(n!)_{n \geq 0}$ divergent gegen $+\infty$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$.

Für $(-n!)_{n \geq 0}$ gilt:

- (i) $-n! < 0$ für alle $n \geq 0$.
- (ii) $(1/(-n!))_{n \geq 0}$ ist eine Nullfolge.

Also ist $(-n!)_{n \geq 0}$ divergent gegen $-\infty$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} -n! = -\infty$.

(b) Für $(2^n)_{n \geq 0}$ gilt:

- (i) $2^n > 0$ für alle $n \geq 0$.
- (ii) $(1/2^n)_{n \geq 0}$ ist eine Nullfolge.

Also ist $(2^n)_{n \geq 0}$ divergent gegen $+\infty$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$.

Für $(-2^n)_{n \geq 0}$ gilt:

- (i) $-2^n < 0$ für alle $n \geq 0$.
- (ii) $(1/(-2^n))_{n \geq 0}$ ist eine Nullfolge.

Also ist $(-2^n)_{n \geq 0}$ divergent gegen $-\infty$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} -2^n = -\infty$.

$$(c) \quad (-2)^n = (-1)^n 2^n = \begin{cases} 2^n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -2^n & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Da $((-2)^n)_{n \geq 0}$ immer abwechselnd positive und negative Werte annimmt, kann $((-2)^n)_{n \geq 0}$ nach Hilfssatz 4.43 nicht divergent gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ sein (denn Eigenschaft (i) ist jeweils verletzt).

Stetigkeit reeller Funktionen

In Teilkapitel 5.1 führen wir den Begriff der Stetigkeit ein und lernen grundlegende Eigenschaften der Stetigkeit kennen. In Teilkapitel 5.2 wird der Begriff des Grenzwertes einer Funktion $f(x)$, wenn sich x einem Punkt u annähert, eingeführt. In Teilkapitel 5.3 verallgemeinern wir den Begriff des Grenzwertes einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $x = u$ dahingehend, dass wir uns dem Punkt $x = u$ nur von links oder nur von rechts nähern. Hierbei betrachten wir auch den Fall, wenn x gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt. In Teilkapitel 5.4 lernen wir wichtige Resultate über stetige Funktionen kennen, nämlich den Zwischenwertsatz und den Satz über die Existenz eines Minimums und eines Maximums einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall.

5.1 Definition und einfache Eigenschaften

Als Vorbereitung für den Begriff der Stetigkeit benötigen wir den Begriff einer Folge in der Definitionsmenge einer Funktion.

Definition 5.1. (Folgen in D)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Man sagt, $(u_n)_{n \geq n_0}$ ist eine **Folge in D** , wenn alle Folgenglieder u_n in D liegen, d.h. wenn gilt $u_n \in D$ für alle $n \geq n_0$.

Nun können wir Stetigkeit einführen.

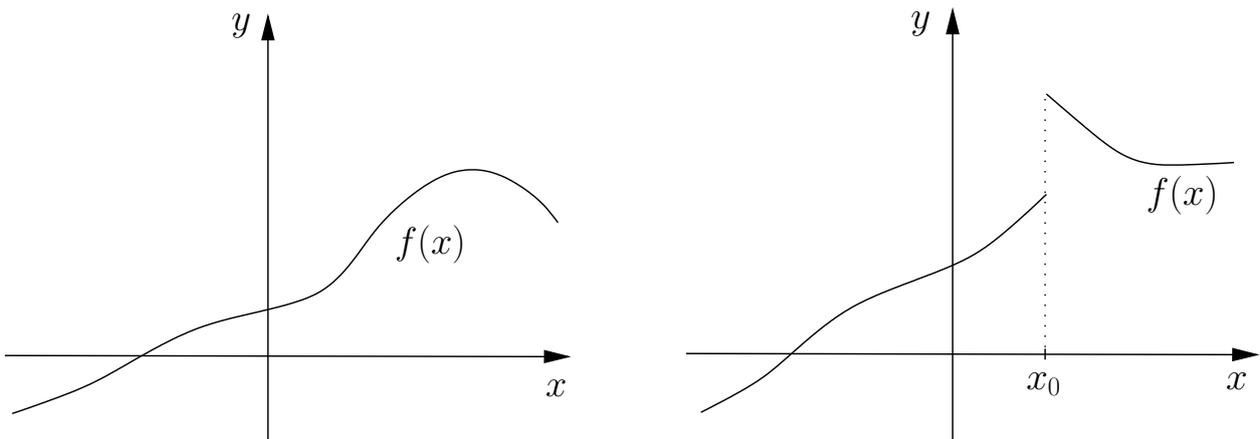


Abb. 5.1: Die Funktion im linken Bild ist (in allen Punkten) stetig. Die Funktion im rechten Bild ist unstetig im Punkt x_0 , weil die Funktion hier eine „Sprungstelle“ hat.

Definition 5.2. (Stetigkeit)

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f heißt **stetig in** $u \in D$, falls für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in D gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \implies \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(u). \quad (5.1)$$

(2) f heißt **stetig in** D , falls f in jedem $u \in D$ stetig ist.

Was bedeutet die Definition der Stetigkeit anschaulich?

Die Aussage (5.1) besagt das Folgende: Wenn wir uns mit einer (beliebigen) Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in D mit Grenzwert u dem Punkt u nähern, so strebt die Folge $(f(u_n))_{n \geq n_0}$ der Funktionswerte gegen den Grenzwert $f(u)$, also gegen den Funktionswert in u .

Ist f auf einem Intervall D definiert, so bedeutet die Stetigkeit von f in D „lax“ ausgedrückt, dass **der Graph einer in D stetigen Funktion eine durchgehende Kurve ist, die in keinem Punkt $x_0 \in D$ abreißt oder „springt“**. Anschaulich ist dieses in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Funktion mit dem Graphen im linken Bild in Abbildung 5.1 ist stetig, d.h. sie ist in allen Punkten stetig, wogegen die Funktion mit dem Graphen im rechten Bild in allen Punkten außer x_0 stetig ist. In $x = x_0$ hat die Funktion im rechten Bild in Abbildung 5.1 dagegen eine „Unstetigkeitsstelle“; sie „springt“ im Punkt $x = x_0$ und hat dort eine „Sprungstelle“.

Beispiel 5.3. (stetige Funktionen)(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.

- f ist stetig in $u = 0$, denn:

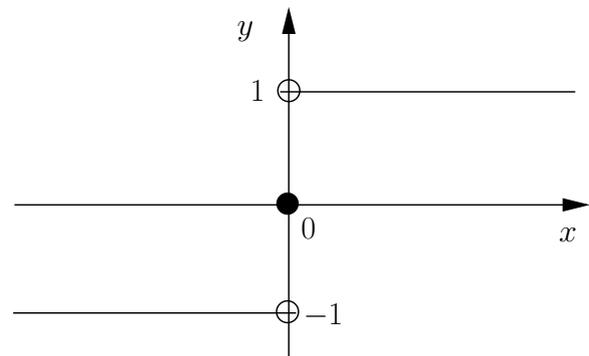
$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) = u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^2 = f(0)$$

- f ist sogar stetig in \mathbb{R} , denn für jedes $u \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) = u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^2 = f(u)$$

(b) Sei $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die sogenannte **Signum-Funktion** oder **Vorzeichen-Funktion**, definiert durch:

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$



sgn ist nicht stetig in $u = 0$, denn für $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ gilt:

$$(-1)^n \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{aber} \quad \text{sgn}(u_n) = \text{sgn}\left((-1)^n \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \text{ divergiert.}$$

In allen $u \neq 0$ ist sgn stetig, denn ist $u \neq 0$, so reicht es für $u < 0$ Folgen $(u_n)_{n \geq n_0}$ mit $u_n < 0$ für alle $n \geq n_0$ zu betrachten. Analog reicht es für $u > 0$ Folgen $(u_n)_{n \geq n_0}$ mit $u_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ zu betrachten.

(*Erklärung:* Gilt $u < 0$, so muss für eine Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ (wegen der Konvergenz) ein n_1 existieren mit $u_n < 0$ für alle $n \geq n_1$. Statt $(u_n)_{n \geq n_0}$ kann man nun die Folge $(u_n)_{n \geq n_1}$ betrachten, welche ebenfalls gegen u konvergiert und nur negative Folgenglieder u_n hat. Der andere Fall ist analog.)

- *Fall* $u < 0$:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ mit } u_n < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{sgn}(u_n) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 = \text{sgn}(u).$$

- *Fall* $u > 0$:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ mit } u_n > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{sgn}(u_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \text{sgn}(u).$$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x$. Dann ist f stetig in \mathbb{R} , denn für jedes $u \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) = u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u = f(u)$$

- (d) Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$. Die Funktion f ist stetig in $[0, \infty[$, denn für alle $u \in [0, \infty[$ gilt: Ist $(u_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in $[0, \infty[$ (d.h. wenn $u_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$) mit $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, dann folgt:

$$f(u_n) = \sqrt{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{u} = f(u).$$

- (e) Die Funktionen \exp , \sin und \cos sind stetig in \mathbb{R} (ohne Beweis). Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind stetig auf ihrem jeweiligen maximalen Definitionsbereich.

- (f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$, ist stetig.

In der Tat folgt für jedes $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ aus den Grenzwertsätzen für Folgen (siehe Satz 4.28), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u} = f(u).$$

- (g) Die **Dirichletsche Sprungfunktion**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $u \in \mathbb{R}$ stetig.

Der nächste Satz erlaubt uns, komplizierte stetige Funktionen als Summe, Differenz, Produkt oder Quotient einfacher stetiger Funktionen zu betrachten und aus der Stetigkeit der einfachen Funktionen auf die Stetigkeit der komplizierten Funktion zu schließen.

Satz 5.4. (Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beide **stetig in** $u \in D$. Dann gilt:

- (1) $f + g$, $f \cdot g$ und $|f|$ sind **stetig in** u .
- (2) Falls $f(u) \neq 0$ ist, so ist $1/f$ **stetig in** u .

Bemerkung 5.5. (Quotient stetiger Funktionen)

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 5.4. Aus Satz 5.4 folgt dann auch: Falls $f(u) \neq 0$ ist, so ist $g/f = g \cdot (1/f)$ **stetig in** u .

Beweis von Satz 5.4: Der Satz folgt aus den Grenzwertsätzen für Folgen (siehe Satz 4.28). \square

Betrachten wir auch hierzu einige Beispiele.

Beispiel 5.6. (stetige Funktionen)

(a) Die Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

ist stetig in jedem $u \in [0, \infty[$ (d.h. f ist stetig in $[0, \infty[$), denn: Die Funktionen $g(x) = x$, $h(x) = \sqrt{x}$, $k(x) = x^2 + 1$ sind stetig in jedem $u \in [0, \infty[$, und $k(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle $u \in [0, \infty[$. Nach Satz 5.4 ist somit auch f stetig in jedem $u \in [0, \infty[$.

(b) Reelle Polynomfunktionen sind stetig in \mathbb{R} , denn eine reelle Polynomfunktion

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ist eine Summe von Produkten stetiger Funktionen.

(c) Aus (b) und Satz 5.4 folgt, dass rationale Funktionen

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

(mit p und q reellen Polynomfunktionen) in ihrer (maximalen) Definitionsmenge

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

stetig sind. Beispielsweise ist

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 1}$$

stetig in $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(d) Nach Satz 5.4 ist der Tangens

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

stetig auf $D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$.

Nach Satz 5.4 ist der Cotangens

$$\cot = \frac{\cos}{\sin}$$

stetig auf $D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0\}$.

Als Letztes untersuchen wir die Verkettung stetiger Funktionen.

Erinnerung: Gelten für zwei Funktionen für $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, dass $B_f = f(D) \subseteq \tilde{D}$, so kann man die Verkettung $g \circ f$ bilden:

$$g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Satz 5.7. (Verkettung stetiger Funktionen)

Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig. Genauer: Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq \tilde{D}$. Dann gelten:

- (1) Ist f stetig in $u \in D$ und ist g stetig in $f(u) \in \tilde{D}$, so ist $g \circ f$ stetig in $u \in D$.
- (2) Ist f stetig in D und g stetig in $f(D)$, so ist $g \circ f$ stetig in D .

Beweis von Satz 5.7:

- (1) Sei $(u_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in D mit $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. Wir müssen zeigen

$$(g \circ f)(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(u).$$

Da f in u stetig ist, gilt $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(u)$.

Sei nun $v_n := f(u_n)$. Da $f(D) \subseteq \tilde{D}$, ist $(v_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \tilde{D} .

Da g in $f(u)$ stetig ist und $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(u)$, gilt $g(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(f(u))$.

Also finden wir:

$$(g \circ f)(u_n) = g(f(u_n)) = g(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(f(u)) = (g \circ f)(u)$$

- (2) folgt direkt aus (1). □

Betrachten wir einige Beispiele für die Verkettung stetiger Funktionen.

Beispiel 5.8. (Verkettung stetiger Funktionen)

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(x^2)$ ist stetig in \mathbb{R} , weil $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x^2$, beide in \mathbb{R} stetig sind.
- (b) $f : [-3, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x+3}$ ist stetig in $[-3, \infty[$, denn: Es gilt $f = g \circ h$, und $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt{x}$, ist stetig in $[0, \infty[$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x+3$, ist stetig in \mathbb{R} und $h([-3, \infty[) = [0, \infty[\subseteq [0, \infty[= D_g$.

(c) Die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

sind stetig in \mathbb{R} nach Satz 5.4 und nach Satz 5.7.

5.2 Konvergenz für $x \rightarrow u$

Betrachten wir zunächst ein Beispiel für den Grenzwert einer Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow u$.

Beispiel 5.9. (Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow u$)

Die rationale Funktion

$$g(x) := \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$$

hat den maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sei $(u_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in D mit $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2$. Dann gilt

$$g(u_n) = \frac{u_n^2 + u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{(u_n + 2)(u_n - 1)}{u_n + 2} = u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2 - 1 = -3.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 1) = -3.$$

Die Funktion g lässt sich nach $x = -2$ stetig fortsetzen:

$$\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \neq -2, \\ -3 & \text{für } x = -2. \end{cases}$$

Die Funktion \tilde{g} ist stetig in \mathbb{R} , und wir bezeichnen \tilde{g} als die stetige Fortsetzung von g nach $x = -2$.

Nach dem motivierenden Beispiel lernen wir die Definition des Grenzwertes einer Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow u$.

Definition 5.10. (Grenzwert von f für $x \rightarrow u$)

Sei I ein offenes Intervall (d.h. $I =]a, b[$ oder $I =]-\infty, b[$ oder $I =]a, \infty[$

oder $I = \mathbb{R}$), $u \in I$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D = I \setminus \{u\}$ oder $D = I$. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = v \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow u} v,$$

falls für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in $I \setminus \{u\}$ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \implies \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v.$$

v heißt der **Grenzwert von f für x gegen u** . Man sagt auch: „ f konvergiert gegen v für x gegen u “.

Zu beachten ist, dass D in der obigen Definition **nicht** der maximale reelle Definitionsbereich von f sein muss.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 5.11. (Grenzwerte von f für $x \rightarrow u$)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{x + 1} = \frac{e^0 + 1}{0 + 1} = 2$$

Bemerkung 5.12. (Stetigkeit und stetige Fortsetzung)

Sei I ein offenes Intervall.

(1) Seien $D = I$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f ist **genau dann stetig in $u \in I$** , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow u} f(x)$ existiert und gleich $f(u)$ ist, also wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u).$$

(2) Seien $u \in I$, $D = I \setminus \{u\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Existiert $v := \lim_{x \rightarrow u} f(x)$, so lässt sich f **stetig nach u fortsetzen**: Die durch

$$\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in I \setminus \{u\}, \\ v & \text{für } x = u, \end{cases}$$

definierte Funktion ist dann stetig in I . Man nennt \tilde{f} eine **stetige Fortsetzung von f nach $x = u$** .

Betrachten wir nun einige Beispiele, in denen wir Grenzwerte nutzen, um eine Funktion auf Stetigkeit bzw. stetige Fortsetzbarkeit in einzelnen Punkten zu überprüfen.

Beispiel 5.13. (Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit)

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{wenn } x \neq 1, \\ 0 & \text{wenn } x = 1, \end{cases}$$

ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ und nicht stetig in $x = 1$, denn

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \neq 0 = f(1).$$

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ und lässt sich stetig nach $x = 1$ fortsetzen, denn

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{wenn } x \neq 1, \\ 2 & \text{wenn } x = 1, \end{cases}$$

ist dann eine auf ganz \mathbb{R} stetige Fortsetzung von f (nach $x = 1$).

(c) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x},$$

lässt sich nicht stetig nach 0 fortsetzen, denn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ existiert nicht.

5.3 Einseitige Grenzwerte

Als Verallgemeinerung des Grenzwertes einer Funktion f für $x \rightarrow u$ betrachten wir nun Grenzwerte einer Funktion f für $x \rightarrow u$ mit $x > u$ bzw. $x < u$, d.h. wir nähern uns u nur von einer Seite.

Wir beginnen mit dem Fall, wenn x beliebig groß bzw. beliebig klein wird, also wenn $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$.

Definition 5.14. (Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$)

(1) Sei $f :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = v \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} v,$$

falls für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in $]a, \infty[$ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \implies \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v. \quad (5.2)$$

v heißt dann der **Grenzwert von f für x gegen $+\infty$** . Man sagt auch: „ f konvergiert gegen v für x gegen $+\infty$.“

(2) Sei $f :]-\infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = v \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v,$$

falls für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in $] -\infty, b[$ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad \implies \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v. \quad (5.3)$$

v heißt dann der **Grenzwert von f für x gegen $-\infty$** . Man sagt auch: „ f konvergiert gegen v für x gegen $-\infty$.“

Bei den Folgen $(u_n)_{n \geq n_0}$ in (5.2) bzw. (5.3) handelt es sich um Folgen, die gemäß Definition 4.40 divergent gegen $+\infty$ bzw. divergent gegen $-\infty$ sind.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 5.15. (Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$)

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 7} = \frac{1}{3}$, denn für $(u_n)_{n \geq n_0}$ in $[2, \infty[$ mit $u_n \rightarrow +\infty$ gilt

$$\frac{u_n^2 + 1}{3u_n^2 - 7} = \frac{\frac{1}{u_n^2}(u_n^2 + 1)}{\frac{1}{u_n^2}(3u_n^2 - 7)} = \frac{1 + \frac{1}{u_n^2}}{3 - \frac{7}{u_n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ existiert nicht, denn

$$n \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad \text{aber} \quad \left(\sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right)_{n \geq 0} \quad \text{ist divergent!}$$

Erklärung: $\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$ nimmt abwechselnd die Werte $0, 1, 0, -1$ an. Genauer: Für gerade $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$\sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(2k \frac{\pi}{2} \right) = \sin(k\pi) = 0,$$

und für ungerade $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$\sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left((2k + 1) \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (zunächst ohne Beweis)

Mit dem Begriff des Grenzwertes einer Funktion f für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ können wir nun waagerechte Asymptoten mathematisch sauber erklären.

Bemerkung 5.16. (waagerechte/horizontale Asymptoten)

- (1) Existiert $v := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, so kann der Graph von f für große x durch die Gerade $y = v$ angenähert werden. Diese Gerade heißt dann eine **waagerechte/horizontale Asymptote für $x \rightarrow +\infty$** .
- (2) Existiert $v := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, so kann der Graph von f für kleine x durch die Gerade $y = v$ angenähert werden. Diese Gerade heißt dann eine **waagerechte/horizontale Asymptote für $x \rightarrow -\infty$** .

Betrachten wir zwei Beispiele für Funktionen mit waagerechten Asymptoten.

Beispiel 5.17. (waagerechte/horizontale Asymptoten)

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, hat die waagerechte/horizontale Asymptote $y = 0$ für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$, denn wir haben

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Der Graph dieser Funktion ist im linken Bild in Abbildung 5.2 gezeichnet.

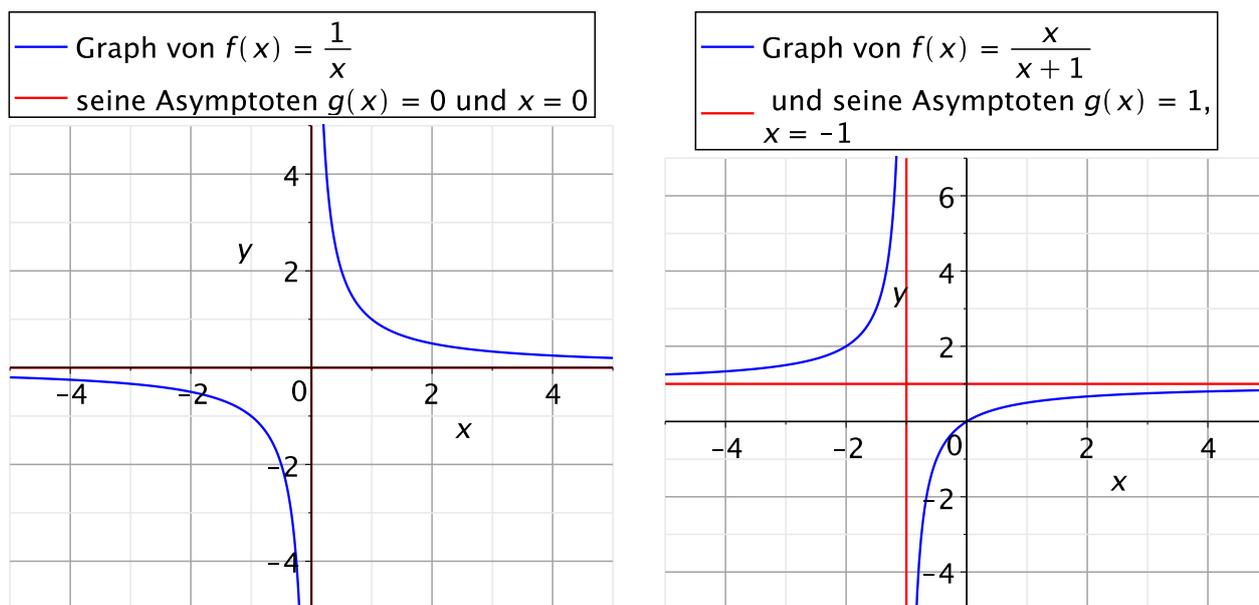


Abb. 5.2: Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, mit seinen Asymptoten (in rot) ist im linken Bild gezeichnet, und der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x/(x+1)$, mit seinen Asymptoten (in rot) ist im rechten Bild gezeichnet.

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x}{x+1},$$

hat die waagerechte/horizontale Asymptote $y = 1$ für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1) - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1.$$

Der Graph dieser Funktion ist im rechten Bild in Abbildung 5.2 gezeichnet.

Nun definieren wir einseitige Grenzwerte.

Definition 5.18. (linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert)

Sei I ein Intervall, $u \in I$, $D = I \setminus \{u\}$ oder $D = I$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Sei $I_- := I \cap]-\infty, u[\neq \emptyset$, d.h. u ist nicht der linke Randpunkt von I . f hat in u den **linksseitigen Grenzwert** $v \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge

$(u_n)_{n \geq n_0}$ in I_- gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

(Man betrachtet also nur Folgen $(u_n)_{n \geq n_0}$, die **von links** (bzw. **von unten**) gegen u streben.) Man schreibt dann

$$\lim_{x \nearrow u} f(x) = v.$$

(2) Sei $I_+ := I \cap]u, +\infty[\neq \emptyset$, d.h. u ist nicht der rechte Randpunkt von I . f hat in u den **rechtsseitigen Grenzwert** $v \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in I_+ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

(Man betrachtet also nur Folgen $(u_n)_{n \geq n_0}$, die **von rechts** (bzw. **von oben**) gegen u streben.) Man schreibt dann

$$\lim_{x \searrow u} f(x) = v.$$

Betrachten wir einige Beispiele für linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte.

Beispiel 5.19. (linkseitige und rechtsseitige Grenzwerte)

(a) $\lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} = 0$

(b) $\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$ und $\lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$ (vgl. Beispiel 5.3 (b))

(c) $\lim_{x \searrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht, denn:

$$\lim_{x \searrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sin(y),$$

und dieser Grenzwert existiert nach Beispiel 5.15 (b) nicht.

Was ist der Zusammenhang zwischen dem Grenzwert, dem linksseitigen Grenzwert, dem rechtsseitigen Grenzwert und der Stetigkeit in einem Punkt $x = u$?

Hilfssatz 5.20. (links-/rechtsseitige Grenzwerte und Stetigkeit)

Sei I ein offenes Intervall, $u \in I$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Falls $D = I$ oder $D = I \setminus \{u\}$, so **existiert** $\lim_{x \rightarrow u} f(x)$ **genau dann, wenn** $\lim_{x \nearrow u} f(x)$ und $\lim_{x \searrow u} f(x)$ beide existieren und übereinstimmen. Es gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_{x \nearrow u} f(x) = \lim_{x \searrow u} f(x).$$

- (2) Falls $D = I$ ist, so ist f **stetig in u genau dann, wenn** gilt

$$\lim_{x \nearrow u} f(x) = f(u) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow u} f(x) = f(u).$$

Betrachten wir ein Beispiel für die Anwendung von Hilfssatz 5.20.

Beispiel 5.21. (Anwendung von Hilfssatz 5.20)

- (a) Die Funktion $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 5.3 (b)) ist nicht stetig in $x = 0$, weil gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \text{sgn}(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \text{sgn}(x). \quad (5.4)$$

An (5.4) sehen wir auch, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$ nicht existiert.

- (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x \leq 1, \\ x^2 & \text{für } x > 1. \end{cases}$

In allen Punkten $x \in]-\infty, 1[$ ist die Funktion f als die Polynomfunktion $2x - 1$ definiert und somit auf $]-\infty, 1[$ stetig.

In allen Punkten $x \in]1, \infty[$ ist die Funktion f als die Polynomfunktion x^2 definiert und somit auf $]1, \infty[$ stetig.

In $x = 1$ gelten $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, und

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Also gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

und nach Hilfssatz 5.20 (2) ist f in $x = 1$ stetig.

Also ist f auf ganz \mathbb{R} stetig.

Zuletzt definieren wir noch uneigentliche Grenzwerte von Funktionen.

Definition 5.22. (uneigentliche einseitige Grenzwerte)

Sei I ein Intervall, $u \in I$, $D = I \setminus \{u\}$ oder $D = I$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Es gelte $I_- := I \cap]-\infty, u[\neq \emptyset$. Wir schreiben $\lim_{x \nearrow u} f(x) = +\infty$, wenn für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in I_- gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

- (2) Es gelte $I_- := I \cap]-\infty, u[\neq \emptyset$. Wir schreiben $\lim_{x \nearrow u} f(x) = -\infty$, wenn für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in I_- gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

- (3) Es gelte $I_+ := I \cap]u, +\infty[\neq \emptyset$. Wir schreiben $\lim_{x \searrow u} f(x) = +\infty$, wenn für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in I_+ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

- (4) Es gelte $I_+ := I \cap]u, +\infty[\neq \emptyset$. Wir schreiben $\lim_{x \searrow u} f(x) = -\infty$, wenn für jede Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ in I_+ gilt:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

Betrachten wir einige Beispiele zu uneigentlichen Grenzwerten.

Beispiel 5.23. (uneigentliche einseitige Grenzwerte)

(a) $\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{1-x} = +\infty$ und $\lim_{x \searrow 1} \frac{1}{1-x} = -\infty$

(b) $\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ und $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

(c) $\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = -\infty$

Mit dem Begriff des uneigentlichen Grenzwertes einer Funktion f in einem Punkt $x = u$ können wir nun vertikale Asymptoten einer Funktion mathematisch sauber

definieren.

Bemerkung 5.24. (vertikale/senkrechte Asymptoten)

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 5.22. Hat eine Funktion f einen der folgenden uneigentlichen einseitigen Grenzwerte in einem Punkt $x = u$,

$$\lim_{x \nearrow u} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \nearrow u} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \searrow u} f(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \searrow u} f(x) = -\infty,$$

so hat f in $x = u$ eine **vertikale/senkrechte Asymptote**.

Betrachten wir zum Abschluss zwei Beispiele für Funktionen mit vertikalen Asymptoten.

Beispiel 5.25. (vertikale/senkrechte Asymptoten)

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, hat in $x = 0$ eine vertikale/senkrechte Asymptote, denn wir haben

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Der Graph dieser Funktion ist im linken Bild in Abbildung 5.2 gezeichnet.

- (b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x+1},$$

hat in $x = -1$ eine vertikale/senkrechte Asymptote, denn wir haben

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{x}{x+1} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow -1} \frac{x}{x+1} = -\infty.$$

Der Graph dieser Funktion ist im rechten Bild in Abbildung 5.2 gezeichnet.

- (c) $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x = 0$ eine vertikale/senkrechte Asymptote, denn es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = -\infty.$$

5.4 Wichtige Sätze über stetige Funktionen

Wir beginnen mit dem Zwischenwertsatz.

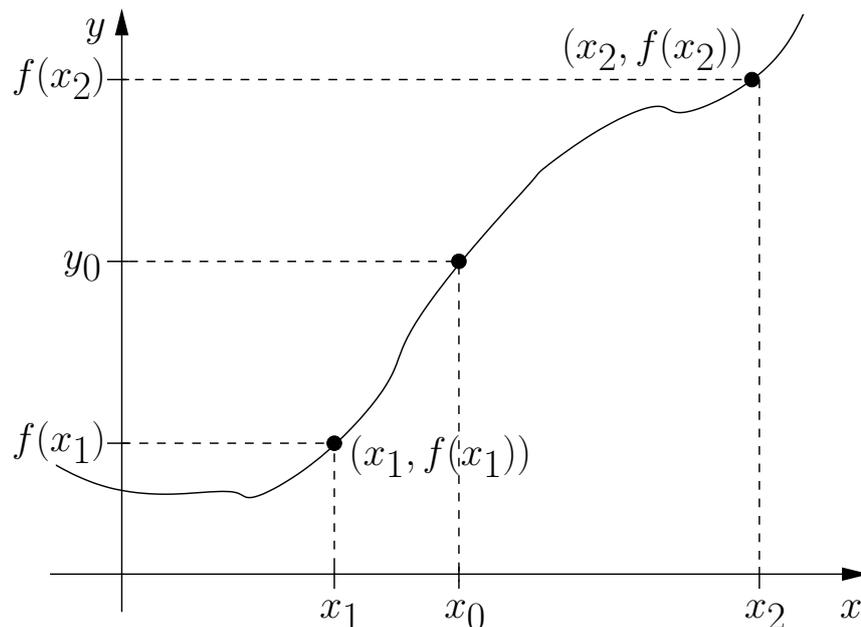


Abb. 5.3: Veranschaulichung des Zwischenwertsatzes: Für x aus dem Intervall $]x_1, x_2[$ treten wegen der Stetigkeit alle Werte zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ als Funktionswerte auf, denn der Graph verbindet die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

Satz 5.26. (Zwischenwertsatz)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Seien $x_1, x_2 \in I$, und y_0 erfülle $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$. Dann gibt es ein $x_0 \in I$ zwischen x_1 und x_2 mit $f(x_0) = y_0$.

Der Zwischenwertsatz erklärt sich durch die Anschauung für Stetigkeit:

Wir nehmen hier $x_1 < x_2$ an; der Fall $x_2 < x_1$ ist analog. Bei einer stetigen Funktion f auf einem Intervall I ist die Veranschaulichung des Graphen eine durchgehende Kurve. Diese durchgehende Kurve verbindet die Funktionswerte $f(x_1)$ für $x = x_1$ und $f(x_2)$ für $x = x_2$, wenn x alle Werte aus dem Intervall $[x_1, x_2]$ durchläuft (siehe auch Abbildung 5.3). Daher müssen aber alle Werte y zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ als Funktionswerte für ein passendes $x \in]x_1, x_2[$ auftreten; ansonsten hätte der Graph der Funktion eine Unstetigkeitsstelle.

Betrachten wir zwei Beispiele für die Anwendung des Zwischenwertsatzes.

Beispiel 5.27. (Anwendung des Zwischenwertsatzes)

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{\sqrt{1+x^2}} - \cos(x),$$

ist stetig in \mathbb{R} . Besitzt die Gleichung $f(x) = 2$ (mindestens) eine Lösung?

$$f(0) = e^{\sqrt{1+0}} - \cos(0) = e - 1 < 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}} - 0 = e^{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}} > e^1 = e > 2.$$

Also gilt für $y = 2$, dass $f(0) = e - 1 < 2 < e < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Gleichung $f(x) = 2$ daher eine Lösung $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Beispiel 5.28. (Lösen einer Fixpunktgleichung)

Wir wollen die Frage beantworten, ob die Gleichung $x = \cos(x)$ (mindestens) eine Lösung $x \in [0, \pi]$ besitzt? Falls die Gleichung eine Lösung $x^* \in [0, \pi]$ besitzt wird dieser Punkt von $\cos(x)$ auf sich selbst abgebildet: $\cos(x^*) = x^*$. Man nennt einen Punkt mit dieser Eigenschaft daher auch einen sogenannten „Fixpunkt“ der Funktion $\cos(x)$. („Der Punkt bleibt „fix“/unverändert unter der Funktion f .“)

Um die gestellte Frage zu beantworten, transformieren wir unser Problem:

$$x = \cos(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x - \cos(x) = 0.$$

Wir definieren uns die Funktion

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x - \cos(x),$$

und suchen nun die Nullstellen dieser Funktion, also die Punkte x_0 mit $f(x_0) = 0$. Die Funktion f ist auf $[0, \pi]$ stetig.

Nun gilt aber

$$f(0) = 0 - \cos(0) = -1,$$

$$f(\pi) = \pi - \cos(\pi) = \pi - (-1) = \pi + 1.$$

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt $f(x)$ für $x \in]0, \pi[$ alle Werte zwischen $f(0) = -1$ und $f(\pi) = \pi + 1$ an. Insbesondere wird der Wert $0 \in]-1, \pi + 1[$ als Funktionswert angenommen, d.h. es gibt ein $x^* \in]0, \pi[$ mit $f(x^*) = 0$ oder äquivalent dazu $x^* = \cos(x^*)$.

Wir halten noch zwei Folgerungen aus dem Zwischenwertsatz fest.

Folgerung 5.29. (aus dem Zwischenwertsatz)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Dann gelten:

- (1) $f(I)$ ist ein Intervall (oder enthält nur einen Punkt).
- (2) f ist **injektiv**. \Longleftrightarrow f ist **streng monoton**.

Als letztes Resultat lernen wir den Satz über die Existenz des Minimums und Maximums einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall kennen.

Definition 5.30. (Maximum und Minimum)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) $M \in \mathbb{R}$ heißt ein (**globales**) **Maximum** von f , wenn

(i) $M = f(x_0)$ für ein $x_0 \in D$ und

(ii) $f(x) \leq M$ für alle $x \in D$ gilt.

Schreibweise: $\max_{x \in D} f(x) := M$

(2) $m \in \mathbb{R}$ heißt ein (**globales**) **Minimum** von f , wenn

(i) $m = f(x_0)$ für ein $x_0 \in D$ und

(ii) $f(x) \geq m$ für alle $x \in D$ gilt.

Schreibweise: $\min_{x \in D} f(x) := m$

Das Minimum bzw. das Maximum einer reellen Funktion (sofern diese existieren) sind der kleinste bzw. der größte Funktionswert.

Satz 5.31. (Existenz von Minimum und Maximum einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Dann hat f ein **Maximum** und ein **Minimum**.

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 5.32. (Maximum und Minimum)

Die Funktion $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist stetig und hat die Bildmenge $B_f = [0, 4]$. Also hat f nach Satz 5.31 auf $[-1, 2]$ ein Minimum und ein Maximum. Genauer gilt

$$\min_{x \in [-1, 2]} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \max_{x \in [-1, 2]} f(x) = 4.$$

Bemerkung 5.33. (Erläuterungen zu Satz 5.31)

Die Voraussetzungen von Satz 5.31 müssen genau beachtet werden.

- (1) Der Definitionsbereich der Funktion muss ein **abgeschlossenes** Intervall, also ein Intervall der Form $[a, b]$, sein. Gehört ein Randpunkt (oder beide) nicht zum Definitionsbereich, so gilt Satz 5.31 im Allgemeinen nicht, wie

das folgende Beispiel zeigt:

$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, ist stetig und hat die Bildmenge $B_f = f(]0, 1]) = [1, \infty[$. Daher ist f auf $]0, 1]$ unbeschränkt und hat kein Maximum.

- (2) Auch auf die **Stetigkeit** von f kann nicht verzichtet werden, wie man an dem folgenden Beispiel sieht:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{wenn } x \in]0, 1], \end{cases}$$

ist nicht stetig in $x = 0$. Wir finden die Bildmenge $B_f = f([0, 1]) = [1, \infty[$. Daher ist f auf $[0, 1]$ unbeschränkt (d.h. die Beträge der Funktionswerte von f werden beliebig groß) und hat kein Maximum.

Differenzierbarkeit

In Teilkapitel 6.1 führen wir zunächst den Begriff der Ableitung einer Funktion ein und lernen diese mit dem Differentialquotienten zu berechnen. Hat eine Funktion in einem Punkt x_0 eine Ableitung, so nennen wir sie in x_0 differenzierbar. In Teilkapitel 6.2 lernen wir dann die Regeln zur Berechnung der Ableitung der Summe, des Produkts, des Quotienten und der Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen kennen. Die letzten drei Regeln werden mit den Namen Produktregel, Quotientenregel bzw. Kettenregel bezeichnet.

In Teilkapitel 6.3 werden die ersten Resultate zu lokalen Extrema, also lokalen Minima oder lokalen Maxima, einer Funktion vorgestellt. In Teilkapitel 6.4 wird der Mittelwertsatz der Differentialrechnung eingeführt. Dieser erlaubt viele nützliche Folgerungen: So können wir mit ihm z.B. das Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion mit Hilfe ihrer ersten Ableitung charakterisieren. In Teilkapitel 6.5 lernen wir die sehr nützlichen Regeln von de l'Hôpital zur Grenzwertbestimmung von Quotienten von Funktionen in speziellen Punkten kennen.

In Teilkapitel 6.6 werden höhere Ableitungen eingeführt und mit diesen der Satz von Taylor formuliert. Der Satz von Taylor stellt besonders in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ein wichtiges Hilfsmittel dar, um komplizierte Funktionen durch ein Polynom niederen Grades angenähert darzustellen.

In Teilkapitel 6.7 lernen wir schließlich ein hinreichendes Kriterium zur Charakterisierung lokaler Extrema mit Hilfe der ersten und der zweiten Ableitung einer Funktion kennen.

6.1 Die Ableitung

Definition 6.1. (differenzierbare Funktion und Ableitung)

Sei I ein offenes Intervall. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in I$.

(1) f heißt **differenzierbar in** x_0 , wenn der Grenzwert

$$\frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (6.1)$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt dann die **Ableitung von f in x_0** .

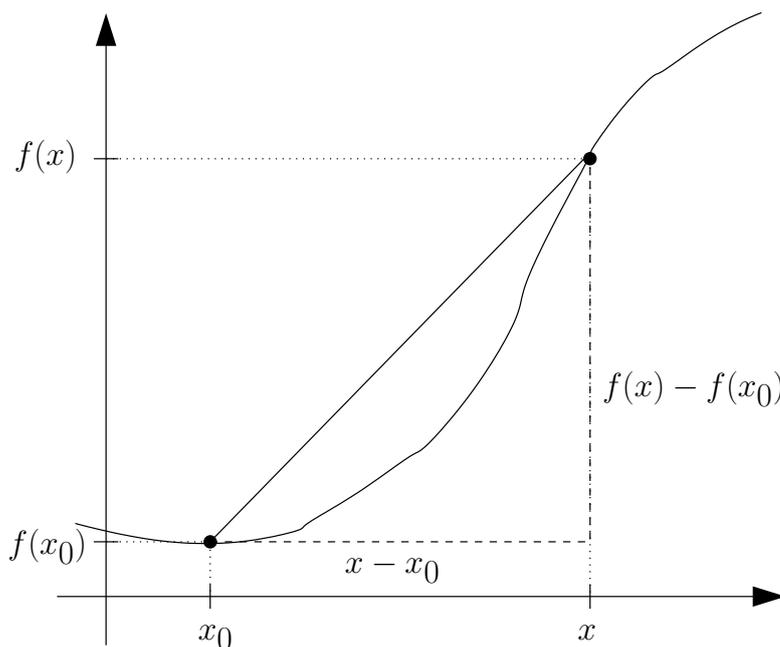
(2) f heißt **differenzierbar in I** , wenn f in jedem Punkt von I differenzierbar ist. $f'(x)$ ist dann für jedes $x \in I$ erklärt und liefert die Funktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, genannt die **Ableitung von f** .

Wie in der Abbildung rechts illustriert, ist der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Für $x \rightarrow x_0$ nähert sich der Differenzenquotient der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an, sofern diese Tangente existiert.



In der Nähe von x_0 lässt sich f dann durch die Tangente approximieren, d.h. annähern, (lineare Approximation).

$$f(x_0 + t) \approx f(x_0) + t f'(x_0) \quad \text{für kleines } t \in \mathbb{R}.$$

Man bezeichnet

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

jeweils als den **Differentialquotienten von f in x_0** .

Dass die beiden Grenzwerte in (6.1) übereinstimmen, sieht man, indem man $h := x - x_0$ und damit $x = x_0 + h$ setzt. Dann geht $x \rightarrow x_0$ über in $h \rightarrow 0$. Das h spielt die Rolle des in der Physik und der Ingenieurwissenschaften üblichen Δx .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 6.2. (Berechnung der Ableitung mit Differentialquotienten)

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, und $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0$$

$$\implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

$$\implies f \text{ ist differenzierbar in } x_0 \text{ und } f'(x_0) = 2x_0.$$

Da f in jedem x_0 differenzierbar ist, finden wir als Ableitungsfunktion:

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x.$$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x$, und $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$\implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

$$\implies f \text{ ist differenzierbar in } x_0 \text{ und } f'(x_0) = 1.$$

Da f in jedem x_0 differenzierbar ist, finden wir als Ableitungsfunktion:

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1.$$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, und $x_0 = 0$

Die Betragsfunktion f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn (vgl. Übungszettel) der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{existiert nicht.}$$

(d) Die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus sind differenzierbar auf ganz \mathbb{R} , und es gilt (ohne Nachweis):

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Zuletzt beweisen wir noch einen interessanten Satz.

Satz 6.3. (differenzierbar in $x_0 \implies$ stetig in x_0)

Seien I ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann gilt:

$$f \text{ ist differenzierbar in } x_0. \quad \implies \quad f \text{ ist stetig in } x_0.$$

Beweis von Satz 6.3: Sei f differenzierbar in x_0 und sei $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{für } x \neq x_0, \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Da $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 = r(x_0)$ ist, ist r stetig in x_0 .

Durch Auflösen von (6.2) für $x \neq x_0$ nach $f(x)$ findet man

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) &\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + r(x) \\ \iff f(x) &= f(x_0) + [f'(x_0) + r(x)](x - x_0), \end{aligned}$$

und diese Gleichung gilt auch für $x = x_0$, da

$$f(x_0) = f(x_0) + [f'(x_0) + r(x_0)] \underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0}$$

ist. Somit gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + [f'(x_0) + r(x)](x - x_0). \quad (6.3)$$

Da r stetig in x_0 ist, folgt aus (6.3), dass auch f stetig in x_0 ist. \square

Die **Umkehrung des obigen Satzes** ist im Allgemeinen **falsch!** Beispielsweise ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ stetig, aber sie ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar (nach Beispiel 6.2 (c)).

6.2 Rechenregeln für Ableitungen

In diesem Teilkapitel lernen wir wichtige Rechenregeln für die Ableitung kennen. Die erste Gruppe von Rechenregeln beschäftigt sich damit, wie man die Ableitung

der Summe, des Produkts bzw. des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen berechnet. Danach lernen wir die sehr wichtige Kettenregel kennen, mit der man die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen differenzieren kann.

Satz 6.4. (Rechenregeln für die Ableitung)

Sei I ein offenes Intervall. Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ **differenzierbar in** $x_0 \in I$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

(1) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\alpha \cdot f = \alpha f$ **differenzierbar in** x_0 , und es gilt

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0).$$

(2) $f + g$ **ist differenzierbar in** x_0 , und es gilt

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(3) $f \cdot g$ **ist differenzierbar in** x_0 , und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad (\text{Produktregel})$$

(4) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist f/g **differenzierbar in** x_0 , und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \quad (\text{Quotientenregel})$$

Wir beweisen Satz 6.4, weil der Beweis die nicht offensichtlichen Formeln der Produkt und der Quotientenregel transparenter macht und das Verständnis verbessert.

Beweis von Satz 6.4:

(1) Wir berechnen die Ableitung von αf in x_0 mit dem Differenzenquotienten:

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha f'(x_0),$$

wobei wir im letzten Schritt genutzt haben, dass f in x_0 differenzierbar ist. Also ist αf differenzierbar in x_0 und $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

(2) Wir berechnen die Ableitung von $f + g$ in x_0 mit dem Differenzenquotienten:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) + g'(x_0),$$

wobei wir genutzt haben, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Also ist $f + g$ differenzierbar in x_0 , und die Ableitung in x_0 ist $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(3) Wir berechnen die Ableitung von $f \cdot g$ in x_0 mit dem Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. (Bei der Grenzwertbildung haben auch genutzt, dass g nach Satz 6.3 stetig in x_0 ist und dass somit $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)$ gilt.) Also ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 , und die Ableitung in x_0 ist

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(4) Aussage zeigt man ähnlich wie Aussage (3). □

Betrachten wir nun diverse Beispiele für die Anwendung der Rechenregeln aus Satz 6.4.

Beispiel 6.5. (Rechenregeln für die Ableitung)

(a) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := x^k$. Dann ist f_k differenzierbar und

$$f_k'(x) = kx^{k-1}.$$

Nachweis:

$$f_1(x) = x \implies f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^0 \quad (\text{nach Beispiel 6.2 (b)})$$

$$f_2(x) = x^2 = x \cdot x \implies f_2'(x) \stackrel{\text{(PR)}}{=} (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

(nach Beispiel 6.2 (b))

$$f_3(x) = x^3 = x^2 \cdot x$$

$$\implies f'_3(x) \stackrel{\text{(PR)}}{=} (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

(nach Beispiel 6.2 (b) und $f'_2(x) = 2x$)

⋮

$$f_{k+1}(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$$

$$\implies f'_{k+1}(x) \stackrel{\text{(PR)}}{=} (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$$

(nach Beispiel 6.2 (b) und $f'_k(x) = kx^{k-1}$),

wobei (PR) für Produktregel steht. □

(b) Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, eine reelle Polynomfunktion vom Grad

$n \geq 1$. Dann ist p nach Beispiel (a) und den Rechenregeln in Satz 6.4 in ganz \mathbb{R} differenzierbar, und es gilt

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}.$$

Insbesondere ist p' ebenfalls eine reelle Polynomfunktion mit dem Grad $\text{Grad}(p') = \text{Grad}(p) - 1$.

(c) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $g_k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k(x) := x^{-k} = \frac{1}{x^k}$. Dann ist g_k in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und

$$g'_k(x) = -k x^{-k-1} = -\frac{k}{x^{k+1}}.$$

Dieses folgt mit der Quotientenregel und Beispiel (a):

$$\begin{aligned} g'_k(x) &= \left(\frac{1}{x^k} \right)' = \frac{(1)' \cdot x^k - 1 \cdot (x^k)'}{(x^k)^2} = \frac{0 \cdot x^k - 1 \cdot k x^{k-1}}{(x^k)^2} \\ &= \frac{-k x^{k-1}}{x^{2k}} = -k x^{k-1} \cdot x^{-2k} = -k x^{k-1-2k} = -k x^{-k-1} \end{aligned}$$

(d) Ebenfalls mit der Quotientenregel sieht man, dass rationale Funktionen in ihrem maximalen Definitionsbereich differenzierbar sind. Die Ableitung ist wieder eine rationale Funktion.

(e) Betrachten wir die Tangensfunktion:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für } x \in D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$$

Mit der Quotientenregel folgt: \tan ist auf D_{\tan} differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} & \text{jeweils für } x \in D_{\tan}. \\ 1 + \tan^2(x) \end{cases}\end{aligned}$$

Nun führen wir die Kettenregel zum Differenzieren von verketteten Funktionen ein.

Satz 6.6. (Kettenregel)

Seien I, J offene Intervalle. Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(I) \subseteq J$. Ist f **differenzierbar in** $x_0 \in I$ und ist g **differenzierbar in** $f(x_0) \in J$, so ist $g \circ f$ **differenzierbar in** x_0 und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}.$$

Beweisidee für Satz 6.6: Wir formen den Differenzenquotienten wie folgt um:

$$\begin{aligned}\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) f'(x_0).\end{aligned}$$

Der mit einem Ausrufungszeichen gekennzeichnete Schritt und die nachfolgende Grenzwertbildung müssen allerdings sauber begründet werden und setzen voraus, dass $f(x) \neq f(x_0)$ für alle x dicht bei x_0 gilt. \square

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 6.7. (Kettenregel)

(a) Betrachten wir $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := e^{-x^2}$. Dann ist

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{-x^2}$$

mit den beiden Funktionen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) := e^y, \quad \text{und} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := -x^2,$$

und es sind $g'(y) = e^y$ und $f'(x) = -2x$. Nach der Kettenregel gilt:

$$h'(x) = \underbrace{e^{-x^2}}_{=g'(f(x))} \cdot \underbrace{(-2x)}_{=f'(x)} = -2x e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Betrachten wir $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

Dann ist

$$\sinh(x) = k(x) - (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\text{mit} \quad k(x) := \frac{1}{2}e^x, \quad g(y) := \frac{1}{2}e^y, \quad f(x) := -x,$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}e^x, \quad g'(y) = \frac{1}{2}e^y, \quad f'(x) = -1,$$

und nach der Kettenregel gilt:

$$\sinh'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}e^x}_{=k'(x)} - \underbrace{\frac{1}{2}e^{-x}}_{=g'(f(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{=f'(x)} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analog zeigt man $\cosh'(x) = \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 6.8. (mehrfache Anwendung der Kettenregel)

(a) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$. Dann ist

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{mit} \quad g(y) := \sin(y), \quad f(x) := \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$g(y) = \sin(y)$ ist in \mathbb{R} differenzierbar mit der Ableitung $g'(y) = \cos(y)$. Wenn $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ ebenfalls in \mathbb{R} differenzierbar ist, so folgt mit der Kettenregel

$$h'(x) = \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)}_{=g'(f(x))} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)'}_{=f'(x)}. \quad (6.4)$$

Die Funktion $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ ist wiederum eine verkettete Funktion:

$$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) \quad \text{mit} \quad u(y) := \frac{1}{y} = y^{-1}, \quad v(x) := x^2 + 1,$$

$$u'(y) = -\frac{1}{y^2} = -y^{-2}, \quad v'(x) = 2x.$$

Mit der Kettenregel finden wir

$$f'(x) = \underbrace{-(x^2 + 1)^{-2}}_{=u'(v(x))} \underbrace{2x}_{=v'(x)} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}. \quad (6.5)$$

Einsetzen von (6.5) in (6.4) liefert, dass h in \mathbb{R} differenzierbar ist mit der Ableitung

$$h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) \cdot \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Natürlich hätte man f' auch mit der Quotientenregel berechnen können.

(b) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \cos(e^{2x^2+1})$. Dann ist

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{mit} \quad g(y) := \cos(y), \quad f(x) := e^{2x^2+1}.$$

Die Funktion g ist auf \mathbb{R} differenzierbar, und f ist die Verkettung

$$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)), \quad \text{mit} \quad u(y) := \exp(y), \quad v(x) := 2x^2 + 1.$$

Als Verkettung der auf \mathbb{R} differenzierbaren Exponentialfunktion mit der auf \mathbb{R} differenzierbaren Polynomfunktion $2x^2 + 1$ ist f auf \mathbb{R} differenzierbar. Somit ist auch $h = g \circ f$ auf \mathbb{R} differenzierbar. Wir finden mit zweifacher Anwendung der Kettenregel

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = -\sin(e^{2x^2+1}) \cdot (e^{2x^2+1})'$$

$$= -\sin(e^{2x^2+1}) e^{2x^2+1} 4x = -4x e^{2x^2+1} \sin(e^{2x^2+1}).$$

Wir wollen uns nun überlegen, wie man bequem die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} einer streng monotonen differenzierbaren Funktion f berechnen kann, wenn man die Ableitung f' von f schon kennt.

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ nun streng monoton und stetig in I . Dann ist f injektiv (nach Hilfssatz 2.40). Mit Folgerung 5.29 folgt, dass die Bildmenge $J := f(I)$ ein Intervall ist, und somit wird $f : I \rightarrow J$ bijektiv. Also existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$, und es gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in I. \quad (6.6)$$

Falls f in $x_0 \in I$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$ und falls f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, so folgt mit der Kettenregel aus (6.6):

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) &= 1 && \iff && (f^{-1})'(f(x_0)) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ \iff & (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \end{aligned}$$

Diese Überlegungen liefern die Idee für den nachfolgenden Satz.

Satz 6.9. (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei I ein offenes Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweisidee für Satz 6.9: Da $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und somit injektiv ist, existiert für $y \in f(I)$ mit $y \neq y_0$ genau ein $x \neq x_0$ mit $f(x) = y$. Also können wir den Differenzenquotienten hinschreiben und finden durch Umformen:

$$\begin{aligned} \frac{(f^{-1})(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}, \end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ genutzt haben. \square

Betrachten wir einige Beispiele für die Anwendung des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Beispiel 6.10. (Ableitung der Umkehrfunktion)

(a) Für $y > 0$ gilt $\ln'(y) = \frac{1}{y}$.

Begründung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$, $f(x) := \exp(x) = e^x$, ist streng monoton wachsend und bijektiv und differenzierbar auf \mathbb{R} mit der Ableitung $f'(x) = \exp'(x) = e^x \neq 0$, und die Umkehrfunktion ist $f^{-1} = \ln$. Mit Satz 6.9 folgt, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} = \ln$ auf $]0, \infty[$ differenzierbar

ist mit der Ableitung

$$\ln'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\ln(y))} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}.$$

(b) Sei $g :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, $g(y) := \sqrt{y}$.

Die Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, $f(x) := x^2$, ist streng monoton wachsend und bijektiv mit der Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = g(y) = \sqrt{y}$. Weiter ist f differenzierbar für alle $x > 0$ mit der Ableitung $f'(x) = 2x$. Es gilt $f'(x) = 2x \neq 0$ für $x > 0$. Mit Satz 6.9 folgt, dass die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ in $]0, \infty[$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}y^{-1/2}.$$

Nachdem wir nun die Ableitung des natürlichen Logarithmus kennen, können wir nun auch die Ableitung von $h :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x^a$, mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.42) mit Hilfe der Kettenregel berechnen. (Bisher kennen wir nur die Fälle mit $a \in \mathbb{Z}$.)

Beispiel 6.11. (Kettenregel)

Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. Definition 2.42)

$$x^a := \exp(a \ln(x)) = e^{a \ln(x)}.$$

Mit der Kettenregel folgt für festes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass die Funktion

$$f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[, \quad f(x) := x^a = e^{a \ln(x)},$$

nach x differenzierbar ist und dass gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [\exp(a \ln(x))] = \exp(a \ln(x)) \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot a \cdot x^{-1} = a x^{a-1},$$

wobei wir $(a \ln(x))' = a \ln'(x) = a \cdot \frac{1}{x} = \frac{a}{x}$ genutzt haben. Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.

6.3 Lokale Extrema: notwendige Bedingung

In diesem Teilkapitel lernen wir die ersten Aussagen zu lokalen Extrema einer reellen Funktion f , genauer zu lokalen Maxima oder lokalen Minima, kennen. Wir

werden zuerst diese neuen Begriffe mit Hilfe der Funktionswerte von f charakterisieren. Dann lernen wir eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums an die erste Ableitung einer differenzierbaren Funktion f kennen. In Teilkapitel 6.7 werden wir später noch eine zusätzliche Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums kennenlernen, welche die zweite Ableitung einer (zweimal differenzierbaren) Funktion f benutzt. Weiter lernen wir den Satz von Rolle kennen, der ein nützliches Hilfsmittel darstellt.

Definition 6.12. (lokales Maximum/Minimum, lokales Extremum)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$, und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- (1) f hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum**, falls es ein offenes Intervall I gibt mit $x_0 \in I$ und

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in I \cap D.$$

- (2) f hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Minimum**, falls es ein offenes Intervall I gibt mit $x_0 \in I$ und

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in I \cap D.$$

- (3) f hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Extremum**, falls f dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.

Bevor wir einige Beispiele betrachten, halten wir in der nächsten Bemerkung den Zusammenhang mit dem bisherigen Begriff des (globalen) Maximums und (globalen) Minimums einer Funktion fest.

Bemerkung 6.13. (lokale und globale Minima/Maxima)

In Definition 5.30 haben wir die Begriffe des (globalen) Maximums und des (globalen) Minimums einer Menge kennengelernt. Unter dem **(globalen) Maximum** bzw. dem **(globalen) Minimum** einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (sofern diese existieren) versteht man den größten bzw. kleinsten Funktionswert. Ist $y_0 = f(x_0)$ ein (globales) Maximum bzw. ein (globales) Minimum von f , so hat f in x_0 auch ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum.

Umgekehrt gilt dieses im Allgemeinen **nicht**, d.h. lokale Maxima bzw. lokale Minima sind nur in seltenen Fällen auch globale Maxima bzw. globale Minima.

Betrachten wir nun einige Beispiele.

Beispiel 6.14. (lokale und globale Extrema)

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, hat in $x_0 = 0$ ein lokales und ein globales Minimum, denn es gilt

$$f(0) = 0 \leq x^2 = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-(x-1)^2}$, hat in $x_0 = 1$ ein lokales und ein globales Maximum, denn es gilt (weil $e^{-t} < 1$ für alle $t > 0$)

$$f(1) = e^0 = 1 \geq e^{-(x-1)^2} = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \sin(x)$, hat in $x_0 = 0$ ein lokales (aber kein globales Minimum), denn

$$f(0) = 0 \cdot \sin(0) = 0 \leq \underbrace{x \cdot \sin(x)}_{\geq 0} = f(x) \quad \text{für alle } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

(Wir haben hier genutzt, dass $\sin(x)$ und x für alle $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ das gleiche Vorzeichen haben.) Dass das Minimum nicht global ist sieht man z.B. an dem Funktionswert

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{3\pi}{2} < 0 = f(0).$$

Im nächsten Satz lernen wir eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für ein lokales Extremum kennen.

Satz 6.15. (lokales Extremum in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$)

Sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. (Da I keine Randpunkte hat, liegt x_0 im Inneren von I .) Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Bevor wir diesen wichtigen Satz beweisen, betrachten wir unsere vorigen Beispiele und machen wir uns an einem neuen Beispiel klar, warum aus $f'(x_0) = 0$ nicht folgt, dass f in x_0 ein lokales Extremum hat.

Beispiel 6.16. (lokales Extremum in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$)

- (a) Nach Beispiel 6.14 (a) hat die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, in $x_0 = 0$ ein lokales und ein globales Minimum. Es gilt $f'(x) = 2x$, und somit gilt in der Tat $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

- (b) Nach Beispiel 6.14 (b) hat die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-(x-1)^2}$, in $x_0 = 1$ ein lokales und ein globales Maximum. Es gilt mit der Kettenregel

$$f'(x) = e^{-(x-1)^2} \cdot (-2(x-1)) = -2(x-1)e^{-(x-1)^2},$$

und in der Tat gilt

$$f'(1) = -2 \cdot (1-1) \cdot e^{-(1-1)^2} = -2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0.$$

- (c) Nach Beispiel 6.14 (c) hat die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \sin(x)$, in $x_0 = 0$ ein lokales (aber kein globales) Minimum. Es gilt mit der Produktregel

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) - x \cos(x),$$

und wir finden in der Tat $f'(0) = \sin(0) - 0 \cdot \cos(0) = 0 - 0 = 0$.

- (d) Unser nachfolgendes Beispiel zeigt, dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ **nur notwendig aber nicht hinreichend** für die Existenz eines lokalen Extremums ist. In anderen Worten: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt **nicht**, dass die Funktion ein lokales Extremum in x_0 hat.

Betrachten wir hierzu die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$. Dann gilt $f'(x) = 3x^2$ und $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, aber wegen

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 < 0 = f(0) < x^3 = f(x) \quad \text{für alle } x \in]0, \infty[$$

kann f kein lokales Extremum in $x_0 = 0$ haben (denn jedes noch so kleine Intervall $] -\varepsilon, \varepsilon[$ um 0 enthält sowohl Punkte x , für die negative Funktionswerte auftreten, als auch Punkte x , für die positive Funktionswerte auftreten).

Beweis von Satz 6.15: Wir betrachten nur den Fall eines lokalen Maximums. Den Fall eines lokalen Minimums behandelt man analog.

Die Funktion f habe in x_0 ein lokales Maximum. Dann gilt für alle $x \in D \cap I$ (wobei I ein genügend kleines offenes Intervall um x_0 ist), dass $f(x) \leq f(x_0)$ ist. Da f differenzierbar ist, gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \geq 0,$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} \leq 0.$$

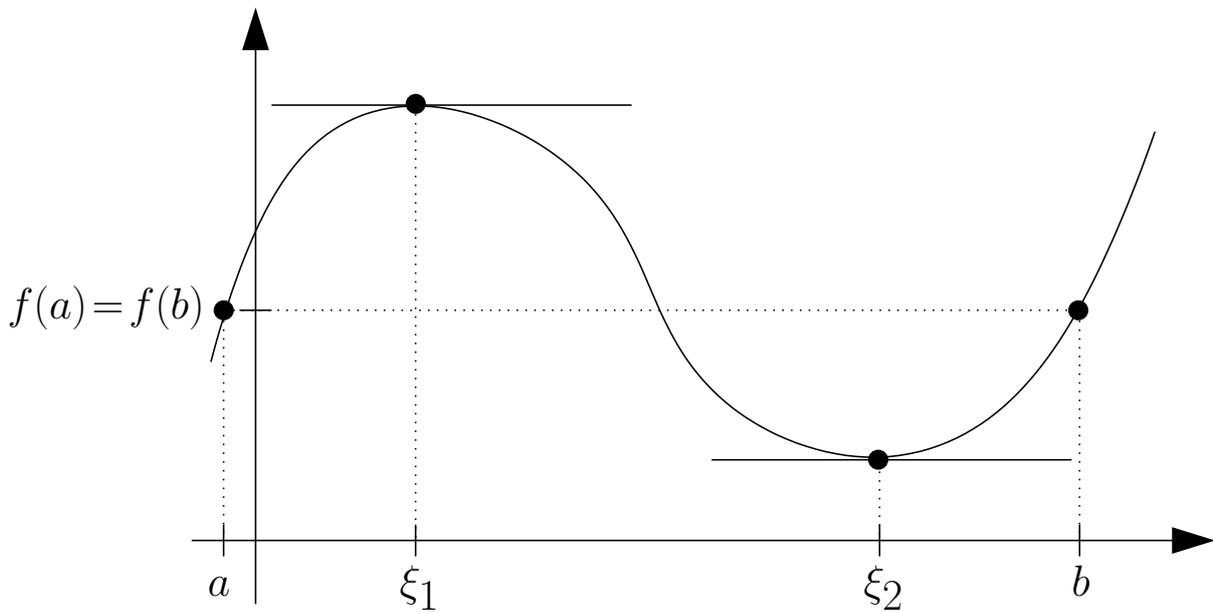


Abb. 6.1: Veranschaulichung des Satzes von Rolle.

Aus $f'(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) \leq 0$ folgt $f'(x_0) = 0$. □

Nun lernen wir den Satz von Rolle kennen.

Satz 6.17. (Satz von Rolle)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis von Satz 6.17: Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: f sei eine konstante Funktion. Dann ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Fall 2: f sei nicht konstant. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, hat f auf $[a, b]$ ein (globales) Maximum und Minimum (nach Satz 5.31). Da $f(a) = f(b)$ und f nicht konstant ist, wird mindestens eines dieser Extrema in $]a, b[$ angenommen. Also existiert $\xi \in]a, b[$ so, dass $f(\xi)$ ein globales und damit auch lokales Extremum von f ist. Mit Satz 6.15 folgt $f'(\xi) = 0$. □

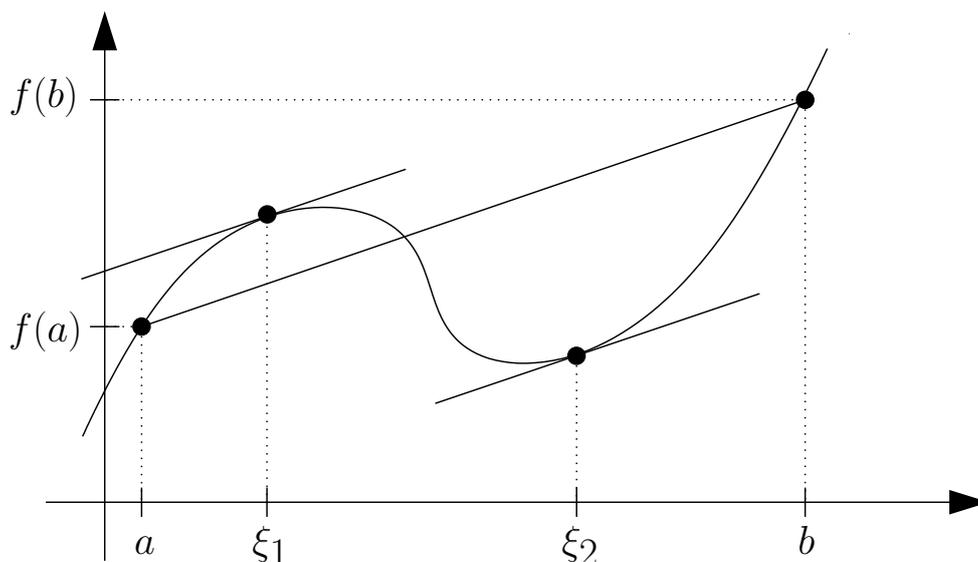


Abb. 6.2: Veranschaulichung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

6.4 Der Mittelwertsatz

Satz 6.18. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS))

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Funktion f sei stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (6.7)$$

Veranschaulichung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung: Betrachtet man die Sekante von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$, so findet man mindestens einen Punkt $\xi \in]a, b[$, in dem die Tangente parallel zu dieser Sekante ist (siehe Abbildung 6.2). Der Quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ist die Steigung der Sekante, also der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. $f'(\xi)$ ist die Steigung der Tangente in ξ .

Zu beachten ist, dass Satz 6.18 nur eine **Existenzaussage** ist, denn er garantiert uns nur die Existenz eines Punktes $\xi \in]a, b[$ mit Eigenschaft (6.7). Er gibt uns aber auch für eine konkrete Funktion und ein konkretes Intervall $]a, b[$ keinerlei Information darüber, welches der genaue Punkt ξ in (6.7) ist. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist daher besonders für theoretische Überlegungen nütz-

lich (d.h. zum Gewinnen weiterer Erkenntnisse über differenzierbare Funktionen), wie wir noch im Verlauf dieses Kapitels sehen werden. Man kann mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung auch nützliche Abschätzungen für konkrete Funktionen beweisen (siehe Beispiel 6.19).

Wir beweisen nun den Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Beweis von Satz 6.18: Es sei

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a), \quad x \in [a, b].$$

Dann ist h stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Außerdem gilt $h(a) = f(a) = h(b)$, da

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = f(a), \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es folgt die Behauptung durch Auflösen nach $f'(\xi)$. □

Betrachten wir ein Beispiel für die Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Beispiel 6.19. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Es gilt $|\sin(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:

Fall 1: Sei $x = 0$. Hier ist $|\sin(0)| = 0 \leq |0|$.

Fall 2: Sei $x \neq 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ξ zwischen x und 0 mit

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(\xi) = \cos(\xi).$$

Also gilt (durch Multiplizieren auf beiden Seiten mit x) $\sin(x) = \cos(\xi) \cdot x$ und somit

$$|\sin(x)| = |\cos(\xi) \cdot x| = \underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1} \cdot |x| \leq |x|.$$

Eine wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung sind die folgenden Charakterisierungen des Monotonieverhaltens (also Wachstumsverhaltens) einer differenzierbaren Funktion mit Hilfe ihrer ersten Ableitung.

Folgerung 6.20. (Monotonieverhalten und erste Ableitung)

Seien I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

- (1) $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. \iff f ist **konstant** auf I .
- (2) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. \iff f ist **monoton wachsend** auf I .
- (3) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$. \iff f ist **monoton fallend** auf I .
- (4) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. \implies f ist **streng monoton wachsend**
 ~~\iff~~ auf I .
- (5) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. \implies f ist **streng monoton fallend** auf I .
 ~~\iff~~

Die durchgestrichenen Folgepfeile \nLeftarrow in Folgerung 6.20 (4) und (5) bedeuten, dass die Folgerung mit \iff nicht gilt.

Man beweist die Aussagen in Folgerung 6.20 mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Bemerkung 6.21. (Folgerung aus dem Mittelwertsatz)

Da jede streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktion injektiv ist, folgt mit Hilfssatz 2.40 aus Folgerung 6.20 (4) und (5): Für jede auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung gilt:

$$f'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in I. \quad \implies \quad f \text{ ist injektiv.}$$

Erklärung: Ist f' stetig, so folgt aus $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, dass f' (wegen seiner Stetigkeit) keinen Vorzeichenwechsel haben kann. Also muss gelten $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. Mit Folgerung 6.20 (4) bzw. (5) folgt dann, dass f streng monoton und damit nach Hilfssatz 2.40 injektiv ist.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 6.22. (Anwendung von Folgerung 6.20)

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2 \quad \implies \quad f'(x) = 2x$

In $] -\infty, 0[$ ist f streng monoton fallend, da $f'(x) = 2x < 0$ für alle $x < 0$.

In $]0, \infty[$ ist f streng monoton wachsend, da $f'(x) = 2x > 0$ für alle $x > 0$.

$$(b) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^3 \quad \implies \quad f'(x) = 3x^2$$

Da $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, ist f in ganz \mathbb{R} monoton wachsend.

Aber: Obwohl $f'(0) = 0$ gilt, ist f in ganz \mathbb{R} sogar streng monoton wachsend und somit auch injektiv. Man sieht an diesem Beispiel, warum in Folgerung 6.20 (4) nicht die Rückrichtung „ \longleftarrow “ gelten kann.

$$(c) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sinh(x)$$

$$\implies \quad f'(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also ist \sinh in ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend.

6.5 Die Regeln von de l'Hôpital

Wir starten mit der **Motivation** für die Regeln von de l'Hôpital:

Sei I ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in I . Sei $x_0 \in I$. Gilt $g(x_0) \neq 0$, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

da der Quotient f/g in x_0 stetig ist.

Ist dagegen $g(x_0) = 0$, so kann man so nicht argumentieren.

Kommt man mit elementarem Umformen des Quotienten $f(x)/g(x)$ nicht weiter, kann die Differentialrechnung helfen, wie man an dem folgenden Beispiel sieht:

Wir möchten den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

berechnen, falls dieser existiert. Hier haben wir die Situation, dass für $x \rightarrow 0$ sowohl der Nenner als auch der Zähler gegen null streben. Weil $\sin(0) = 0$ ist und der Sinus auf ganz \mathbb{R} und damit insbesondere in $x_0 = 0$ differenzierbar ist, gilt dann aber

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Allgemeiner gilt die nachfolgende Regel, mit deren Hilfe sich viele Grenzwerte einfach berechnen lassen.

Satz 6.23. (erste Regel von de l'Hôpital)

Sei I ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$

differenzierbar (und damit stetig) in I mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$. Falls $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ist, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele zur Anwendung der ersten Regel von de l'Hôpital.

Beispiel 6.24. (Anwendung der ersten Regel von de l'Hôpital)

- (a) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, sofern er existiert. Hier liegt der Fall „0/0“ vor, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Wir finden mit der ersten Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1.$$

- (b) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$, sofern er existiert. Hier liegt der Fall „0/0“ vor, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0. \quad (6.8)$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x},$$

und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x}$ existiert nicht! Insofern hilft uns hier die erste Regel von de l'Hospital nicht weiter. Wir könnten aber den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$$

untersuchen (Kehrwert der vorigen Funktion). Hier liegt wegen (6.8) ebenfalls der Fall „0/0“ vor, und die erste Regel von de l'Hôpital liefert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Damit wissen wir nun auch, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ nicht existiert. (Es existieren in $x_0 = 0$ für $(e^x - 1)/x^2$ nur uneigentliche einseitige Grenzwerte.)

- (c) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, sofern er existiert. Hier liegt der Fall „0/0“ vor, da

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

Wir finden mit der ersten Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{1} = \frac{2 - 3}{1} = -1.$$

- (d) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$, sofern er existiert. Hier liegt der Fall „0/0“ vor, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Wir finden mit der ersten Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x}.$$

Nun befinden wir uns wieder in der Situation „0/0“, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

ist, und wir wenden die erste Regel von de l'Hôpital erneut an:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten also durch zweifache Anwendung der ersten Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- (e) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$, sofern er existiert. Hier liegt der Fall „0/0“ vor, da

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x + 1) = 1^3 - 2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0.$$

Wir finden mit der ersten Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 2x + 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{2x} = \frac{3 \cdot 1^2 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Eine **falsche** Anwendung der ersten Regel von de l'Hôpital wäre die folgende Argumentation gewesen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 2x + 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{2x} \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 2)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3, \end{aligned}$$

denn wir dürfen die erste Regel von de l'Hôpital nicht noch ein zweites mal anwenden, weil in

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{2x}$$

nicht der Fall „0/0“ vorliegt (da $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2) = 1$ ist).

Nun skizzieren wir noch den Beweis von Satz 6.23.

Beweis von Satz 6.23: Sei $x \in I$ mit $x \neq x_0$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe Satz 6.18) existieren ξ_1, ξ_2 zwischen x und x_0 mit

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_1) \quad \text{bzw.} \quad \frac{g(x)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(\xi_2),$$

wobei wir $f(x_0) = g(x_0) = 0$ genutzt haben. Der Quotient $f(x)/g(x)$ wird somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

$$\text{falls } a := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Dabei nutzen wir aus, dass für $x \rightarrow x_0$ das Intervall $]x, x_0[$ falls $x < x_0$ bzw. $]x_0, x[$ falls $x > x_0$ immer weiter zusammenschrumpft und somit im Grenzwert $x \rightarrow x_0$ die Zwischenstellen $\xi_1 = \xi_1(x)$ und $\xi_2 = \xi_2(x)$ jeweils gegen x_0 streben müssen. \square

Der nächste Satz hält einige Varianten der ersten Regel von de l'Hôpital fest für den Fall, dass man sich dem Punkt x_0 nur von unten oder nur von oben nähert.

Satz 6.25. (Varianten der ersten Regel von de l'Hôpital)

Seien $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

(1) Es gelte $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$. Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

(2) Es gelte $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$. Dann ist

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

Die Aussagen (1) bzw. (2) gelten sinngemäß auch für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, d.h. für $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$.

Wir lernen nun eine zweite Regel von de l'Hôpital kennen für den Fall, dass der Betrag des Nenners und der Betrag des Zählers jeweils gegen ∞ streben.

Satz 6.26. (zweite Regel von de l'Hôpital)

Seien $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

(1) Es gelte $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = \lim_{x \searrow a} |g(x)| = \infty$. Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

(2) Es gelte $\lim_{x \nearrow b} |f(x)| = \lim_{x \nearrow b} |g(x)| = \infty$. Dann ist

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

Die Aussagen (1) bzw. (2) gelten sinngemäß auch für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, d.h. für $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$.

Beispiel 6.27. (Anwendung der zweiten Regel von de l'Hôpital)

(a) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$, sofern er existiert. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\ln(x)| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty$$

liegt hier der Fall „ ∞/∞ “ vor. Nach der zweiten Regel von de l'Hôpital gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(b) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$, sofern er existiert. Hier haben wir den Fall eines Produkts zweier Funktionen, von denen eine gegen null und eine im Betrag gegen ∞ strebt, also hier

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0.$$

In solch einem Fall können wir das Produkt der beiden Funktionen immer als Quotient schreiben, bei dem der Zähler und der Nenner im Betrag gegen ∞ streben: Hier gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}.$$

Nun gilt für den Zähler und Nenner

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |e^x| = \infty,$$

und es liegt der Fall „ ∞/∞ “ vor. Mit der zweiten Regel von de l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0.$$

(*Bemerkung:* Wir hätten das Produkt der beiden Funktionen ebenso als Quotienten schreiben können, bei dem der Zähler und der Nenner gegen null streben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Allerdings hätte uns hier Satz 6.25 nicht zum Ziel geführt.)

- (c) Analog zu (b) können wir für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ durch wiederholte Anwendung der zweiten Regel von de l'Hôpital zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = k! \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

- (d) Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} x \ln(x)$, sofern er existiert. Hier haben wir den Fall eines Produkts zweier Funktionen, von denen eine gegen null und eine im Betrag gegen ∞ strebt, also hier

$$\lim_{x \searrow 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} |\ln(x)| = \infty.$$

Wir schreiben das Produkt wieder so um, dass der Fall „ ∞/∞ “ vorliegt:

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{1/x}, \quad \text{wobei nun} \quad \lim_{x \searrow 0} |\ln(x)| = \infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty.$$

Nach der zweiten Regel von de l'Hôpital finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} x \ln(x) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln(x))'}{(1/x)'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \searrow 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \searrow 0} -x = 0. \end{aligned}$$

6.6 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

In diesem Teilkapitel lernen wir Ableitungen „höherer Ordnung“ kennen, d.h. wenn man ein Funktion mehr f als einmal differenziert (sofern dies möglich ist). Wir berechnen also erst f' und danach $(f')'$. Dann ist $(f')' =: f''$ die zweite Ableitung der Funktion f . Weiter lernen wir den für Anwender sehr wichtigen Satz von Taylor kennen. Das Satz von Taylor gestattet es eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion angenähert durch eine Polynomfunktion vom Grad n (und von jedem Grad $\leq n$) darzustellen.

Definition 6.28. (höhere Ableitungen)

Sei I ein offenes Intervall, und seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Ist f differenzierbar in I und ist f' in x_0 differenzierbar, so heißt f **zweimal differenzierbar in x_0** .

$$f^{(2)}(x_0) := f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

heißt dann die **zweite Ableitung von f in x_0** . Ist f in jedem $x_0 \in I$ zweimal differenzierbar, so heißt f **zweimal differenzierbar in I** .

- (2) Allgemein heißt f **in x_0 k -mal differenzierbar**, wenn f in I $(k-1)$ -mal differenzierbar ist und $f^{(k-1)}$ in x_0 differenzierbar ist.

$$f^{(k)}(x_0) := (f^{(k-1)})'(x_0)$$

heißt dann die **k -te Ableitung von f in x_0** .

- (3) Man schreibt: $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$.

- (4) $\mathcal{C}^k(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal differenzierbar und } f^{(k)} \text{ ist stetig}\}$

ist die **Menge der in I k -mal stetig differenzierbaren Funktionen**.

(Anmerkung: „ \mathcal{C} “ steht hier für „continuous“ (englisch für „stetig“).) Man sagt dann für $f \in \mathcal{C}^k(I)$: f ist **k -mal stetig differenzierbar in I** .

- (5) $\mathcal{C}^\infty(I) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$ ist die Menge aller Funktionen, die zu **jedem $\mathcal{C}^k(I)$** gehören, d.h. die also **beliebig oft stetig differenzierbar** sind.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 6.29. (k -mal stetig differenzierbare Funktionen)

- (a) Alle Polynomfunktionen sind beliebig oft stetig differenzierbar. Sie gehören also zu $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- (b) Die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus, sowie die hyperbolischen Funktionen \sinh und \cosh gehören alle zu $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, also

$$\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

- (c) Der Logarithmus $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist beliebig oft stetig differenzierbar in $]0, \infty[$, also $\ln \in \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[)$.

Mit dem Satz von Taylor können wir eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion durch eine Polynomfunktion vom Grad n (und durch eine Polynomfunktion von jedem Grad $\leq n$) angenähert darstellen. Solche „Approximationen“ (Näherungen) komplizierter Funktionen durch eine Polynomfunktion spielen sowohl in der Mathematik als auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle.

Satz 6.30. (Satz von Taylor)

Seien I ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ und $x_0 \in I$. Dann existiert zu jedem $x \in I$ eine Stelle ξ_x zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k}_{=: T_n(x; x_0)} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1}}_{=: R_n(x; x_0) \text{ (Restglied)}}$$

Die Funktion $T_n(x; x_0)$ heißt n -tes **Taylorpolynom** um die **Entwicklungsstelle** x_0 . (Zu beachten ist, dass die Stelle ξ_x von x abhängt.)

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 6.31. (Anwendung des Satzes von Taylor)

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(x) = e^x$, ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(k)}(x) = \exp^{(k)}(x) = \exp(x) = e^x$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Satz von Taylor ist das n -te Taylorpolynom um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

$$T_n(x; 0) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \exp^{(k)}(0) (x - 0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

Das Restglied ist

$$R_n(x; 0) = \frac{1}{(n+1)!} \exp^{(n+1)}(\xi_x) (x - 0)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_x} x^{n+1}$$

mit einem ξ_x zwischen x und 0 .

Taylorische Formel für die Entwicklung von \exp um $x_0 = 0$: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein ξ_x zwischen x und 0 , so dass gilt

$$\exp(x) = e^x = T_n(x; 0) + R_n(x; 0) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_x} x^{n+1}. \quad (6.9)$$

Damit erhält man die folgende Fehlerabschätzung für die Qualität der Annäherung von $f(x) = \exp(x)$ durch sein n -tes Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$: Durch Umsortieren von (6.9) und bilden des Absolutbetrags auf beiden Seiten finden wir

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_x} x^{n+1}$$

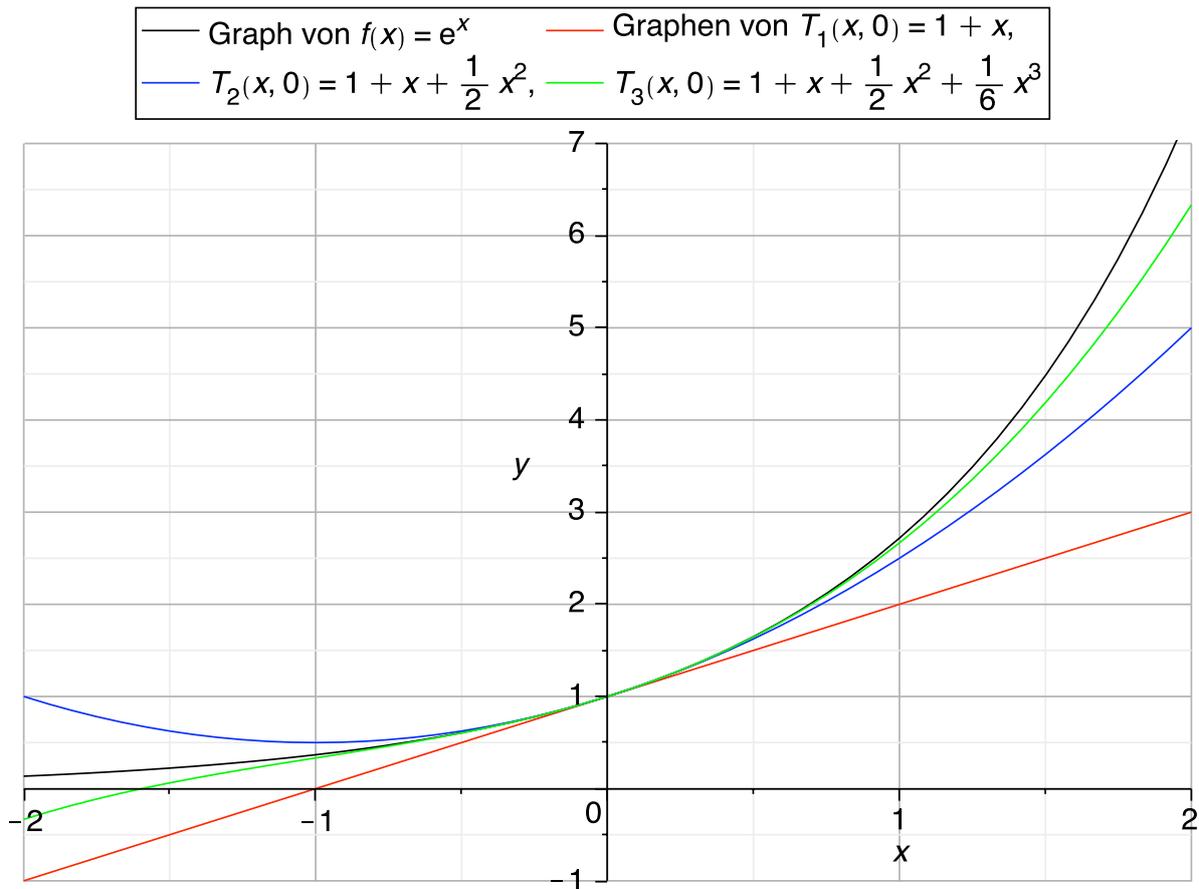


Abb. 6.3: Veranschaulichung der Graphen von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, (schwarz) und seinen n -ten Taylorpolynomen $T_n(x; 0)$ um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ für $n = 1$ (rot) und $n = 2$ (blau) und $n = 3$ (grün).

$$\Rightarrow \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_x} x^{n+1} \right|.$$

Für $|x| \leq 1$ (und somit auch $|\xi_x| \leq 1$, da ξ_x zwischen 0 und x liegt) folgt dann beispielsweise:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{|e^{\xi_x}|}_{\leq e^{|\xi_x|} \leq e^1} \underbrace{|x|^{n+1}}_{\leq 1} \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

In Abbildung 6.3 sind die Graphen der natürlichen Exponentialfunktion \exp und seiner n -ten Taylorpolynome um $x_0 = 0$ für $n = 1, 2, 3$ gezeichnet. Man sieht, dass bereits für $n = 3$ das Taylorpolynom für x dicht bei $x_0 = 0$ die Funktion $f(x) = \exp(x)$ sehr gut annähert.

- (b) Wir wollen alle Taylorpolynome von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$, um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ berechnen. Dazu brauchen wir vorab die Ablei-

tungen von $f(x) = \sin(x)$.

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x), \\ f^{(4)}(x) = \sin(x), \quad f^{(5)}(x) = \cos(x), \quad f^{(6)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(7)}(x) = -\cos(x),$$

und wir sehen, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(4k)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4k+1)}(x) = \cos(x), \\ f^{(4k+2)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos(x).$$

Damit finden wir

$$T_0(x; 0) = \frac{1}{0!} \sin(0) = 0, \\ T_1(x; 0) = T_0(x; 0) + \frac{1}{1!} \sin'(0) (x - 0)^1 \\ = 0 + \cos(0) x = x, \\ T_2(x; 0) = T_1(x; 0) + \frac{1}{2!} \sin''(0) (x - 0)^2 \\ = x + \frac{1}{2!} (-\sin(0)) x^2 = x, \\ T_3(x; 0) = T_2(x; 0) + \frac{1}{3!} \sin^{(3)}(0) (x - 0)^3 \\ = x + \frac{1}{3!} (-\cos(0)) x^3 = x - \frac{1}{3!} x^3, \\ T_4(x; 0) = T_3(x; 0) + \frac{1}{4!} \sin^{(4)}(0) (x - 0)^4 \\ = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} \sin(0) x^4 = x - \frac{1}{3!} x^3, \\ T_5(x; 0) = T_4(x; 0) + \frac{1}{5!} \sin^{(5)}(0) (x - 0)^5 \\ = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} \cos(0) x^5 = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5.$$

Allgemein gilt

$$T_{2m+2}(x; 0) = T_{2m+1}(x; 0) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

In Abbildung 6.4 sind die Graphen von \sin und seinen n -ten Taylorpolynome um $x_0 = 0$ für $n = 3, 5, 7$ gezeichnet. Man sieht, dass diese Taylorpolynome für x dicht bei $x_0 = 0$ die Funktion $f(x) = \sin(x)$ sehr gut annähern.

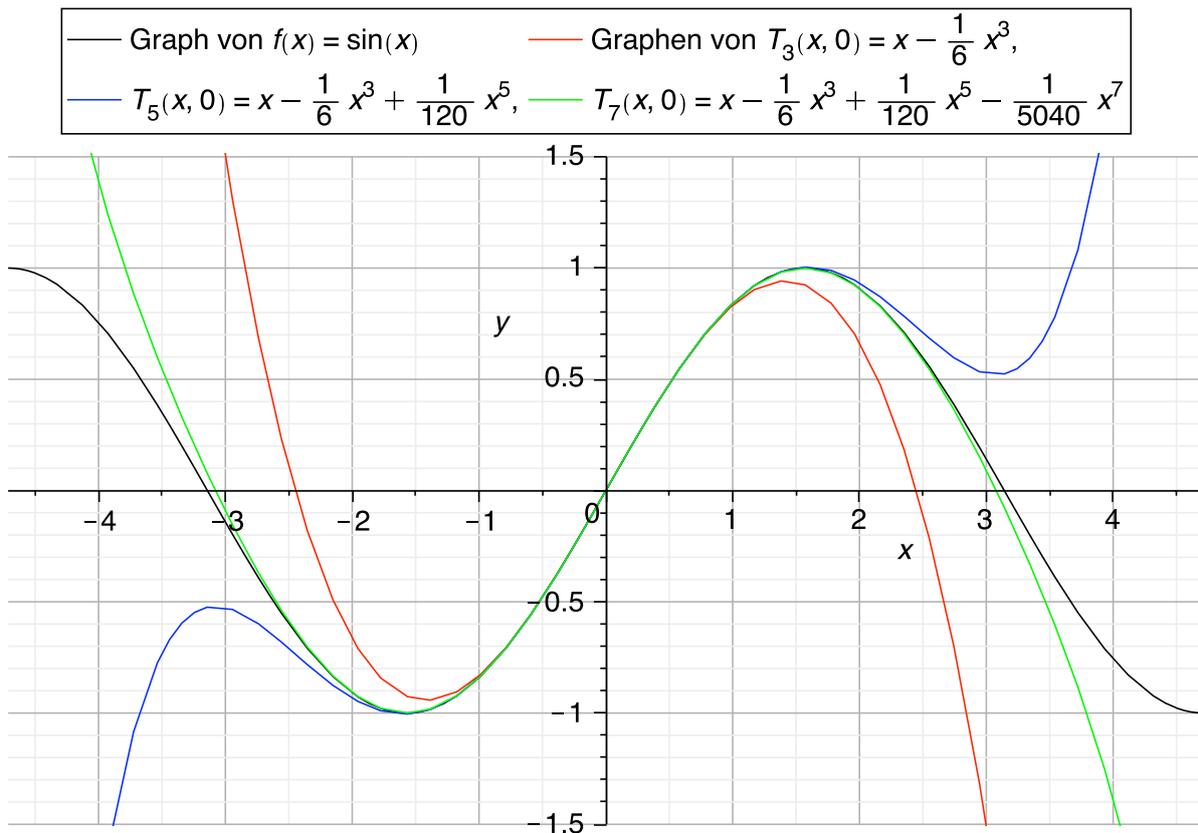


Abb. 6.4: Die Graphen von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$, (schwarz) und seinen Taylorpolynomen $T_n(x; 0)$ um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ vom Grad $n = 3$ (rot), $n = 5$ (blau) und $n = 7$ (grün).

- (c) Wir berechnen die ersten drei Taylorpolynome von $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, um die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

$$T_0(x; 1) = \frac{\sqrt{1}}{0!} (x - 1)^0 = 1,$$

$$T_1(x; 1) = T_0(x; 1) + \frac{1}{1!} \frac{1}{2\sqrt{1}} (x - 1)^1 = 1 + \frac{1}{2} (x - 1),$$

$$\begin{aligned} T_2(x; 1) &= T_1(x; 1) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^{-3/2} \right) (x - 1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} (x - 1) - \frac{1}{8} (x - 1)^2, \end{aligned}$$

wobei wir

$$f(x) = x^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

genutzt haben.

Nun betrachten wir noch wichtige Spezialfälle des Satzes von Taylor und eine Anwendung. Die nachfolgenden Spezialfälle des Satzes von Taylor werden in den Natur- und Ingenieurwissenschaften häufig genutzt, um eine komplizierte (einmal, zweimal bzw. dreimal stetig differenzierbare) Funktion durch eine konstante, eine lineare bzw. eine quadratische Polynomfunktion anzunähern.

Bemerkung 6.32. (Spezialfälle des Satzes von Taylor)

Sei $f \in \mathcal{C}^3(I)$ und $x_0 \in I$. Dann gilt nach dem Satz von Taylor:

$$(1) \quad n = 0: \quad f(x) = f(x_0) + f'(\xi_x)(x - x_0)$$

mit einem ξ_x zwischen x und x_0 .

Dieses ist eine Umformulierung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (vgl. Satz 6.18).

$$(2) \quad n = 1: \quad f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Gleichung der Tangente an } f \text{ in } x_0} + \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x - x_0)^2$$

mit einem ξ_x zwischen x und x_0 .

$$(3) \quad n = 2: \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_x)(x - x_0)^3$$

mit einem ξ_x zwischen x und x_0 .

Zuletzt beweisen wir noch den Satz von Taylor.

Beweis von Satz 6.30: Wir betrachten die beiden Fälle $x = x_0$ und $x \neq x_0$ separat.

Fall 1: Sei $x = x_0$. Dann verschwinden alle Terme $(x - x_0)^k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ und wir bekommen

$$T_n(x_0; x_0) = f(x_0), \quad R_n(x; x_0) = 0, \quad \text{und somit} \quad f(x_0) = T_n(x_0; x_0) + 0.$$

Fall 2: Sei $x \neq x_0$. Sei $\varrho \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass gilt

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \frac{1}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \varrho.$$

(*Erklärung:* Da man die obige Gleichung nach ϱ auflösen kann, muss es ein solches ϱ geben.) Wir bestimmen nun ϱ . Hierzu definieren wir $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) := f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) (x - t)^k}_{= T_n(x; t)} - \frac{1}{(n + 1)!} (x - t)^{n+1} \varrho.$$

Dann gilt $\varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$ wegen $T_n(x; x) = f(x)$ bzw. nach der Definition von ϱ . Nach dem Satz von Rolle (siehe Satz 6.17) existiert ξ zwischen x_0 und x mit $\varphi'(\xi) = 0$.

Also berechnen wir zunächst $\varphi'(t)$:

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t) (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) \cdot k (x-t)^{k-1} \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!} (n+1) (x-t)^n \varrho \\
 &= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t) (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(t) (x-t)^{k-1} + \frac{1}{n!} (x-t)^n \varrho \\
 &= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t) (x-t)^k + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell+1)}(t) (x-t)^\ell + \frac{1}{n!} (x-t)^n \varrho \\
 &= - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) (x-t)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t) (x-t)^k \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t) (x-t)^k + \frac{1}{n!} (x-t)^n \varrho \\
 &= - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) (x-t)^n + \frac{1}{n!} (x-t)^n \varrho \\
 &= \frac{1}{n!} (x-t)^n (\varrho - f^{(n+1)}(t)).
 \end{aligned}$$

Daher gilt für ξ zwischen x_0 und x mit $\varphi'(\xi) = 0$, dass

$$0 = \varphi'(\xi) = \frac{1}{n!} (x - \xi)^n (\varrho - f^{(n+1)}(\xi))$$

d.h. $\varrho = f^{(n+1)}(\xi)$, da $x \neq \xi$ ist. □

6.7 Lokale Extrema: hinreichende Bedingung

In Teilkapitel 6.3 haben wir gelernt, dass bei einer differenzierbaren Funktion in jedem Punkt x_0 , in dem ein lokales Extremum vorliegt, $f'(x_0) = 0$ gelten muss. Wir haben aber an dem Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, und $x_0 = 0$ gesehen, dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ nur notwendig ist (d.h. sie muss gelten,

wenn ein lokales Extremum vorliegt) aber nicht hinreichend ist (d.h. sie garantiert nicht, dass in x_0 auch wirklich ein lokales Extremum liegt). Nun lernen wir eine zusätzliche Bedingung an die zweite Ableitung kennen, so dass beide Bedingungen zusammen die Existenz eines lokalen Extremums garantieren.

Satz 6.33. (hinreichende Bedingungen für lokale Extrema)

Sei I offenes Intervall und $f \in \mathcal{C}^2(I)$. Für $x_0 \in I$ gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$. Dann hat f in x_0 ein **lokales Minimum** bzw. ein **lokales Maximum**.

Beweis von Satz 6.33: Für $x_0 \in I$ gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Da f'' stetig in I ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $f''(x) > 0$ für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I$.

Sei also $x \in]x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon[\cap I$. Nach dem Satz von Taylor existiert ξ_x zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{f''(\xi_x)}_{>0} \underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0} \geq f(x_0).$$

Also hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Analog zeigt man, dass aus $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ folgt, dass f in x_0 ein lokales Maximum hat. \square

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 6.34. (lokale Extrema)

Wir wollen alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x e^{-x}$, bestimmen und den Graphen dieser Funktion skizzieren.

Wir halten fest, dass f in $x_0 = 0$ eine Nullstelle hat.

Nun berechnen wir die erste Ableitung und finden deren Nullstellen: Nach der Produktregel und der Kettenregel gilt

$$f'(x) = (x e^{-x})' = 1 \cdot e^{-x} + x e^{-x} \cdot (-1) = (1 - x) e^{-x},$$

und aus $f'(x) = (1 - x) e^{-x} = 0$ folgt $1 - x = 0$, also $x = 1$ (da $e^{-x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Also ist $x_1 = 1$ der einzige Kandidat für ein Extremum.

Nun berechnen wir die zweite Ableitung. Mit der Produktregel und der Kettenregel gilt

$$f''(x) = ((1 - x) e^{-x})' = (-1) \cdot e^{-x} + (1 - x) e^{-x} \cdot (-1)$$

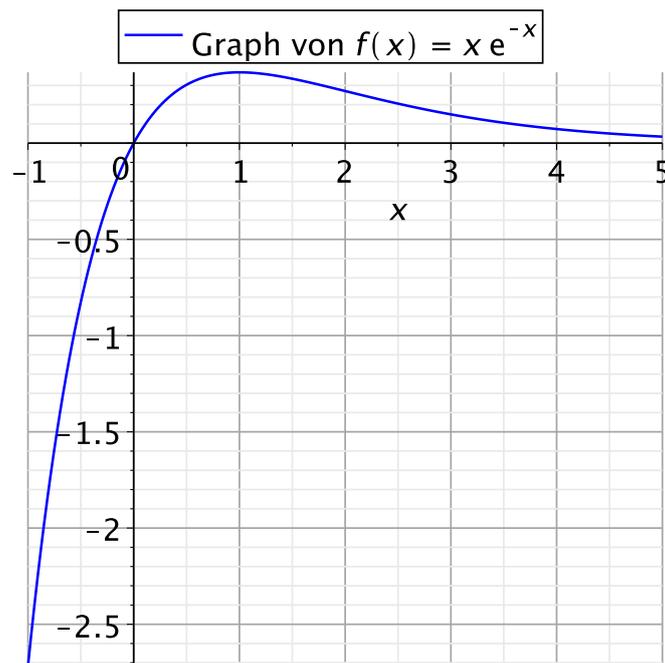


Abb. 6.5: Veranschaulichung der Graphen von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-x}$.

$$= -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = (x - 2) e^{-x}.$$

Für $x_1 = 1$ finden wir $f''(1) = (1 - 2) e^{-1} = -e^{-1} < 0$. Also hat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-x}$, in $x_1 = 1$ ein lokales Maximum. Die Koordinaten dieses lokalen Maximums sind $(1, f(1)) = (1, e^{-1})$.

An $f'(x) = (1 - x) e^{-x}$ können wir sehen, dass f in $] -\infty, 1[$ (also links von $x_1 = 1$) streng monoton wachsend und in $]1, \infty[$ (also rechts von $x_1 = 1$) streng monoton fallend ist. Also liegt in $(1, e^{-1})$ nicht nur ein lokales Maximum sondern sogar ein globales Maximum vor.

Es gilt weiter

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty.$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} |e^x| = \infty$ (Situation „ ∞/∞ “), und mit der zweiten Regel von de l'Hôpital finden wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Mit diesen Informationen können wir den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-x}$, skizzieren. Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-x}$, ist in Abbildung 6.5 gezeichnet.

Integration

In Teilkapitel 7.1 führen wir das bestimmte Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

geometrisch motiviert als der Flächeninhalt unter der Kurve des Graphen von f von $x = a$ bis $x = b$ ein. Weiter lernen wir die grundlegenden Eigenschaften des Riemann-Integrals kennen. In Teilkapitel 7.2 lernen wir den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung kennen. Dieser stellt einen Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral und der Ableitung her und erlaubt es, aus dem Wissen über die Ableitungen von Funktionen Erkenntnisse über (unbestimmte) Integrale von Funktionen zu gewinnen. Hier wird auch der Begriff einer Stammfunktion einer Riemann-integrierbaren Funktion eingeführt.

In Teilkapiteln 7.3 und 7.4 lernen wir zwei wichtige Integrationstechniken kennen, nämlich die Methode der partiellen Integration und die Substitutionsregel. Dieses sind die „Gegenstücke“ zu den Differentiationsregeln Produktregel und Kettenregel. In Teilkapitel 7.5 werden spezielle Substitutionen für gewisse Klassen von Integranden diskutiert. In Teilkapitel 7.6 lernen wir die Partialbruchzerlegung, die Integrationsmethode für rationale Funktionen, kennen. Für die Partialbruchzerlegung benötigen wir in einem Vorbereitungsschritt häufig Polynomdivision, die bereits in Kapitel 2 behandelt wurde (vgl. Beispiel 2.14).

Im letzten Teilkapitel 7.7 werden schließlich sogenannte uneigentliche Integrale behandelt: Dieses sind Integrale, bei denen entweder der Integrationsbereich unbeschränkt ist oder bei denen der Integrand auf dem Integrationsbereich unbeschränkt ist.

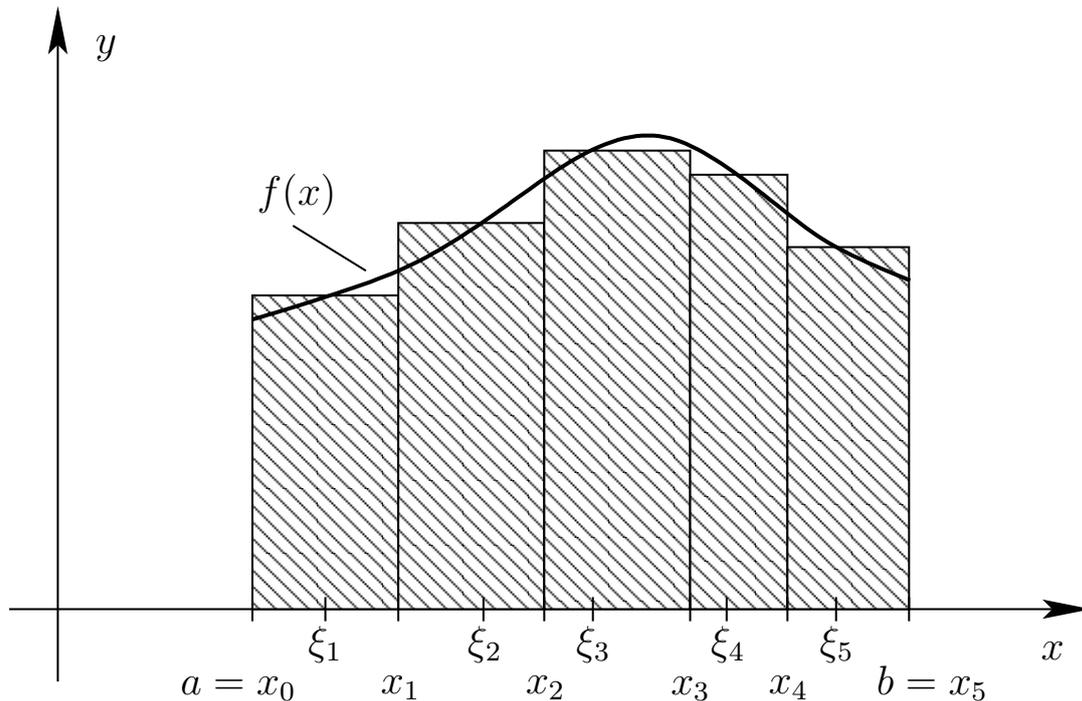


Abb. 7.1: Der Flächeninhalt zwischen der Funktion f und der x -Achse von $x = a$ bis $x = b$ wird mit geeigneten Rechtecken abgedeckt. Die Summe der Flächeninhalte dieser Rechtecke ergibt eine Näherung für den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse von $x = a$ bis $x = b$, also für den Wert des Integrals.

7.1 Das Riemann-Integral

Wir lernen zunächst die geometrisch motivierte Herleitung des Riemann-Integrals kennen.

Seien $I = [a, b]$ ein **abgeschlossenes** Intervall und $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ eine **stetige** Funktion. Gesucht ist der **Flächeninhalt** des Gebietes, das von dem Graphen von f und der Geraden $y = 0$ (also der x -Achse) sowie den Senkrechten durch $x = a$ und $x = b$ berandet wird. Wir werden diesen Flächeninhalt als

$$A := \int_a^b f(x) \, dx$$

bezeichnen und so das **bestimmte Riemann-Integral von f über $[a, b]$** (d.h. von $x = a$ bis $x = b$) definieren.

Um diesen Flächeninhalt zu berechnen, geht man folgendermaßen vor (vgl. Abbildung 7.1):

(1) Man zerlegt $[a, b]$ in n Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, wobei

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(2) In jedem Teilintervall I_k wählt man eine Stützstelle $\xi_k \in I_k$.

(3) Man betrachtet die Rechtecke R_k mit Grundlinie I_k und Höhe $f(\xi_k)$. Der Flächeninhalt von R_k ist dann

$$|R_k| = f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

(4) Man addiert die Flächeninhalte auf:

$$S = \sum_{k=1}^n |R_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Dieses ergibt eine Näherung des gesuchten Flächeninhalts A .

Wenn man immer mehr Teilintervalle nimmt, so dass die maximale Breite dieser Teilintervalle, also

$$\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}),$$

immer schmaler wird, so wird die Näherung für den Flächeninhalt immer besser. Führt man nun einen Grenzübergang (für $n \rightarrow \infty$) durch, bei dem die maximale Breite dieser Teilintervalle gegen null strebt, so erhält man den exakten Wert A des gesuchten Flächeninhaltes.

Bevor wir eine mathematisch saubere Definition des Riemann-Integrals geben, überlegen wir uns noch, was mit der Interpretation des Integrals als Flächeninhalt passiert, wenn nicht alle Funktionswerte der stetigen Funktion f größer oder gleich null sind:

Für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow]-\infty, 0]$ können wir analog vorgehen: Wir suchen den Flächeninhalt des Bereiches, der durch den Graphen von f , die x -Achse und die senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Allerdings definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx$$

als -1 mal diesen Flächeninhalt, da die Fläche unterhalb der x -Achse liegt.

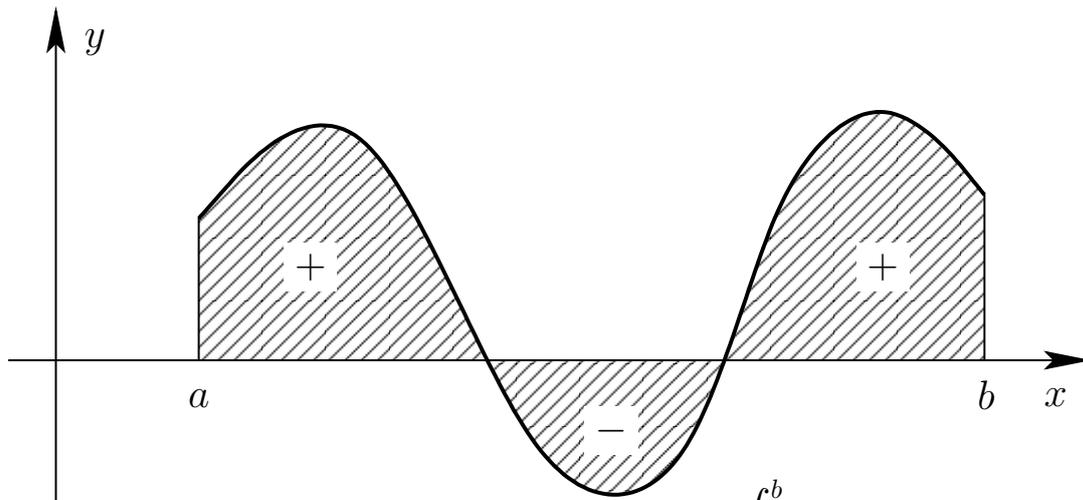


Abb. 7.2: Geometrische Interpretation des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ als Flächeninhalt.

Für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit beliebigen (also möglicherweise positiven und negativen) Funktionswerten weisen wir den Flächeninhalten der Flächenstücke zwischen Graphen und x -Achse (von $x = a$ bis $x = b$) **oberhalb** der x -Achse ein positives Vorzeichen zu und den Flächeninhalten der Flächenstücke zwischen Graphen und x -Achse (von $x = a$ bis $x = b$) **unterhalb** der x -Achse ein negatives Vorzeichen zu (vgl. Abbildung 7.2). Dann summieren wir diese „Flächeninhalte mit Vorzeichen“ auf und erhalten so

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Nachdem wir jetzt eine Anschauung von dem Begriff des Integrals gewonnen haben, definieren wir nun das Riemann-Integral.

Definition 7.1. (beschränkte Funktion)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **beschränkt**, wenn es eine Schranke $S \geq 0$ gibt, so dass $|f(x)| \leq S$ für alle $x \in D$ ist.

Beispiel 7.2. (beschränkte Funktionen)

- (a) Jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt, denn sie hat dort ein Maximum und ein Minimum. Genauer: Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$m := \min_{t \in [a, b]} f(t) \leq f(x) \leq \max_{t \in [a, b]} f(t) =: M \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

und damit $|f(x)| \leq \max\{|m|, |M|\} =: S$ für alle $x \in [a, b]$.

- (b) $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht stetig, aber auf jedem Intervall beschränkt, denn $|\text{sgn}(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Das Riemann-Integral wird für beschränkte Funktionen eingeführt.

Definition 7.3. (Riemann-integrierbare Funktion, Riemann-Integral)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

- (1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k = 1, 2, \dots, n$ sei $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, wobei

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dann heißt $Z := \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ eine **Zerlegung von** $[a, b]$.

$$\ell(Z) := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$

heißt die **Feinheit von** Z . $X_Z := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ heißt ein **Zwischenvektor für** Z , falls $\xi_1 \in I_1, \xi_2 \in I_2, \dots, \xi_n \in I_n$ gilt.

- (2) Ist Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und X_Z ein Zwischenvektor für Z , so definieren wir die (zugehörige) **Riemannsche Zwischensumme** wie folgt:

$$S(f, Z, X_Z) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

- (3) Die Funktion f heißt **Riemann-integrierbar über** $[a, b]$, wenn es eine Zahl A in \mathbb{R} gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass für alle Zerlegungen Z von I mit $\ell(Z) \leq \delta_\varepsilon$ und alle zugehörigen Zwischenvektoren X_Z gilt:

$$|S(f, Z, X_Z) - A| \leq \varepsilon.$$

A heißt dann das **Riemann-Integral von** f **über** $[a, b]$, und wir notieren A als

$$\int_a^b f(x) \, dx := A.$$

Man bezeichnet die Funktion f als den **Integranden** des Riemann-Integrals.

- (4) Wir schreiben $\mathcal{R}([a, b])$ für die **Menge aller über** $[a, b]$ **Riemann-integrierbaren Funktionen**.

(5) Wir definieren:

$$\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0.$$

Erklärung: Die zunächst „ungewöhnlich“ aussehende Definition von Riemann-integrierbar über $[a, b]$ und die darauf aufbauende Definition des Riemann-Integrals in Definition 7.3 (3) bedeuten das Folgende:

Ist die beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **Riemann-integrierbar über** $[a, b]$, so gilt für jede Folge $(Z_j)_{j \geq 1}$ von Zerlegungen Z_j von $[a, b]$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \ell(Z_j) = 0$ und für jede beliebige Wahl von Zwischenstellen $X_{Z_j} = (\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \dots, \xi_{n_j}^{(j)})$ für Z_j , dass die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_j, X_{Z_j}))_{j \geq 1}$ **stets konvergent** ist und **immer denselben Grenzwert** A besitzt. Dieser Grenzwert A heißt das **bestimmte Integral von f über** $[a, b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x) \, dx := A := \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) \quad (7.1)$$

bezeichnet. Zur **praktischen Berechnung des Riemann-Integrals** verwendet man dann eine Folge von möglichst günstigen Zerlegungen und möglichst günstigen zugehörigen Zwischenstellen. Bevor wir dieses für einige Beispiele demonstrieren, lernen wir erst einen nützlichen Satz kennen.

Satz 7.4. (hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)

- (1) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *monoton* (d.h. *monoton wachsend* oder *monoton fallend*), so ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
- (2) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *stetig*, so ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Betrachten wir nun einige Beispiele.

Beispiel 7.5. (Riemann-Integral einer konstanten Funktion)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$, eine konstante Funktion.

- Diese Funktion ist stetig auf \mathbb{R} und damit insbesondere stetig auf jedem Intervall $[a, b]$. Nach Satz 7.4 ist f daher über jedes Intervall $[a, b]$ integrierbar.

- Wir vermuten wegen der Interpretation des Integrals als Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse von $x = a$ bis $x = b$, dass gelten sollte

$$\int_a^b f(x) \, dx = c \cdot (b - a).$$

- Betrachten wir nun sogenannte äquidistante Zerlegungen Z_j von $[a, b]$ (also Zerlegungen mit gleichen Abständen der Punkte x_k , $k = 0, 1, 2, \dots, j$), d.h. Z_j ist eine Zerlegung von $[a, b]$ in $n_j = j$ Teilintervalle der Länge $(b - a)/j$. Die Punkte der äquidistanten Zerlegung Z_j sind also

$$x_k^{(j)} = a + k \cdot \frac{(b - a)}{j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, j,$$

und wir wählen die Zwischenstellen $\xi_k^{(j)} = x_k^{(j)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(f, Z_j, X_{Z_j}) &= \sum_{k=1}^j \underbrace{f(\xi_k^{(j)})}_{=c} \cdot \underbrace{(x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)})}_{=(b-a)/j} \\ &= \sum_{k=1}^j c \cdot \frac{(b - a)}{j} = c \cdot (b - a) \underbrace{\sum_{k=1}^j \frac{1}{j}}_{=1} = c \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Also erhalten wir, wie vermutet,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b c \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} c \cdot (b - a) = c \cdot (b - a).$$

Beispiel 7.6. (Riemann-Integral der Standardparabel über $[0, b]$)

Wir wollen

$$\int_0^b x^2 \, dx \quad \text{mit } b > 0 \tag{7.2}$$

berechnen.

- Da die Standardparabel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, stetig ist, ist sie nach Satz 7.4 über $[0, b]$ integrierbar, und das Integral (7.2) existiert.
- Wir verwenden hier wieder äquidistante Zerlegungen Z_j in $n_j = j$ Teilintervalle gleicher Länge, also

$$x_k^{(j)} = k \cdot \frac{b}{j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, j.$$

Als Zwischenstellen verwenden wir $\xi_k^{(j)} = x_k^{(j)}$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} S(f, Z_j, X_{Z_j}) &= \sum_{k=1}^j \underbrace{f(\xi_k^{(j)})}_{=(k \cdot \frac{b}{j})^2} \cdot \underbrace{(x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)})}_{=k \cdot \frac{b}{j} - (k-1) \cdot \frac{b}{j} = \frac{b}{j}} \\ &= \sum_{k=1}^j \left(k \cdot \frac{b}{j}\right)^2 \frac{b}{j} = \left(\frac{b}{j}\right)^3 \sum_{k=1}^j k^2 = \frac{b^3}{j^3} \sum_{k=1}^j k^2. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion kann man zeigen, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^j k^2 = \frac{1}{6} j(j+1)(2j+1).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{j}\right)^3 \sum_{k=1}^j k^2 \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{j}\right)^3 \frac{1}{6} j(j+1)(2j+1) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{6} b^3 \frac{j(j+1)(2j+1)}{j \cdot j \cdot j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{6} b^3 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{j}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{j}\right)}_{\rightarrow 2 \text{ wenn } j \rightarrow \infty} \\ &= \frac{1}{6} b^3 \cdot 2 = \frac{1}{3} b^3. \end{aligned}$$

- Also finden wir $\int_0^b x^2 dx = \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) = \frac{1}{3} b^3$.

Beispiel 7.7. (Riemann-Integral von $1/x$ über $[1, b]$)

Wir wollen das bestimmte Integral

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx \quad \text{für ein festes } b > 1$$

berechnen.

- Die Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, ist stetig und somit über jedes Intervall $[1, b]$ mit $b > 1$ integrierbar.

- Hier nützen uns die äquidistanten Zerlegungen wenig. Statt dessen wählen wir die Zerlegungen Z_j in $n_j = j$ Teilintervalle mit $x_k^{(j)} = b^{k/j}$, $k = 0, 1, 2, \dots, j$, und die Zwischenstellen $\xi_k^{(j)} = x_{k-1}^{(j)} = b^{(k-1)/j}$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} S(f, Z_j, X_{Z_j}) &= \sum_{k=1}^j f(\xi_k^{(j)}) \cdot (x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}) = \sum_{k=1}^j \frac{1}{b^{(k-1)/j}} \cdot (b^{k/j} - b^{(k-1)/j}) \\ &= \sum_{k=1}^j b^{-(k-1)/j} \cdot (b^{k/j} - b^{(k-1)/j}) = \sum_{k=1}^j (b^{1/j} - 1) = j \cdot (b^{1/j} - 1). \end{aligned}$$

Nun bilden wir den Grenzwert für $j \rightarrow \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} [j \cdot (b^{1/j} - 1)] = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{b^{1/j} - 1}{1/j}. \quad (7.3)$$

Da $1/j$ für $j \rightarrow \infty$ gegen null strebt, können wir nun in (7.3) auch $1/j$ durch x ersetzen und statt des Grenzwertes für $j \rightarrow \infty$ entsprechend den rechtsseitigen Grenzwert für $x \searrow 0$ betrachten. Also

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{b^{1/j} - 1}{1/j} = \lim_{x \searrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{\ln(b) \cdot x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \searrow 0} \frac{(e^{\ln(b) \cdot x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(b) e^{\ln(b) \cdot x}}{1} = \frac{\ln(b) e^0}{1} = \ln(b), \end{aligned}$$

wobei die erste Regel von de l'Hôpital verwendet wurde, da

$$\lim_{x \searrow 0} (e^{\ln(b) \cdot x} - 1) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} x = 0.$$

- Also finden wir $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, X_{Z_j}) = \ln(b)$.

Bemerkung 7.8. (Notation und Berechnung von Integralen)

- (1) Die Bezeichnung der **Integrationsvariablen** ist willkürlich! Beispielsweise gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

- (2) Die obige Definition 7.3 macht keine Einschränkung an die Funktionswerte, außer dass diese $|f(x)| \leq S$ für alle $x \in [a, b]$ mit einer Schranke S erfüllen (da f auf $[a, b]$ beschränkt ist). Die Stetigkeit der Funktion f in unserer geometrischen, Anschauung wird in Definition 7.3 **nicht** vorausgesetzt.

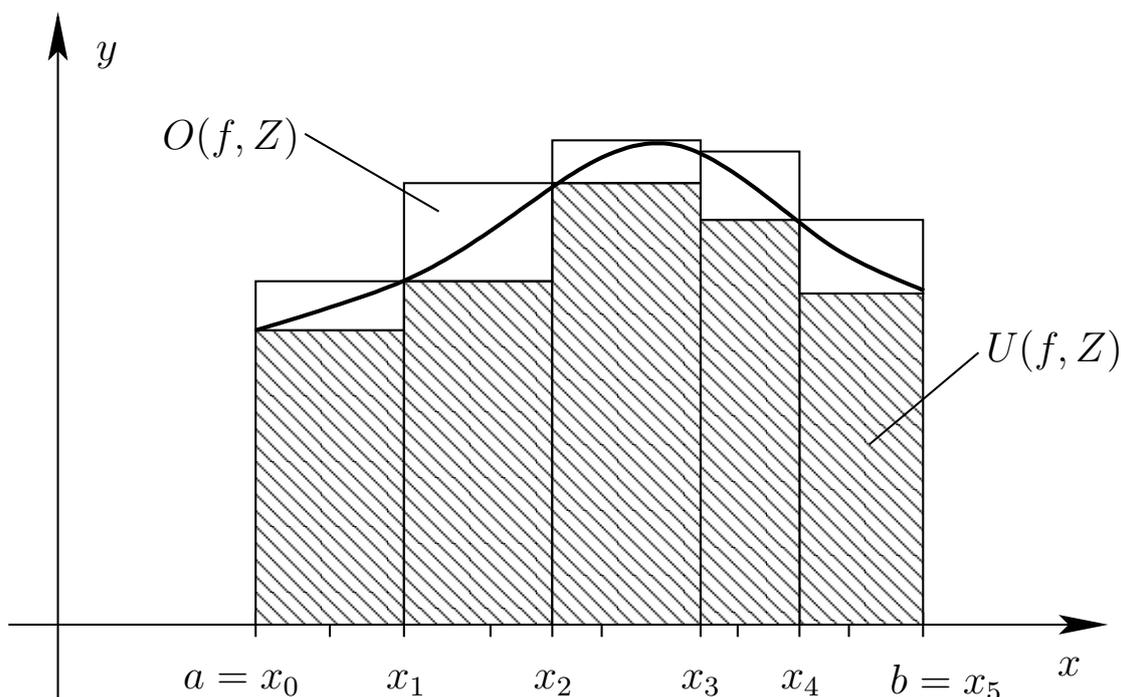


Abb. 7.3: Idee der Untersumme $U(f, Z)$ und der Obersumme $O(f, Z)$.

Im Schulunterricht wurden Integrale möglicherweise mit Unter- und Obersummen eingeführt. Dieses führt für stetige Funktionen zu einer äquivalenten Definition des Integrals, wie es in der folgenden Bemerkung erklärt ist.

Bemerkung 7.9. (Untersummen und Obersummen)

Wir betrachten hier nur in $[a, b]$ stetige Funktionen. Diese nehmen nach Satz 5.31 ein Minimum und ein Maximum in $[a, b]$ und in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[a, b]$ an. Wählt man die Zwischenstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, so dass

$$f(\xi_k) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

gilt, so erhält man die **Untersumme** $U(f, Z)$ für die Zerlegung Z . Entsprechend bekommt man die **Obersumme** $O(f, Z)$, wenn man Zwischenstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit

$$f(\xi_k) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

verwendet. Geometrisch entspricht dies der Verwendung „eingeschriebener“ bzw. „umbeschriebener“ Rechtecke (siehe Abbildung 7.3). Es gilt für jede Wahl der Zwischenstellen $X_Z = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

$$U(f, Z) \leq S(f, Z, X_Z) \leq O(f, Z).$$

In Definition 7.3 kann man daher bei einer in $[a, b]$ stetigen Funktion äquivalent

auch verlangen, dass für jede Folge von Zerlegungen $(Z_j)_{j \geq 1}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \ell(Z_j) = 0$ die zugehörige Folge der Untersummen $(U(f, Z_j))_{j \geq 1}$ und die zugehörige Folge der Obersummen $(O(f, Z_j))_{j \geq 1}$ jeweils konvergent sind und beide immer denselben Grenzwert haben, dessen Wert nicht von der gewählten Folge von Zerlegungen abhängt.

Der nächste Satz stellt wichtige grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals zusammen.

Satz 7.10. (Eigenschaften des Riemann-Integrals)

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen.

(1) Ist $a < c < b$, so gilt

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \in \mathcal{R}([a, c]) \quad \text{und} \quad f \in \mathcal{R}([c, b]).$$

In diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

(2) Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ und

$$\int_a^b (\alpha f)(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx.$$

(3) Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, so ist auch $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ und es gilt

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

(4) Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

(5) Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$, so ist auch $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

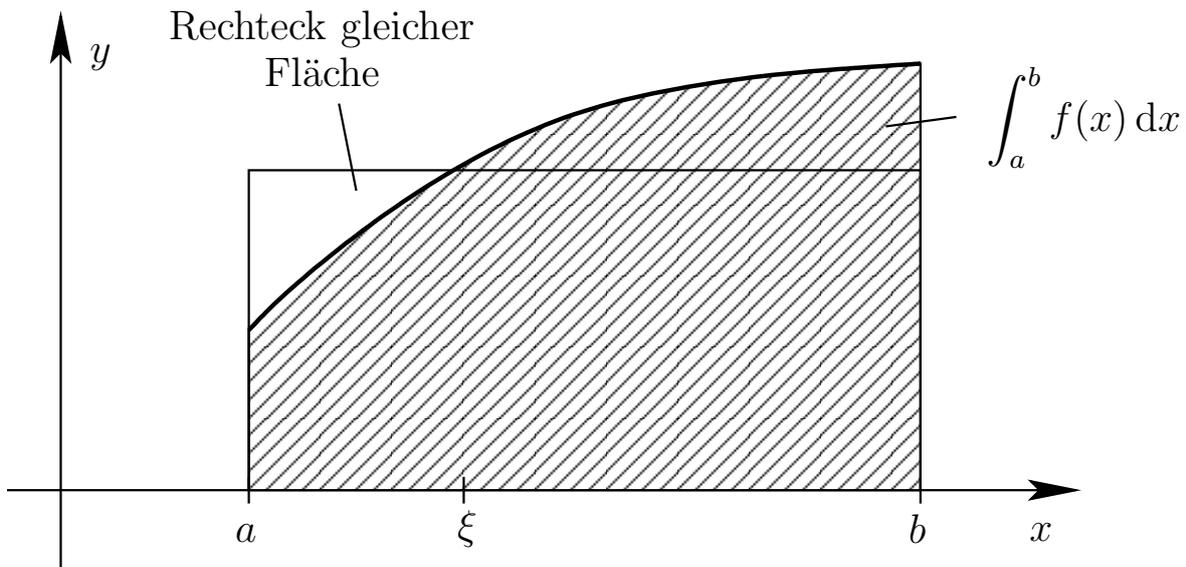


Abb. 7.4: Geometrische Bedeutung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung für stetige Funktionen: Die Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ (von $x = a$ bis $x = b$) ist gleich der Rechteckfläche über $[a, b]$ mit der Höhe $f(\xi)$ für eine geeignete Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$.

Als letzten Punkt in diesem Teilkapitel lernen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung kennen.

Satz 7.11. (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a).$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist in Abbildung 7.4 anschaulich erklärt.

Wir beweisen den Mittelwertsatz der Integralrechnung, weil der Beweis instruktiv ist.

Beweis von Satz 7.11: Da $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, existieren nach Satz 5.31

$$m := \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad M := \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

sowie $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\min}) = m$ und $f(x_{\max}) = M$. Für alle $x \in [a, b]$

gilt also $m \leq f(x) \leq M$, und daher folgt mit Satz 7.10 (4), dass

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a).$$

Es folgt mit Division durch $b-a$, dass gilt

$$f(x_{\min}) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M = f(x_{\max}).$$

Da f stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz (Satz 5.26) ein $\xi \in [a, b]$ (zwischen x_{\min} und x_{\max} und somit in $[a, b]$) mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \quad \Longrightarrow \quad f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

7.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir beginnen mit der Einführung des Begriffs einer Stammfunktion.

Definition 7.12. (Stammfunktion)

Seien I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : I \rightarrow \mathbb{R}$. Falls F in I differenzierbar ist und $F' = f$ gilt, so heißt F eine **Stammfunktion** von f .

Betrachten wir ein paar Beispiele von Stammfunktionen.

Beispiel 7.13. (Stammfunktionen)

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$. Dann ist $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := x^3/3$, eine Stammfunktion von f , denn es gilt

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$F(x) = x^3/3$ ist aber nicht die einzige Stammfunktion von $f(x) = x^2$, denn z.B. sind

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) := \frac{1}{3}x^3 + 5, \quad \text{und} \quad H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) := \frac{1}{3}x^3 - e,$$

ebenfalls Stammfunktionen von $f(x) = x^2$.

- (b) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := e^x$. Dann ist jede Funktion der Form $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) := e^x + c$, mit einer beliebigen Konstante c eine Stammfunktion von g , denn

$$G'(x) = (e^x + c)' = e^x = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- (c) Sei $h :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := 1/x$. Dann ist jede Funktion $H :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) := \ln(x) + c$, mit einer beliebigen Konstante c eine Stammfunktion von h , denn

$$H'(x) = (\ln(x) + c)' = \frac{1}{x} = h(x) \quad \text{für alle } x \in]0, \infty[.$$

Was wir bereits in den vorigen Beispielen gesehen haben, gilt im Allgemeinen:

Bemerkung 7.14. (Stammfunktionen)

Ist F eine Stammfunktion von f , so ist auch $F + c$ für jede Konstante c eine Stammfunktion von f , denn

$$(F + c)' = F' + 0 = f.$$

Nach dieser Vorbereitung können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formulieren.

Satz 7.15. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gelten:

(1) Die Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt,$$

ist eine **Stammfunktion** von f .

(2) Ist umgekehrt F irgendeine Stammfunktion von f , so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = c + \int_a^x f(t) dt$$

und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_{x=a}^{x=b}. \quad (7.4)$$

Warum ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung so wichtig? Mit unserem Wissen über Ableitungen können wir Stammfunktionen bestimmen; und mit (7.4) können wir Integrale bequem berechnen, wenn wir eine Stammfunktion F des Integranden f kennen.

Wir skizzieren den Beweis dieses wichtigen Satzes.

Beweisskizze für Satz 7.15:

(1) Sei $x \in]a, b[$. Ist $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ klein genug, so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) - f(x) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \quad (\text{nach Satz 7.10 (1)}) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \quad (7.5) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt, \end{aligned}$$

wobei wir im Schritt (7.5) genutzt haben, dass

$$1 = \frac{1}{h} \cdot h = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} 1 dt,$$

und da $f(x)$ für ein Integral über t eine Konstante ist, gilt somit

$$f(x) = f(x) \cdot \frac{1}{h} \int_x^{x+h} 1 dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt & \text{für } h > 0, \\ \frac{1}{-h} \int_{x+h}^x |f(t) - f(x)| dt & \text{für } h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \begin{cases} \frac{1}{h} (x+h-x) \max_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| & \text{für } h > 0, \\ \frac{1}{-h} (x - (x+h)) \max_{x+h \leq t \leq x} |f(t) - f(x)| & \text{für } h < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{h} h \max_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| & \text{für } h > 0, \\ \frac{1}{-h} (-h) \max_{x+h \leq t \leq x} |f(t) - f(x)| & \text{für } h < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \max_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 & \text{für } h > 0, \\ \max_{x+h \leq t \leq x} |f(t) - f(x)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 & \text{für } h < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

weil f stetig ist. Wir erhalten also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

d.h. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a, b[$. Um $F'(x) = f(x)$ auch für die Randpunkte $x = a$ bzw. $x = b$ zu erhalten, muss man dort einen einseitigen Differenzenquotienten betrachten.

(2) Ist F irgendeine Stammfunktion von f und ist G definiert durch

$$G(x) := F(x) - \int_a^x f(t) dt,$$

so gilt

$$G'(x) = F'(x) - \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in]a, b[,$$

wobei wir Teil (1) genutzt haben. Also ist G auf $]a, b[$ eine konstante Funktion, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = c$ für alle $x \in]a, b[$, d.h.

$$F(x) - \int_a^x f(t) dt = c \iff F(x) = c + \int_a^x f(t) dt. \quad (7.6)$$

Weil G als differenzierbare Funktion stetig ist, folgt aus $G(x) = c$ für alle $x \in]a, b[$, dass $G(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Damit gilt (7.6) für alle $x \in [a, b]$. Aus (7.6) folgt dann für $x = b$ bzw. $x = a$

$$F(b) - F(a) = c + \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\left(c + \int_a^a f(t) dt \right)}_{=0} = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

Bemerkung 7.16. (Stammfunktion und unbestimmtes Integral)

Ist F eine Stammfunktion von f , so schreiben wir auch

$$\int f(x) dx$$

für $F(x)$. $\int f(x) dx$ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. $\int f(x) dx$ heißt auch das **unbestimmte Integral** von f im Gegensatz zu einem **bestimmten Integral** von f

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Betrachten wir einige Beispiele für unbestimmte Integrale.

Beispiel 7.17. (unbestimmte Integrale)

(a) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c,$$

da

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right) = \frac{1}{a+1} (a+1) x^{a+1-1} = x^a.$$

(b) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$, denn

$$\ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x) & \text{wenn } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(|x|) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & \text{wenn } x > 0 \\ -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{wenn } x < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x}.$$

(c) $\int \exp(x) dx = \exp(x) + c$

(d) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

$$(e) \int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$$

$$(f) \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + c, \text{ da nach Satz 6.9 und Beispiel 6.5 (e)}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

wobei wir $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ genutzt haben.

Betrachten wir auch einige Beispiele für bestimmte Integrale.

Beispiel 7.18. (bestimmte Integrale)

$$(a) \int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx = \left[\sin(x) \right]_{x=0}^{x=2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

$$(b) \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln(|x|) \right]_{x=1}^{x=2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

$$(c) \int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln(|x|) \right]_{x=-e}^{x=-1} = \ln(|-1|) - \ln(|-e|) \\ = \ln(1) - \ln(e) = 0 - 1 = -1$$

$$(d) \int_0^\pi \sin(x) \, dx = \left[-\cos(x) \right]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$(e) \int_{-3}^3 x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{x=-3}^{x=3} = \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} (-3)^4 = 0$$

7.3 Partielle Integration

Die Methode der partiellen Integration beruht auf der **Produktregel der Differentiation** (siehe Satz 6.4 (3)): Für $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ gilt

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (7.7)$$

Da alle auftretenden Funktion u, v, u' und v' auf $[a, b]$ stetig sind können wir das Integral von (7.7) über $[a, b]$ berechnen und erhalten

$$\underbrace{\int_a^b (u(x)v(x))' \, dx}_{= \left[u(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b}} = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \, dx$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \left[u(x) v(x) \right]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx \\ \Leftrightarrow \quad & \left[u(x) v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x) v'(x) dx = \int_a^b u'(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Die Formel in der letzten Zeile bezeichnet man als die Methode der partiellen Integration. Wir halten dieses als Satz fest.

Satz 7.19. (Methode der partiellen Integration)

Sind $u, v \in C^1([a, b])$, so gilt:

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Bemerkung 7.20. (Partielle Integration unbestimmter Integrale)

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx.$$

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 7.21. (partielle Integration: bestimmte Integrale)

Bestimmte Integrale können wir mit zwei Varianten berechnen (siehe unten): entweder direkt oder indem wir zunächst das zugehörige unbestimmte Integral berechnen und erst danach die Grenzen einsetzen.

(a) *Variante 1:* Direkte Berechnung von $\int_{-1}^3 x e^x dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \underbrace{x}_{=v(x)} \underbrace{e^x}_{=u'(x)} dx &= \left[\underbrace{x}_{=v(x)} \underbrace{e^x}_{=u(x)} \right]_{x=-1}^{x=3} - \int_{-1}^3 \underbrace{1}_{=v'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=u(x)} dx \\ &= 3e^3 - (-1)e^{-1} - \int_{-1}^3 e^x dx = 3e^3 + e^{-1} - \left[e^x \right]_{x=-1}^{x=3} \\ &= 3e^3 + e^{-1} - (e^3 - e^{-1}) = 2e^3 + 2e^{-1} \end{aligned}$$

Variante 2: Berechnung von $\int_{-1}^3 x e^x dx$ mit dem unbestimmtem Integral

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=v(x)} \underbrace{e^x}_{=u'(x)} dx &= \underbrace{x}_{=v(x)} \underbrace{e^x}_{=u(x)} - \int \underbrace{1}_{=v'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=u(x)} dx \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = (x - 1) e^x + c \end{aligned}$$

und somit

$$\int_{-1}^3 x e^x dx = \left[(x - 1) e^x \right]_{x=-1}^{x=3} = 2 e^3 - (-2) e^{-1} = 2 e^3 + 2 e^{-1}.$$

Wir dürfen bei der Berechnung des bestimmten Integrals die Integrationskonstante weglassen, denn in (7.4) in Satz 7.15 kann jede beliebige Stammfunktion gewählt werden (also auch die mit Konstante $c = 0$).

(b) Variante 1: Direkte Berechnung von $\int_0^\pi t \sin(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \underbrace{t}_{=v(t)} \underbrace{\sin(t)}_{=u'(t)} dt &= \left[\underbrace{t}_{=v(t)} \underbrace{(-\cos(t))}_{=u(t)} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \underbrace{1}_{=v'(t)} \cdot \underbrace{(-\cos(t))}_{=u(t)} dt \\ &= \pi \cdot (-\cos(\pi)) - 0 \cdot (-\cos(0)) + \int_0^\pi \cos(t) dt \\ &= \pi - 0 + \left[\sin(t) \right]_{t=0}^{t=\pi} = \pi + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi + 0 - 0 = \pi \end{aligned}$$

Variante 2: Berechnung von $\int_0^\pi t \sin(t) dt$ mit dem unbestimmtem Integral

$$\begin{aligned} \int \underbrace{t}_{=v(t)} \underbrace{\sin(t)}_{=u'(t)} dt &= \underbrace{t}_{=v(t)} \underbrace{(-\cos(t))}_{=u(t)} - \int \underbrace{1}_{=v'(t)} \cdot \underbrace{(-\cos(t))}_{=u(t)} dt \\ &= -t \cos(t) + \int \cos(t) dt = -t \cos(t) + \sin(t) + c \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \sin(t) dt &= \left[-t \cos(t) + \sin(t) \right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \left[-\pi \cos(\pi) + \sin(\pi) \right] - \left[-0 + \sin(0) \right] = \pi. \end{aligned}$$

Beispiel 7.22. (partielle Integration: unbestimmte Integrale)

(a) Berechnung von $\int \ln(x) dx$ für $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} dx = \underbrace{x}_{=u(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} - \int \underbrace{x}_{=u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=v'(x)} dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + c. \end{aligned}$$

(b) Berechnung von $\int x^2 e^x dx$: Bei diesem Integral muss man partielle Integration zweimal hintereinander anwenden.

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{=v(x)} \underbrace{e^x}_{=u'(x)} dx &= \underbrace{x^2}_{=v(x)} \underbrace{e^x}_{=u(x)} - \int \underbrace{2x}_{=v'(x)} \underbrace{e^x}_{=u(x)} dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int \underbrace{x}_{=\tilde{v}(x)} \underbrace{e^x}_{=\tilde{u}(x)} dx \\ &= x^2 e^x - 2 \left(\underbrace{x}_{=\tilde{v}(x)} \underbrace{e^x}_{=\tilde{u}(x)} - \int \underbrace{1}_{=\tilde{v}'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=\tilde{u}(x)} dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x + c) \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x + \tilde{c} \quad \text{mit } \tilde{c} := -2c. \end{aligned}$$

(c) Berechnung von $\int \sin(t) \cos(t) dt$:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sin(t)}_{=v(t)} \underbrace{\cos(t)}_{=u'(t)} dt &= \underbrace{\sin(t)}_{=v(t)} \underbrace{\sin(t)}_{=u(t)} - \int \underbrace{\cos(t)}_{=v'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{=u(t)} dt \\ &= \sin^2(t) - \int \sin(t) \cos(t) dt \end{aligned}$$

Wir addieren auf beiden Seiten das unbestimmte Integral $\int \sin(t) \cos(t) dt$ und müssen dann aber auf der rechten Seite eine Integrationskonstante \tilde{c} ergänzen, weil das letzte unbestimmte Integral verschwunden ist:

$$\begin{aligned} 2 \int \sin(t) \cos(t) dt &= \sin^2(t) + \tilde{c} && \iff \\ \int \sin(t) \cos(t) dt &= \frac{1}{2} \sin^2(t) + c && \text{mit } c := \tilde{c}/2. \end{aligned}$$

(d) Berechnung von $\int t \ln(t) dt$ für $t > 0$ mit zwei Varianten:

$$\begin{aligned}
 \text{Variante 1: } \int \underbrace{t}_{=u'(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=v(t)} dt &= \underbrace{\frac{1}{2} t^2}_{=u(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=v(t)} - \int \underbrace{\frac{1}{2} t^2}_{=u(t)} \underbrace{\frac{1}{t}}_{=v'(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2} t^2 \ln(t) - \frac{1}{2} \int t dt \\
 &= \frac{1}{2} t^2 \ln(t) - \frac{1}{4} t^2 + c.
 \end{aligned}$$

Für *Variante 2* nutzen wir, dass wir bereits wissen (vgl. Teil (a)), dass $(t \ln(t) - t)' = \ln(t)$ gilt.

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{t}_{=v(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=u'(t)} dt &= \underbrace{t}_{=v(t)} \underbrace{(t \ln(t) - t)}_{=u(t)} - \int \underbrace{1}_{=v'(t)} \underbrace{(t \ln(t) - t)}_{=u(t)} dt \\
 &= t^2 \ln(t) - t^2 - \int t \ln(t) dt + \int t dt \\
 &= t^2 \ln(t) - t^2 - \int t \ln(t) dt + \frac{1}{2} t^2 \\
 &= t^2 \ln(t) - \frac{1}{2} t^2 - \int t \ln(t) dt,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \int t \ln(t) dt &= t^2 \ln(t) - \frac{1}{2} t^2 - \int t \ln(t) dt \quad \Big| \quad + \int t \ln(t) dt \\
 \implies 2 \int t \ln(t) dt &= t^2 \ln(t) - \frac{1}{2} t^2 + \tilde{c} && (7.8) \\
 \implies \int t \ln(t) dt &= \frac{1}{2} t^2 \ln(t) - \frac{1}{4} t^2 + c \quad \text{mit } c := \frac{\tilde{c}}{2}.
 \end{aligned}$$

Da wir keine weiteren Integrale auswerten, müssen wir im Schritt (7.8) die Integrationskonstante \tilde{c} ergänzen.

In der nächsten Bemerkung halten wir einige Tipps für den Umgang mit partieller Integration fest.

Bemerkung 7.23. (Praxistipps für partielle Integration)

(1) Integrale der Form

$$\int x f(x) dx$$

lassen sich durch partielle Integration lösen, sofern

$$\int f(x) dx$$

bekannt ist. Man wählt dann $u'(x) = f(x)$ und $v(x) = x$. Die **Ausnahme** von dieser Regel ist

$$\int x \ln(x) dx.$$

Hier ist es günstiger, $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln(x)$ zu wählen (siehe dazu Beispiel 7.22 (c)).

(2) Integrale der Form

$$\int x^k f(x) dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

lassen sich manchmal durch (mehrfache) partielle Integration berechnen (siehe Beispiel 7.22 (b)).

7.4 Die Substitutionsregel

Seien f stetig und F eine Stammfunktion von f und u eine \mathcal{C}^1 -Funktion. Falls die Verkettung $F \circ u$ existiert, liefert die Kettenregel

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) u'(x) = f(u(x)) u'(x).$$

Integration über $[a, b]$ auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx &= \int_a^b (F \circ u)'(x) dx = \left[(F \circ u)(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\ &= F(u(b)) - F(u(a)) = \left[F(t) \right]_{t=u(a)}^{t=u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} \underbrace{f(t)}_{=F'(t)} dt. \end{aligned}$$

Nun können wir die Substitutionsregel formulieren.

Satz 7.24. (Substitutionsregel)

Sei $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $[c, d] := u([a, b])$. Ist $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt. \quad (7.9)$$

Bemerkung 7.25. (Substitutionsregel für unbestimmte Integrale)

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \left[\int f(t) dt \right]_{t=u(x)} \quad (7.10)$$

Achtung: Rücksubstitution nicht vergessen! Es ist ganz wichtig, dass man nach dem Berechnen von $\int f(t) dt$ wieder $t = u(x)$ einsetzt!

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 7.26. (Substitutionsregel)

(a) Berechnung von $\int_0^2 e^{-x^2} x dx$: Wir setzen

$$u = u(x) = -x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -2x \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} du = x dx$$

mit den neuen Integralgrenzen

$$u(0) = -0^2 = 0 \quad \text{und} \quad u(2) = -2^2 = -4$$

und erhalten mit dieser Substitution

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{-x^2} x dx &= \int_0^{-4} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = \left[-\frac{1}{2} e^u\right]_{u=0}^{u=-4} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-4} - \left(-\frac{1}{2}\right) e^0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}). \end{aligned}$$

(b) Berechnung von $\int \sin^3(x) \cos(x) dx$: Wir setzen

$$u = u(x) = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \cos(x) \quad \Longrightarrow \quad du = \cos(x) dx$$

und erhalten mit dieser Substitution

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \cos(x) dx &= \left[\int u^3 du \right]_{u=\sin(x)} \\ &= \left[\frac{1}{4} u^4 + c \right]_{u=\sin(x)} = \frac{1}{4} \sin^4(x) + c. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.27. (Anwendung der Substitutionsregel)

In der Praxis wird die Substitutionsregel oft „von rechts nach links“ angewendet, d.h. wir ersetzen auf der rechten Seite von (7.10) (bzw. von (7.9)) $t = u(x)$ mit einer **injektiven** Funktion u und erhalten mit

$$\frac{dt}{dx} = u'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad dt = u'(x) dx$$

somit

$$\int f(t) dt = \left[\int f(u(x)) u'(x) dx \right]_{x=u^{-1}(t)}, \quad (7.11)$$

falls f stetig und u stetig differenzierbar ist. Man beachte, dass die **Injektivität von u erforderlich ist**, damit man im letzten Schritt nach der Berechnung des Integrals die Substitution $t = u(x)$ durch $x = u^{-1}(t)$ mit Hilfe der Umkehrfunktion u^{-1} von u wieder „rückgängig machen“ kann. Für bestimmte Integrale erhalten wir analog zu (7.11)

$$\int_c^d f(t) dt = \int_{u^{-1}(c)}^{u^{-1}(d)} f(u(x)) u'(x) dx. \quad (7.12)$$

Betrachten wir ein Beispiel, in dem wir eine „Rückwärts-Substitution“ benutzen.

Beispiel 7.28. (Substitutionsregel)

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt$$

Wir wählen die Substitution $t = e^x$ ($\Leftrightarrow x = \ln(t)$), also

$$t = e^x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{dx} = e^x \quad \Longrightarrow \quad dt = e^x dx$$

und erhalten mit den neuen Grenzen $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt = \int_0^1 \frac{1}{e^x(1+\ln(e^x))} e^x dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

Mit der weiteren Substitution

$$y = 1 + x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Longrightarrow \quad dy = dx$$

folgt mit den neuen Grenzen $y(0) = 1$ und $y(1) = 2$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \left[\ln(|y|) \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \left[\ln(y) \right]_{y=1}^{y=2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2). \end{aligned}$$

Alternativ kann man das Integral auch wie folgt mit einer Substitution lösen:

$$u = 1 + \ln(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{t} dt,$$

und mit den neuen Grenzen

$$u(1) = 1 + \ln(1) = 1 + 0 = 1 \quad \text{und} \quad u(e) = 1 + \ln(e) = 1 + 1 = 2$$

finden wir

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt &= \int_{u(1)}^{u(e)} \frac{1}{u} du = \int_1^2 \frac{1}{u} du \\ &= \left[\ln(|u|) \right]_{u=1}^{u=2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2). \end{aligned}$$

In der nächsten Bemerkung halten wir zwei Standardsubstitutionen fest.

Bemerkung 7.29. (zwei Standardsubstitutionen)

(1) Seien f stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$. Dann gilt:

$$\int f(\lambda x + \mu) dx = \left[\int f(u) \frac{1}{\lambda} du \right]_{u=\lambda x + \mu} = \left[\frac{1}{\lambda} \int f(u) du \right]_{u=\lambda x + \mu}.$$

Erklärung: Dieses folgt mit der Substitution

$$u = \lambda x + \mu \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} du = dx.$$

(2) Sei $f \in \mathcal{C}^1(I)$ mit $f(x) \neq 0$ in I . Dann gilt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\int \frac{1}{u} du \right]_{u=f(x)} = [\ln(|u|) + c]_{u=f(x)} = \ln(|f(x)|) + c.$$

Erklärung: Dieses folgt mit der Substitution

$$u = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad du = f'(x) dx.$$

Betrachten wir auch hierzu einige Beispiele.

Beispiel 7.30. (Standardsubstitutionen)

$$(a) \int \cos(3x - 5) dx = \frac{1}{3} \sin(3x - 5) + c$$

$$(b) \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(|x^2 + 1|) + c = \ln(x^2 + 1) + c$$

7.5 Substitutionen für spezielle Integranden

Zu erkennen, wann es sinnvoll ist die Substitutionsregel anzuwenden und mit welcher Substitution, ist weitgehend Übungssache. In der nachfolgenden Tabelle sind einige Faustregeln für die Substitutionsregel festgehalten.

$\int f(x) dx$, und der Integrand $f(x)$ enthält	Substitution
(ganzzahlige) Potenzen von e^x	$t = e^x$
Potenzen von x und $\sqrt[n]{ax + b}$	$t = \sqrt[n]{ax + b}$
Potenzen von x und $\sqrt{1 - x^2}$	$x = \sin(t)$
Potenzen von x und $\sqrt{x^2 - 1}$	$x = \cosh(t)$
Potenzen von x und $\sqrt{x^2 + 1}$	$x = \sinh(t)$

Betrachten wir hierzu einige Beispiele.

Beispiel 7.31. (Substitution $t = e^x$)

$$(a) \int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx = \int \frac{1 + (e^x)^2}{e^x} dx$$

Wir substituieren

$$t = e^x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{dx} = e^x = t \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{t} dt.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx &= \left[\int \frac{1 + t^2}{t} \cdot \frac{1}{t} dt \right]_{t=e^x} = \left[\int \frac{t^2 + 1}{t^2} dt \right]_{t=e^x} \\ &= \left[\int \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \right]_{t=e^x} = \left[t - \frac{1}{t} + c \right]_{t=e^x} = e^x - \frac{1}{e^x} + c = e^x - e^{-x} + c. \end{aligned}$$

(b) Um das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\cosh(x)}{1 + e^x} dx$$

zu berechnen, drücken wir zunächst den $\cosh(x)$ durch die Exponentialfunktion aus, also $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Somit gilt

$$\int \frac{\cosh(x)}{1 + e^x} dx = \int \frac{1}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x} dx.$$

Wir substituieren nun $t = e^x$, also $\frac{dt}{dx} = e^x = t$ d.h. $dx = \frac{1}{t} dt$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{\cosh(x)}{1 + e^x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \int \frac{\left(t + \frac{1}{t}\right)}{(1+t)} \frac{1}{t} dt \right]_{t=e^x} = \left[\frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 1}{t^2(1+t)} dt \right]_{t=e^x} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t^2(1+t)} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2(1+t)} dt \right]_{t=e^x} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2(1+t)} dt \right]_{t=e^x} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(|1+t|) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2(1+t)} dt \right]_{t=e^x}.$$

Dabei dürfen wir bei der Berechnung von $\int \frac{1}{1+t} dt$ die Integrationskonstante weglassen, weil in dem verbleibenden Integral $\int \frac{1}{t^2(1+t)} dt$ noch eine Integrationskonstante enthalten ist.

Unklar ist noch, wie man das verbleibende Integral

$$\int \frac{1}{t^2(1+t)} dt$$

berechnet. Dieses erfordert die Methode der Partialbruchzerlegung, die wir in Teilkapitel 7.6 besprechen.

Beispiel 7.32. (Substitution $t = \sqrt[n]{ax+b}$)

(a) Um das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

zu berechnen, substituieren wir $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = t^2 + 1$, und somit gilt

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \Leftrightarrow \quad dx = 2t dt.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx &= \left[\int \frac{t^2+1}{t} 2t dt \right]_{t=\sqrt{x-1}} = \left[2 \int (t^2+1) dt \right]_{t=\sqrt{x-1}} \\ &= \left[2 \left(\frac{1}{3} t^3 + t + c \right) \right]_{t=\sqrt{x-1}} = \left[\frac{2}{3} t^3 + 2t + 2c \right]_{t=\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + \tilde{c} \end{aligned}$$

mit der neuen Integrationskonstante $\tilde{c} := 2c$. Im letzten Schritt haben wir $(x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$ genutzt.

(b) Um das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx$$

zu berechnen setzen wir

$$\left(t = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow x = t^3 - 1 \right) \implies \left(\frac{dx}{dt} = 3t^2 \Leftrightarrow dx = 3t^2 dt \right).$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx &= \left[\int \frac{t}{t^3-1} 3t^2 dt \right]_{t=\sqrt[3]{x+1}} = \left[3 \int \frac{t^3}{t^3-1} dt \right]_{t=\sqrt[3]{x+1}} \\ &= \left[3 \int \frac{(t^3-1)+1}{t^3-1} dt \right]_{t=\sqrt[3]{x+1}} = \left[3 \int \left(1 + \frac{1}{t^3-1} \right) dt \right]_{t=\sqrt[3]{x+1}} \\ &= \left[3 \int 1 dt + 3 \int \frac{1}{t^3-1} dt \right]_{t=\sqrt[3]{x+1}} = \left[3t + 3 \int \frac{1}{t^3-1} dt \right]_{t=\sqrt[3]{x+1}}. \end{aligned}$$

Wir können bei der Berechnung des ersten unbestimmten Integrals $\int 1 dt$ die Integrationskonstante weglassen, weil in dem zweiten unbestimmten Integral $\int \frac{1}{t^3-1} dt$ noch eine Integrationskonstante enthalten ist.

Unklar ist noch, wie man der verbleibende Integral

$$\int \frac{1}{t^3-1} dt$$

berechnet. Dieses erfolgt ebenfalls mit der Methode der Partialbruchzerlegung, die wir in Teilkapitel 7.6 besprechen.

Beispiel 7.33. (Substitution $x = \sin(t)$)

(a) Um das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

zu berechnen, setzen wir

$$\begin{aligned} \left(x = \sin(t) \iff t = \arcsin(x) \right) &\implies \sqrt{1-x^2} = \cos(t), \\ \left(\frac{dx}{dt} = \cos(t) \iff dx = \cos(t) dt \right) &. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\int \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \cos(t) dt \right]_{t=\arcsin(x)} = \left[\int \sin^2(t) dt \right]_{t=\arcsin(x)}. \quad (7.13)$$

Das Integral

$$\int \sin^2(t) dt = \int \sin(t) \sin(t) dt$$

kann mit partieller Integration mit $u'(t) = \sin(t)$, $v(t) = \sin(t)$ und somit $u(t) = -\cos(t)$ und $v'(t) = \cos(t)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int \sin^2(t) dt &= \int \sin(t) \sin(t) dt = -\cos(t) \sin(t) - \int (-\cos(t)) \cos(t) dt \\ &= -\cos(t) \sin(t) + \int \cos^2(t) dt. \end{aligned}$$

Addition von $\int \sin^2(t) dt$ auf beiden Seiten und $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ liefert

$$\begin{aligned} 2 \int \sin^2(t) dt &= -\cos(t) \sin(t) + \int \cos^2(t) dt + \int \sin^2(t) dt \\ &= -\cos(t) \sin(t) + \int [\cos^2(t) + \sin^2(t)] dt \\ &= -\cos(t) \sin(t) + \int 1 dt \\ &= -\cos(t) \sin(t) + t + c \\ &= t - \cos(t) \sin(t) + c \end{aligned}$$

und somit

$$\int \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} (t - \cos(t) \sin(t) + c). \quad (7.14)$$

Wir ersetzen noch den Cosinus durch

$$\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2(t)} \quad (\text{da } \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1)$$

und erhalten somit

$$\int \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \sin(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} + c \right).$$

Bei der Rücksubstitution finden wir nun wegen $\sin(\arcsin(x)) = x$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left[\int \sin^2(t) dt \right]_{t=\arcsin(x)} \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(t - \sin(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} + c \right) \right]_{t=\arcsin(x)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) - x \sqrt{1 - x^2} + c \right). \end{aligned}$$

(b) Um das unbestimmte Integral

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

zu berechnen, setzen wir

$$\begin{aligned} (x = \sin(t) \iff t = \arcsin(x)) &\implies \cos(t) = \sqrt{1-x^2}, \\ \left(\frac{dx}{dt} = \cos(t) \iff dx = \cos(t) dt\right) &. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\int \sin^2(t) \cos(t) \cdot \cos(t) dt \right]_{t=\arcsin(x)} \\ &= \left[\int (\sin(t) \cos(t))^2 dt \right]_{t=\arcsin(x)} \\ &= \left[\frac{1}{4} \int \sin^2(2t) dt \right]_{t=\arcsin(x)}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem

$$\begin{aligned} \underbrace{\sin(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t)} &= \sin(t+t) = \sin(2t) \\ &= 2 \sin(t) \cos(t) \\ \iff \sin(t) \cos(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t) \end{aligned} \quad (7.16)$$

benutzt haben.

Mit der Substitution $y = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 2 \iff dt = \frac{1}{2} dy$, erhält man weiter

$$\left[\frac{1}{4} \int \sin^2(2t) dt \right]_{t=\arcsin(x)} = \left[\frac{1}{8} \int \sin^2(y) dy \right]_{y=2 \arcsin(x)}. \quad (7.17)$$

Das Integral auf der rechten Seite wurde bereits im vorigen Beispiel berechnet und wir erhielten (siehe (7.14))

$$\int \sin^2(y) dy = \frac{1}{2} (y - \cos(y) \sin(y) + c). \quad (7.18)$$

Damit folgt aus (7.15), (7.17) und (7.18), dass

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{8} \int \sin^2(y) dy \right]_{y=2 \arcsin(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{16} \left(y - \cos(y) \sin(y) + c \right) \right]_{y=2 \arcsin(x)} \\
&= \left[\frac{1}{16} y - \frac{1}{16} \cos(y) \sin(y) + \frac{c}{16} \right]_{y=2 \arcsin(x)} \\
&= \frac{1}{8} \arcsin(x) - \frac{1}{16} \cos(2 \arcsin(x)) \sin(2 \arcsin(x)) + \frac{c}{16}. \quad (7.19)
\end{aligned}$$

Wir nutzen die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(2w) &= \sin(w + w) = \sin(w) \cos(w) + \sin(w) \cos(w) \\
&= 2 \sin(w) \cos(w) = 2 \sin(w) \sqrt{1 - \sin^2(w)}, \\
\cos(2w) &= \cos(w + w) = \cos^2(w) - \sin^2(w) \\
&= 1 - \sin^2(w) - \sin^2(w) = 1 - 2 \sin^2(w),
\end{aligned}$$

wobei wir $\cos(w) = \sqrt{1 - \sin^2(w)}$ genutzt haben, um weiter zu vereinfachen. Wegen $\sin(\arcsin(x)) = x$ folgt aus den obigen Formeln

$$\sin(2 \arcsin(x)) = 2x \sqrt{1 - x^2} \quad \text{und} \quad \cos(2 \arcsin(x)) = 1 - 2x^2.$$

Einsetzen in (7.19) liefert

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \frac{1}{8} \arcsin(x) - \frac{1}{16} (1 - 2x^2) 2x \sqrt{1 - x^2} + \frac{c}{16} \\
&= \frac{1}{8} \arcsin(x) - \frac{1}{8} ((1 - x^2) - x^2) x (1 - x^2)^{1/2} + \frac{c}{16} \\
&= \frac{1}{8} \arcsin(x) - \frac{1}{8} x (1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{8} x^3 (1 - x^2)^{1/2} + \tilde{c}
\end{aligned}$$

mit der neuen Integrationskonstanten $\tilde{c} := c/16$.

Beispiel 7.34. (Substitution $x = \cosh(t)$)

(a) Um das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx, \quad \text{wobei } x > 1,$$

zu berechnen, substituieren wir für $x > 1$

$$\left(x = \cosh(t) \text{ mit } t > 0 \iff t = \operatorname{Arcosh}(x) \text{ mit } x > 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \implies \quad & \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2(t) - 1} = \sinh(t), \\ & \left(\frac{dx}{dt} = \sinh(t) \iff dx = \sinh(t) dt \right), \end{aligned}$$

wobei wir $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ genutzt haben. $\text{Arcosh} = \cosh^{-1}$ (genannt Areacossinus) ist die Umkehrfunktion von \cosh . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \left[\int \frac{1}{\sinh(t)} \sinh(t) dt \right]_{t=\text{Arcosh}(x)} = \left[\int 1 dt \right]_{t=\text{Arcosh}(x)} \\ &= [t + c]_{t=\text{Arcosh}(x)} = \text{Arcosh}(x) + c. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass für $x > 1$ die Funktion Arcosh eine Stammfunktion von $1/\sqrt{x^2 - 1}$ ist, oder umgekehrt, dass $1/\sqrt{x^2 - 1}$ die Ableitung von Arcosh ist.

(b) Um das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx, \quad \text{wobei } x > 1,$$

zu berechnen, substituieren wir für $x > 1$

$$\begin{aligned} & \left(x = \cosh(t) \text{ mit } t > 0 \iff t = \text{Arcosh}(x) \text{ mit } x > 1 \right) \\ \implies \quad & \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2(t) - 1} = \sinh(t), \\ & \left(\frac{dx}{dt} = \sinh(t) \iff dx = \sinh(t) dt \right), \end{aligned}$$

wobei wir $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ genutzt haben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \left[\int \sinh(t) \sinh(t) dt \right]_{t=\text{Arcosh}(x)} \\ &= \left[\int \sinh^2(t) dt \right]_{t=\text{Arcosh}(x)}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Mit partieller Integration erhält man mit $u'(t) = \sinh(t)$ und $v(t) = \sinh(t)$ und somit $u(t) = \cosh(t)$ und $v'(t) = \cosh(t)$

$$\begin{aligned} \int \sinh^2(t) dt &= \cosh(t) \sinh(t) - \int \cosh(t) \cosh(t) dt \\ &= \cosh(t) \sinh(t) - \int \cosh^2(t) dt. \end{aligned}$$

Wir addieren nun auf beiden Seiten $\int \sinh^2(t) dt$ und nutzen

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1. \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} 2 \int \sinh^2(t) dt &= \cosh(t) \sinh(t) - \int \cosh^2(t) dt + \int \sinh^2(t) dt \\ &= \cosh(t) \sinh(t) - \int (\cosh^2(t) - \sinh^2(t)) dt \\ &= \cosh(t) \sinh(t) - \int 1 dt \\ &= \cosh(t) \sinh(t) - t + c. \end{aligned}$$

Also finden wir

$$\int \sinh^2(t) dt = \frac{1}{2} \cosh(t) \sinh(t) - \frac{t}{2} + \frac{c}{2}.$$

Wir drücken noch $\sinh(t)$ mittels (7.21) durch $\sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1}$ aus.

$$\int \sinh^2(t) dt = \frac{1}{2} \cosh(t) \sqrt{\cosh^2(t) - 1} - \frac{t}{2} + \frac{c}{2}.$$

Einsetzen in (7.20) und Ausnutzen von $\cosh(\operatorname{Arcosh}(x)) = x$ liefert

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \left[\int \sinh^2(t) dt \right]_{t=\operatorname{Arcosh}(x)} \\ &= \left[\frac{1}{2} \cosh(t) \sqrt{\cosh^2(t) - 1} - \frac{t}{2} + \frac{c}{2} \right]_{t=\operatorname{Arcosh}(x)} \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{Arcosh}(x) + \tilde{c} \end{aligned}$$

mit der neuen Integrationskonstanten $\tilde{c} := c/2$.

Beispiel 7.35. (Substitution von $x = \sinh(x)$)

(a) Um das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

zu berechnen, substituieren wir $x = \sinh(t)$ und erhalten wegen

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

für diese Substitution

$$\begin{aligned} \left(x = \sinh(t) \quad \Longleftrightarrow \quad t = \operatorname{Arsinh}(x) \right) \\ \implies \quad \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2(t) + 1} = \cosh(t), \\ \left(\frac{dx}{dt} = \cosh(t) \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \cosh(t) dt \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\operatorname{Arsinh} = \sinh^{-1}$ (genannt Areasinus) die Umkehrfunktion von \sinh . Also gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left[\int \frac{1}{\cosh(t)} \cosh(t) dt \right]_{t=\operatorname{Arsinh}(x)} = \left[\int 1 dt \right]_{t=\operatorname{Arsinh}(x)} \\ &= [t + c]_{t=\operatorname{Arsinh}(x)} = \operatorname{Arsinh}(x) + c. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass Arsinh eine Stammfunktion von $1/\sqrt{x^2 + 1}$ ist, oder umgekehrt, dass $1/\sqrt{x^2 + 1}$ die Ableitung von Arsinh ist.

(b) Um das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx, \quad \text{wobei } x > 0,$$

zu berechnen, substituieren wir $x = \sinh(t)$ und erhalten wegen

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

für diese Substitution

$$\begin{aligned} \left(x = \sinh(t) \text{ mit } t > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \operatorname{Arsinh}(x) \text{ mit } x > 0 \right) \\ \implies \quad \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2(t) + 1} = \cosh(t), \\ \left(\frac{dx}{dt} = \cosh(t) \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \cosh(t) dt \right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx &= \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \left[\int \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} \cosh(t) dt \right]_{t=\operatorname{Arsinh}(x)} \\ &= \left[\int \frac{\cosh^2(t)}{\sinh(t)} dt \right]_{t=\operatorname{Arsinh}(x)}. \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir den Cosinus Hyperbolicus und den Sinus Hyperbolicus durch ihre Definitionen mit der Exponentialfunktion $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$ und $\sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$. Wir erhalten

$$\int \frac{\cosh^2(t)}{\sinh(t)} dt = \int \frac{\left(\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right)^2}{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})} dt = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{e^t - e^{-t}} dt,$$

wobei wir $2 e^t e^{-t} = 2 e^{t-t} = 2 e^0 = 2$ genutzt haben. Wir substituieren nun $y = e^t$, also $t = \ln(y)$, $dy/dt = e^t = y \Leftrightarrow dt = dy/y$, und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{e^t - e^{-t}} dt &= \left[\frac{1}{2} \int \frac{y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}}{y - \frac{1}{y}} \frac{1}{y} dy \right]_{y=e^t} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{y^4 - y^2} dy \right]_{y=e^t} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int \frac{(y^4 - y^2) + (3y^2 + 1)}{y^4 - y^2} dy \right]_{y=e^t} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{3y^2 + 1}{y^4 - y^2} \right) dy \right]_{y=e^t} \\ &= \left[\frac{1}{2} \int 1 dy + \frac{1}{2} \int \frac{3y^2 + 1}{y^4 - y^2} dy \right]_{y=e^t} \\ &= \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \int \frac{3y^2 + 1}{y^4 - y^2} dy \right]_{y=e^t}. \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral

$$\int \frac{3y^2 + 1}{y^4 - y^2} dy$$

können wir mit der Methode der Partialbruchzerlegung aus dem nächsten Teilkapitel lösen.

7.6 Integration rationaler Funktionen

Um rationale Funktionen zu integrieren, benötigt man die Methode der Partialbruchzerlegung, die wir in diesem Teilkapitel kennenlernen werden. Als Ausgangspunkt halten wir fest, welche rationalen Funktionen wir bis jetzt bereits integrieren können.

Bemerkung 7.36. (Stammfunktionen rationaler Funktionen)

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx = \ln(|x-a|) + c, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + c,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$(3) \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c, \quad \text{wobei } a > 0$$

Begründung: Mit der Substitution $x = au$, $dx = a du$ und Beispiel 7.17 (f) folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \left[\int \frac{1}{(au)^2+a^2} a du \right]_{u=x/a} = \left[\frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2+1} du \right]_{u=x/a} \\ &= \left[\frac{1}{a} \arctan(u) + c \right]_{u=x/a} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c. \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + c, \quad \text{wobei } a > 0$$

Begründung: Mit der Substitution $u = x^2 + a^2$, $du/2 = x dx$, folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+a^2} dx &= \left[\int \frac{1}{u} \frac{du}{2} \right]_{u=x^2+a^2} = \left[\frac{1}{2} \ln(|u|) + c \right]_{u=x^2+a^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(|x^2+a^2|) + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + c \quad (\text{weil } x^2+a^2 > 0). \end{aligned}$$

Die **Idee der Partialbruchzerlegung** ist, dass sich (komplizierte) rationale Funktionen häufig in eine Summe einfacher rationaler Funktionen zerlegen lassen, welche man dann jeweils einfach integrieren kann.

Methode 7.37. (Partialbruchzerlegung)

Die Methode der **Partialbruchzerlegung** dient zur **Integration rationaler Funktionen**

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{mit} \quad D_f := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\},$$

wobei p und q Polynomfunktionen sind mit $\text{Grad}(q) \geq 1$.

Schritt 1: Polynomdivision, falls $\text{Grad}(p) \geq \text{Grad}(q)$ (Zählergrad \geq Nennergrad)

Schritt 2: Faktorisierung des Nennerpolynoms $q(x)$

Schritt 3: Partialbruchzerlegung

Für jeden Faktor $(x - a)^m$ bzw. jeden Faktor $((x - a)^2 + b^2)^n$ in der Faktorisierung von $q(x)$ wählen wir die in der Tabelle angegebene Summe von Partialbrüchen. Diese Summen von Partialbrüchen für die einzelnen Faktoren des Nennerpolynoms werden aufsummiert. Dabei müssen alle Konstanten unterschiedlich benannt sein.

Faktor in $q(x)$	Ansatz
$(x - a)^m$	$\frac{C_1}{x - a} + \frac{C_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{C_m}{(x - a)^m}$
$((x - a)^2 + b^2)^n$	$\frac{A_1 x + B_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{A_2 x + B_2}{((x - a)^2 + b^2)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{((x - a)^2 + b^2)^n}$

Wir setzen diesen Ansatz gleich der (nach der Polynomdivision übrig gebliebenen) rationalen Funktion mit dem faktorisierten Nenner und formen geeignet um, um die Konstanten A_i, B_i, C_i zu bestimmen.

Schritt 4: Integration der einzelnen Summanden in der Partialbruchzerlegung

Einzelne Schritte können je nach Situation entfallen, falls die rationale Funktion bereits in der passenden Form vorliegt.

Schritt 3 benötigt ein Beispiel, damit klar ist, wie die Methode zu verstehen ist: Für $p(x)/q(x)$ mit $\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q)$ und

$$q(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{m_k} \cdot ((x - a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdot \dots \cdot ((x - a_\ell)^2 + b_\ell^2)^{n_\ell}$$

würden wir also den folgende Ansatz erhalten:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{C_1^{(1)}}{x - x_1} + \frac{C_2^{(1)}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{C_{m_1}^{(1)}}{(x - x_1)^{m_1}}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{C_1^{(k)}}{x - x_k} + \frac{C_2^{(k)}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{C_{m_k}^{(k)}}{(x - x_k)^{m_k}} \\
& + \frac{A_1^{(1)}x + B_1^{(1)}}{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \frac{A_2^{(1)}x + B_2^{(1)}}{((x - a_1)^2 + b_1^2)^2} + \dots + \frac{A_{n_1}^{(1)}x + B_{n_1}^{(1)}}{((x - a_1)^2 + b_1^2)^{n_1}} \\
& + \dots + \frac{A_1^{(\ell)}x + B_1^{(\ell)}}{(x - a_\ell)^2 + b_\ell^2} + \frac{A_2^{(\ell)}x + B_2^{(\ell)}}{((x - a_\ell)^2 + b_\ell^2)^2} + \dots + \frac{A_{n_\ell}^{(\ell)}x + B_{n_\ell}^{(\ell)}}{((x - a_\ell)^2 + b_\ell^2)^{n_\ell}},
\end{aligned}$$

wobei die oberen Indizes der Konstanten anzeigen, zu welchem Faktor im Nenner die Konstanten gehören. (Wir müssen sicherstellen, dass alle Konstanten in den einzelnen Termen verschiedene Namen haben; sonst bekommen wir falsche Ergebnisse!)

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 7.38. (Partialbruchzerlegung)

$$(a) \int \frac{2x^4 + x^2 - 3}{x^2 + 1} dx$$

Schritt 1: Polynomdivision

$$\begin{array}{r}
(2x^4 \quad + x^2 \quad - 3) : (x^2 + 1) = 2x^2 - 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \\
\underline{-(2x^4 \quad + 2x^2)} \\
\quad \quad \quad -x^2 \quad - 3 \\
\quad \quad \quad \underline{-(-x^2 \quad - 1)} \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad -2
\end{array}$$

Schritt 2 und *Schritt 3* entfallen, da der Nenner keine reellen Nullstellen hat und bereits faktorisiert ist und da das Restpolynom

$$\frac{2}{x^2 + 1}$$

bereits in der (mit der Partialbruchzerlegung) gesuchten Form vorliegt.

Schritt 4: Integration der Summanden

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^4 + x^2 - 3}{x^2 + 1} dx &= \int \left(2x^2 - 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx \\
&= \int (2x^2 - 1) dx - \int \frac{2}{x^2 + 1} dx \\
&= \frac{2}{3}x^3 - x - 2 \arctan(x) + c
\end{aligned}$$

$$(b) \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

Schritt 1 entfällt, da Zählergrad < Nennergrad.

Schritt 2: Faktorisierung des Nenners

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$

(Durch Probieren findet man die Nullstelle $x = 1$ des Nenners; danach berechnet man die Faktorisierung mittels Polynomdivision.)

Schritt 3: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} &= \frac{(x^2 - 1) + (2x^2 + 2)}{(x - 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} + \frac{2(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{2}{x - 1} \\ &= \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2}{x - 1} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Hier haben wir mittels geschickter Umformungen die rationale Funktion in die „richtige Form“ (7.22), die mit der Partialbruchzerlegung gesucht wird, gebracht. Wir lernen weiter unten, wie man „systematisch“ vorgeht, um die Partialbruchzerlegung zu berechnen.

Schritt 4: Integration der Summanden

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \int \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2}{x - 1} \right) dx \\ &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x - 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + 2 \ln(|x - 1|) + c \end{aligned}$$

Wie findet man nun in Schritt 3 im Allgemeinen die Koeffizienten in den Zählern im Ansatz der Partialbruchzerlegung? Hier gibt es drei Vorgehensweisen:

Koeffizientenvergleich: Wir multiplizieren mit dem Nennerpolynom $q(x)$. Das Zählerpolynom $p(x)$ ist dann gleich demjenigen Polynom, welches man als Zähler erhält, wenn man im Ansatz alle Brüche auf den Hauptnenner bringt. Diese Polynome sind gleich, wenn in ihnen die gleichen Potenzen von x auftreten und

deren Koeffizienten jeweils gleich sind. Die so erhaltenen Gleichungen für die Koeffizienten liefern ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten.

Einsetzen spezieller Werte für x : Durch das Einsetzen von speziellen Werte von x , die keine Nullstellen von $q(x)$ sind, erhalten wir jeweils eine Gleichung für die Konstanten. Haben wir N Konstanten und erhalten wir durch Einsetzen von N verschiedenen Werten von x also N solche Gleichungen und sind diese Gleichungen „linear unabhängig“, so erhalten wir ebenfalls ein lineares Gleichungssystem, aus dem wir die Konstanten bestimmen können.

Grenzwertverfahren: Man kann einzelne Konstanten bestimmen, indem man beide Seiten, also $p(x)/q(x)$ und den Ansatz, mit der Hauptnenner, also dem Nennerpolynom $q(x)$, multipliziert und dann für jeder Nullstelle a des Nennerpolynoms $q(x)$ den Grenzwert $x \rightarrow a$ bildet.

Wir illustrieren die verschiedenen Methoden unten an einem Beispiel. Das Grenzwertverfahren ist meist die schnellste Variante; allerdings muss es manchmal mit anderen Vorgehensweisen kombiniert werden.

Beispiel 7.39. (Partialbruchzerlegung mit den verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten)

$$\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x-2}{x(x-1)}$$

$$\text{Ansatz:} \quad \frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad (7.23)$$

Koeffizientenvergleich: Wir multiplizieren den Ansatz (7.23) mit dem Hauptnenner $q(x) = x(x-1)$,

$$x-2 = A(x-1) + Bx \quad \iff \quad x-2 = (A+B)x - A,$$

und wir lesen mittels Koeffizientenvergleich ab, dass

$$(A+B=1 \text{ und } -A=-2) \quad \iff \quad (B=1-A \stackrel{A=2}{=} 1-2=-1 \text{ und } A=2).$$

Also gilt $A=2$ und $B=-1$, d.h.

$$\frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{2}{x} + \frac{-1}{x-1} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Einsetzen spezieller Werte für x : Wir setzen in den Ansatz (7.23) z.B. jeweils

$x = 2$ und $x = -1$ ein (beide sind **keine** Nullstellen des Nenners) und erhalten:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2}A + B \\ -\frac{3}{2} = -A - \frac{1}{2}B \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}A + B = 0 \quad \text{(I)} \\ -2A - B = -3 \quad \text{(II)} \end{array} \right\}$$

Nun addieren wir die zweite Gleichung zu der ersten Gleichung:

$$\text{(I) + (II): } -\frac{3}{2}A = -3 \iff A = 2$$

Durch Einsetzen von $A = 2$ in (I) findet man $1 + B = 0$, also $B = -1$. Wir finden also ebenfalls

$$\frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Grenzwertverfahren: Wir multiplizieren den Ansatz (7.23) mit dem Hauptnenner $q(x) = x(x-1)$ und erhalten

$$x-2 = A(x-1) + Bx.$$

Der Grenzwert $x \rightarrow 1$ liefert nun $-1 = B$, und der Grenzwert $x \rightarrow 0$ liefert nun $-2 = -A$, also $A = 2$. Auch mit dieser Methode erhalten wir also

$$\frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Von nun an nutzen wir nur das Grenzwertverfahren.

Beispiel 7.40. (Partialbruchzerlegung mit Grenzwertverfahren)

$$(a) \frac{4x^2 - 4x - 2}{x^3 - x}$$

Schritt 1: entfällt, da Zählergrad = 2 < 3 = Nennergrad

Schritt 2: Faktorisierung des Nenners: $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$

$$\text{Schritt 3: Ansatz: } \frac{4x^2 - 4x - 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Wir multiplizieren den Ansatz mit $q(x) = x(x+1)(x-1)$:

$$4x^2 - 4x - 2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

Der Grenzwert $x \rightarrow 0$ liefert $-2 = -A$, d.h. $A = 2$.

Der Grenzwert $x \rightarrow -1$ liefert $6 = 2B$, d.h. $B = 3$.

Der Grenzwert $x \rightarrow 1$ liefert $-2 = 2C$, d.h. $C = -1$.

Also gilt:

$$\frac{4x^2 - 4x - 2}{x^3 - x} = \frac{4x^2 - 4x - 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

(b) $\frac{x^2}{(x-1)^3}$

Schritt 1: entfällt, da Zählergrad = 2 < 3 = Nennergrad

Schritt 2: entfällt, da der Nenner bereits faktorisiert ist

Schritt 3: Ansatz:
$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

Wir multiplizieren den Ansatz mit dem Hauptnenner $q(x) = (x-1)^3$ und erhalten

$$x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C. \quad (7.24)$$

Der Grenzübergang $x \rightarrow 1$ liefert $1 = C$, also $C = 1$. Wir setzen nun $C = 1$ zunächst in (7.24) ein:

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)^2 + B(x-1) + 1 \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 1}_{=(x-1)(x+1)} &= A(x-1)^2 + B(x-1) \quad \Big| : (x-1) \\ \Rightarrow x+1 &= A(x-1) + B \end{aligned} \quad (7.25)$$

Der Grenzübergang $x \rightarrow 1$ in (7.25) liefert $2 = B$, also $B = 2$. $B = 2$ in (7.25) einsetzen liefert

$$x+1 = A(x-1) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = A(x-1) \quad \Big| : (x-1) \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Also finden wir

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

(c) $\frac{x}{(x+2)^2(x-1)}$

Schritt 1: entfällt, da Zählergrad = 2 < 3 = Nennergrad

Schritt 2: entfällt, da der Nenner bereits faktorisiert ist

Schritt 3: Ansatz:
$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \quad (7.26)$$

Wir multiplizieren (7.26) mit dem Hauptnenner $(x+2)^2(x-1)$ und erhalten

$$x = A(x+2)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x-1). \quad (7.27)$$

Der Grenzübergang $x \rightarrow 1$ in (7.27) liefert $1 = 9A$, d.h. $A = 1/9$.

Der Grenzübergang $x \rightarrow -2$ in (7.27) liefert $-2 = -3C$, d.h. $C = 2/3$.

Wir setzen $A = 1/9$ und $C = 2/3$ in (7.27) ein:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{9}(x+2)^2 + B(x+2)(x-1) + \frac{2}{3}(x-1) \\ \implies B(x+2)(x-1) &= x - \frac{1}{9}(x+2)^2 - \frac{2}{3}(x-1) \\ &= x - \frac{1}{9}(x+2)^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}(x+2)^2 \\ &= \frac{1}{3}(x+2) - \frac{1}{9}(x+2)^2 \\ &= (x+2) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}x - \frac{2}{9} \right) \\ &= (x+2) \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}x \right) \\ &= -\frac{1}{9}(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

Division durch $(x+2)(x-1)$ liefert nun $B = -1/9$. Wir finden also

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+2)^2}.$$

$$(d) \quad \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x^2 + 1)}$$

Schritt 1: entfällt, da Zählergrad = 2 < 3 = Nennergrad

Schritt 2: entfällt, da der Nenner bereits faktorisiert ist

Für diese rationale Funktion hatten wir in Beispiel 7.38 (b) mit „geschickten Umformungen“ die Partialbruchzerlegung ausgerechnet. Wir wollen dieses nun systematisch machen:

$$\text{Schritt 3: Ansatz: } \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner $q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$:

$$3x^2 + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \quad (7.28)$$

Der Grenzwert für $x \rightarrow 1$ liefert $4 = 2A$, d.h. $A = 2$.

Wir setzen $A = 2$ in (7.28) ein und formen um:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 1 &= 2(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\ \iff x^2 - 1 &= (Bx + C)(x - 1) \\ \iff (x - 1)(x + 1) &= (Bx + C)(x - 1) \\ \iff_{x \neq 1} x + 1 = Bx + C &\implies B = 1 \text{ und } C = 1 \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\frac{3x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

Zuletzt betrachten wir noch ein Beispiel einer rationalen Funktion deren Partialbruchzerlegung bereits bekannt ist und berechnen das Integral.

Beispiel 7.41. (Integration rationaler Funktionen)

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 2} dx = \int \frac{x + 2}{(x - 1)^2 + 1} dx$$

und wir sehen, dass die Partialbruchzerlegung bereits vorliegt. Mit der Substitution $u = x - 1 \iff u + 1 = x$, also $dx = du$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 2}{(x - 1)^2 + 1} dx &= \left[\int \frac{u + 3}{u^2 + 1} du \right]_{u=x-1} \\ &= \left[\int \frac{u}{u^2 + 1} du + \int \frac{3}{u^2 + 1} du \right]_{u=x-1} \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + 3 \arctan(u) + c \right]_{u=x-1} \\ &= \frac{1}{2} \ln((x - 1)^2 + 1) + 3 \arctan(x - 1) + c. \end{aligned}$$

7.7 Uneigentliche Riemann-Integrale*

Bei sogenannten „uneigentlichen“ Riemann-Integralen handelt es sich um Integrale, bei denen der Integrationsbereich unbeschränkt ist oder bei denen der Integrand unbeschränkt ist.

Wir beginnen mit zwei motivierenden Beispielen.

Beispiel 7.42. (uneigentliche Integrale)

(a) Für $R > 0$ gilt

$$\int_0^R e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=R} = -e^{-R} + e^0 = 1 - e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1.$$

Mit diesem Grenzwert könnten wir definieren

$$\int_0^\infty e^{-x} dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R}) = 1.$$

(b) Für ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) - x \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} -1,$$

wobei wir genutzt haben, dass mit der zweiten Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} (\varepsilon \cdot \ln(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\ln(\varepsilon)}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{(\ln(\varepsilon))'}{(1/\varepsilon)'} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} -\varepsilon = 0.$$

Also könnten wir definieren

$$\int_0^1 \ln(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon \right] = -1.$$

Im Beispiel 7.42 (a) hatten wir einen **unbeschränkten Integrationsbereich** (nämlich $[0, \infty[$), und in Beispiel 7.42 (b) hatten wir einen **unbeschränkten Integranden** (nämlich $\ln(x)$) auf einem beschränkten Integrationsbereich (nämlich $[0, 1]$). Wir nutzen die in den beiden Beispielen beobachteten Vorgehensweisen, in der nächsten Definition.

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

Definition 7.43. (uneigentliche Integrale)

- (1) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest, und sei entweder $b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$ oder $b = \infty$. Ist $f \in \mathcal{R}([a, z])$ für jedes $z \in [a, b[$, so schreiben wir

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{z \nearrow b} \int_a^z f(x) \, dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

- (2) Sei $b \in \mathbb{R}$ fest, und sei entweder $a \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ oder $a = -\infty$. Ist $f \in \mathcal{R}([y, b])$ für jedes $y \in]a, b]$, so schreiben wir

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{y \searrow a} \int_y^b f(x) \, dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 7.44. (uneigentliche Integrale)

(a) $\int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$ nach Beispiel 7.42 (a)

(b) $\int_{-\infty}^0 e^{-x} \, dx$ existiert nicht, denn für y mit $-\infty < y \leq 0$ gilt

$$\int_y^0 e^{-x} \, dx = \left[-e^{-x} \right]_{x=y}^{x=0} = -1 + e^{-y} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \infty.$$

(c) $\int_\pi^\infty \cos(x) \, dx$ existiert nicht, denn für z mit $\pi \leq z < \infty$ gilt

$$\int_\pi^z \cos(x) \, dx = \left[\sin(x) \right]_{x=\pi}^{x=z} = \sin(z) - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = \sin(z),$$

und der Grenzwert für $z \rightarrow \infty$ existiert nicht!

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx$ existiert nicht, da für z mit $1 \leq z < \infty$ gilt

$$\int_1^z \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln(x) \right]_{x=1}^{x=z} = \ln(z) - \ln(1) = \ln(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty.$$

$$(e) \int_0^1 \ln(x) \, dx = -1 \quad \text{nach Beispiel 7.42 (b)}$$

$$(f) \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx \quad \text{existiert nicht, da für } y \text{ mit } 0 < y \leq 1 \text{ gilt}$$

$$\int_y^1 \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln(x) \right]_{x=y}^{x=1} = \ln(1) - \ln(y) = -\ln(y) \xrightarrow{y \searrow 0} +\infty.$$

Der nächste Hilfssatz stellt Resultate über uneigentliche Integrale über Potenzen von x zusammen.

Hilfssatz 7.45. (uneigentliche Integrale über Potenzen von x)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt

$$(1) \int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha \leq -1, \\ \frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$$

$$(2) \int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha < -1, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -1. \end{cases}$$

Beweis von Hilfssatz 7.45:

(1) Der Fall $\alpha = -1$ wurde bereits in Beispiel 7.44 (f) behandelt. Sei also $\alpha \neq -1$. Dann gilt für ε mit $0 < \varepsilon \leq 1$

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha \, dx = \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1} (1 - \varepsilon^{\alpha+1})$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha < -1, \\ \frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$$

(2) Der Fall $\alpha = -1$ wurde bereits in Beispiel 7.44 (d) behandelt. Sei also $\alpha \neq -1$. Dann gilt für R mit $1 \leq R < \infty$

$$\int_1^R x^\alpha \, dx = \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=R} = \frac{1}{\alpha+1} (R^{\alpha+1} - 1)$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha < -1, \\ \infty & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$$

Damit sind alle Fälle in Hilfssatz 7.45 bewiesen. □

Als Nächstes betrachten wir Integrale über $] -\infty, \infty[$, also über ganz \mathbb{R} .

Bemerkung 7.46. (Integrale über $] -\infty, \infty[$)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \tag{7.29}$$

existiert genau dann, wenn

$$\text{sowohl } \int_{-\infty}^a f(x) \, dx \quad \text{als auch} \quad \int_a^{\infty} f(x) \, dx$$

existieren. Es gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{\infty} f(x) \, dx.$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig, d.h. der Wert des uneigentlichen Integrals (7.29) (wenn dieses existiert) hängt **nicht** von der Wahl von a ab.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 7.47. (Integrale über $] -\infty, \infty[$)

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi$, denn:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \left[\arctan(x) \right]_{x=0}^{x=z} = \arctan(z) - \arctan(0) \\ &= \arctan(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_y^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \left[\arctan(x) \right]_{x=y}^{x=0} = \arctan(0) - \arctan(y) \\ &= -\arctan(y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ existiert nicht, obwohl

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=-R}^{x=R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} (-R)^2 \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Fazit: Die Grenzübergänge gegen $+\infty$ und $-\infty$ müssen **getrennt** betrachtet werden!

Ein korrekter Lösungsweg lautet:

$$\int_0^R x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=R} = \frac{1}{2} R^2 - 0 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty.$$

Da $\int_0^{\infty} x dx$ nicht existiert, existiert $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ ebenfalls nicht.

Der nächste Satz erlaubt uns, die Existenz eines uneigentlichen Integrals zu untersuchen, indem wir das uneigentliche Integral über geeignet vereinfachte Funktion betrachten.

Satz 7.48. (Majoranten- und Minorantenkriterium)

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $a < b$. Für $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ gelte $f \in \mathcal{R}([c, d])$ für alle $c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < c < d < b$.

(1) **Majorantenkriterium:**

Falls es eine Funktion $g :]a, b[\rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass

(i) $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in]a, b[$ gilt und

(ii) $\int_a^b g(x) dx$ existiert,

dann existiert auch $\int_a^b f(x) dx$.

(2) **Minorantenkriterium:**

Falls es eine Funktion $h :]a, b[\rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass

(i) $0 \leq h(x) \leq f(x)$ für alle $x \in]a, b[$ gilt und

(ii) $\int_a^b h(x) \, dx$ nicht existiert,
dann existiert auch $\int_a^b f(x) \, dx$ nicht.

Man nennt die Funktion g in Satz 7.48 (1) eine **Majorante für f** und die Funktion h in Satz 7.48 (2) eine **Minorante für f** .

Betrachten wir hierzu drei Beispiele.

Beispiel 7.49. (Majoranten- und Minorantenkriterium)

(a) Anwendung des Majorantenkriteriums:

$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \, dx$ existiert, denn:

(i) Es gilt $|\sin(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq 1 =: g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad \text{und}$$

(ii) $\int_0^1 g(x) \, dx = \int_0^1 1 \, dx = 1$ existiert.

Nach dem Majorantenkriterium existiert somit auch $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \, dx$. (Die Majorante ist $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := 1$.)

(b) Anwendung des Majorantenkriteriums:

$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} \, dx$ existiert, denn:

(i) $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} =: g(x)$ für alle $x \in [1, \infty[$ und

(ii) $\int_1^\infty g(x) \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$ existiert nach Hilfssatz 7.45 (2).

Nach dem Majorantenkriterium existiert somit auch $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} \, dx$. (Die Majorante ist $g : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := 1/x^2$.)

(c) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ existiert, da für $R > 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_1^R \underbrace{\sin(x)}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=v(x)} dx \\ &= \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{=v(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=u(x)} \right]_{x=1}^{x=R} - \int_1^R \underbrace{(-\cos(x))}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{=v'(x)} dx \\ &= -\frac{1}{R} \cos(R) + \cos(1) - \int_1^R \frac{\cos(x)}{x^2} dx \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx, \end{aligned}$$

und das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ existiert nach Beispiel (b).

(d) Anwendung des Minorantenkriteriums:

$\int_1^\infty \frac{x - \frac{1}{2} \sin(x)}{x^2} dx$ existiert nicht, denn:

(i) Für alle $x \in [1, \infty[$ gilt:

$$\frac{x - \frac{1}{2} \sin(x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{2x} \sin(x)}{x} \geq \frac{1 - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{2x},$$

wobei wir genutzt haben, dass wegen $|\sin(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2x} \sin(x) \leq \frac{1}{2x} |\sin(x)| \leq \frac{1}{2x} \cdot |x| = \frac{1}{2x} \cdot x = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in [1, \infty[$$

gilt und somit

$$1 - \frac{1}{2x} \sin(x) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in [1, \infty[.$$

(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ existiert nach Hilfssatz 7.45 (2) nicht.

Nach dem Minorantenkriterium existiert $\int_1^\infty \frac{x - \frac{1}{2} \sin(x)}{x^2} dx$ nicht.

Teil III

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen erster Ordnung

In Teilkapitel 8.1 betrachten wir motivierende Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen ersten Ordnung und lernen die grundlegenden Definitionen kennen. Eine Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung, in der eine Variable (z.B. die Zeit t oder der Ort x) sowie eine noch unbekannte Funktion dieser Variablen (also z.B. $y(t)$ bzw. $y(x)$) und deren erste Ableitung (also z.B. $y'(t)$ bzw. $y'(x)$) vorkommen. Das Ziel ist, die unbekannte Funktion zu finden. Eine solche Differentialgleichung kann ebenso die Bewegung eines Objektes (als Funktion der Zeit) wie auch den radioaktiven Zerfall einer radioaktiven Substanz beschreiben.

In Teilkapitel 8.2 lernen wir die wichtige Methode der Trennung der Variablen kennen, mit der man eine ganze Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung lösen kann. In Teilkapitel 8.3 und Teilkapitel 8.4 untersuchen wir lineare Differentialgleichungen erster Ordnung näher. Wir werden sehen, wie man diese elegant lösen kann, indem man erst die zugehörige homogene Differentialgleichung löst und danach eine (beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung findet. Aus diesen beiden Bestandteilen kann man dann additiv die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung zusammenbauen.

8.1 Differentialgleichungen erster Ordnung: Definition und Beispiele

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel aus der Chemie und Physik.

Chemische Anwendung 8.1. (radioaktiver Zerfall)

Sei $u(t)$ die zur Zeit t vorhandene Menge einer zerfallenden radioaktiven Substanz mit Zerfallskonstante $\lambda > 0$. Für eine kleine Zeitspanne $h := \Delta t \neq 0$ gilt

$$u(t+h) - u(t) \approx -\lambda u(t) h,$$

sofern $|h|$ klein genug ist. Wir dividieren durch h und lassen h gegen 0 gehen:

$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = -\lambda u(t).$$

Dieses führt auf die Differentialgleichung

$$u'(t) = -\lambda u(t).$$

Sie ist daher ein **mathematisches Modell für den radioaktiven Zerfall**.

Nach diesem motivierenden Beispiel definieren wir nun, was eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist.

Zur Erinnerung: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(t, y) : t, y \in \mathbb{R}\}$

Definition 8.2. (gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Man nennt $y' = f(t, y)$ eine **gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung**. t heißt **unabhängige Variable**, und y heißt **abhängige Variable**.
- (2) $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Lösung** von $y' = f(t, y)$, falls
 - (i) y auf einem offenen Intervall I definiert und dort differenzierbar ist,
 - (ii) der Graph von y in D enthalten ist und
 - (iii) $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$ gilt.

Wir kürzen **Differentialgleichung** gelegentlich auch mit **DGL** ab. Das Wort „gewöhnlich“ wird häufig weggelassen, da wir nur gewöhnliche (und keine partiellen) Differentialgleichungen betrachten.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 8.3. (gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)

(a) $y' = y - t^2$ (oder ausführlicher: $y'(t) = y(t) - t^2$)

ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit

$$D := \mathbb{R}^2, \quad f(t, y) := y - t^2.$$

Für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := 2 + 2t + t^2 + ce^t,$$

eine Lösung, denn

$$y'(t) = 2 + 2t + ce^t = y(t) - t^2.$$

Also hat die Differentialgleichung nicht nur eine einzige Lösung, sondern es gibt eine ganze Lösungsschar. Wir werden sehen, dass dieses immer so ist.

(b) $y' = \ln(t)$ (oder ausführlicher $y'(t) = \ln(t)$)

ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit

$$D :=]0, \infty[\times \mathbb{R}, \quad f(t, y) := \ln(t)$$

f hängt hier nicht explizit von y ab. Für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist

$$y :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := \int \ln(t) dt = t \ln(t) - t + c,$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Dieses sind alle möglichen Lösungen.

In den vorigen Beispielen waren die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung immer angegeben, und wir haben nur im zweiten Beispiel gesehen, wie man diese Lösungen findet. Wie man die Lösungen zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung findet, wird uns in den nächsten Teilkapiteln beschäftigen. Vorher lernen wir noch ein weiteres Konzept kennen, das die in der Lösung vorkommende Konstante betrifft. Hierzu betrachten wir zunächst noch einmal die Chemische Anwendung 8.1 des radioaktiven Zerfalls.

Chemische Anwendung 8.4. (radioaktiver Zerfall (fortgesetzt))

In der Situation des radioaktiven Zerfalls (siehe Chemische Anwendung 8.1) ist häufig bekannt, wie viel der radioaktiven Substanz zu einem Zeitpunkt t_0 vorhanden ist: $u(t_0) = u_0$. Eine solche Information heißt eine Anfangsbedingung. u_0 heißt der Anfangswert (zum Zeitpunkt $t = t_0$). Die Differentialgleichung $u' = -\lambda u$ zusammen mit der Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ wird dann ein Anfangswertproblem genannt.

Definition 8.5. (Anfangswertproblem)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(t_0, y_0) \in D$. Ein **Anfangswertproblem (AWP)** ist eine gewöhnliche Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit einer **Anfangsbedingung** $y(t_0) = y_0$:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 8.6. (Anfangswertproblem)

(a) $y' = y - t^2$, $y(0) = 1$

Nach Beispiel 8.3 (a) sind

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := 2 + 2t + t^2 + ce^t, \quad c \in \mathbb{R},$$

alle Lösungen der Differentialgleichung. Die Bedingung

$$1 = y(0) = 2 + 0 + 0 + ce^0 = 2 + c \quad \iff \quad c = -1$$

zeigt, dass nur für $c = -1$ die Lösung y auch die Anfangsbedingung erfüllt. Also ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := 2 + 2t + t^2 - e^t,$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) $y' = \ln(t)$, $y(1) = 2$

Nach Beispiel 8.3 (b) ist

$$y :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := t \ln(t) - t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Es gilt

$$2 = y(1) = 1 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 + c = c - 1 \quad \iff \quad c = 3.$$

Also ist

$$y :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := t \ln(t) - t + 3,$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

8.2 Trennung der Variablen

Als erste Lösungsmethode für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung lernen wir die **Methode der Trennung der Variablen** kennen. Diese kann zur Lösung einer großen Klasse (aber nicht aller) gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung angewendet werden. Genauer betrachten wir in diesem Abschnitt nur **gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich auf die Form**

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)} \quad \text{mit} \quad h(y) \neq 0$$

bringen lassen. Bei solchen Differentialgleichungen ist es möglich, die Variablen t und y zu „trennen“. Wir setzen dabei voraus, dass g und h **stetig** sind.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 8.7. (DGLen, deren Variablen man trennen kann)

(a) $y' = 3t^2 e^{-y} = \frac{3t^2}{e^y}$ Eine Trennung der Variablen ist möglich.

(b) $y' = y + t$ Eine Trennung der Variablen ist **nicht** möglich.

(c) $y' = yt = \frac{t}{1/y}$ Eine Trennung der Variablen ist möglich, sofern $y \neq 0$ bleibt.

Die folgende Überlegung kann hilfreich sein bei der Entscheidung, ob die Trennung der Variablen möglich ist oder nicht: Man schreibt dy/dt statt y' und versucht, die Differentialgleichung so umzuschreiben, dass auf der linken Seite nur y und auf der rechten Seite nur t vorkommt. Dabei darf man mit dy und dt mit den üblichen Regeln der Buchstabenrechnung rechnen. Wir illustrieren dieses an den obigen Beispielen.

Beispiel 8.8. (DGLen, deren Variablen man trennen kann)

(a) $y' = 3t^2 e^{-y} \iff \frac{dy}{dt} = 3t^2 e^{-y} \iff e^y dy = 3t^2 dt$

Die Variablen sind jetzt getrennt.

(b) $y' = y + t \iff \frac{dy}{dt} = y + t \iff dy = (y + t) dt$

Hier ist eine Trennung der Variablen unmöglich.

(c) $y' = yt \iff \frac{dy}{dt} = yt \iff \frac{1}{y} dy = t dt$

Die Trennung der Variablen ist möglich, sofern $y \neq 0$ bleibt.

Wir lernen nun die Methode „Trennung der Variablen“ zur Lösung solcher Differentialgleichungen kennen.

Lösungsmethode 8.9. (Trennung der Variablen)

Sei I ein offenes Intervall. Ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)} \iff h(y) y' = g(t), \quad \text{wobei } h(y) \neq 0,$$

so gilt

$$h(y(t)) y'(t) = g(t), \quad t \in I.$$

Da g und h stetig sind, können wir Stammfunktionen G und H von g bzw. h wählen. Es gilt also $G'(t) = g(t)$, $H'(y) = h(y)$. Damit folgt nach der Kettenregel:

$$(H \circ y)'(t) = H'(y(t)) y'(t) = h(y(t)) y'(t) = g(t) = G'(t).$$

Also existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $H(y(t)) = G(t) + c$.

Da h stetig und $H'(y) = h(y) \neq 0$, ist H streng monoton, zumindest auf der Bildmenge von y . Also existiert dort die Umkehrfunktion H^{-1} von H und es gilt

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c).$$

Für die **praktische Durchführung der Trennung der Variablen** nutzt man gerne auch die folgende „**Physiker-Methode**“:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)} \iff h(y) dy = g(t) dt \iff \int h(y) dy = \int g(t) dt$$

Nach dem Berechnen der unbestimmten Integrale muss noch nach $y = y(t)$ aufgelöst werden.

Wir lösen nun (soweit möglich) die Beispiele 8.7 und 8.8 mit Trennung der Variablen.

Beispiel 8.10. (Trennung der Variablen)

(a) $y' = 3t^2 e^{-y}$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} y' = 3t^2 e^{-y} &\iff e^y y' = 3t^2 \\ &\implies \int e^{y(t)} y'(t) dt = \int 3t^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff e^{y(t)} = t^3 + c \\ &\iff y(t) = \ln(t^3 + c), \quad \text{falls } t^3 + c > 0. \end{aligned}$$

Mit der „Physiker-Methode“ sieht der Lösungsweg wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 3t^2 e^{-y} &\iff e^y dy = 3t^2 dt \\ &\implies \int e^y dy = \int 3t^2 dt \\ &\iff e^y = t^3 + c \\ &\iff y(t) = y = \ln(t^3 + c), \quad \text{falls } t^3 + c > 0, \end{aligned}$$

und wir erhalten natürlich die gleiche Lösung wie oben.

Wir müssen $t^3 + c > 0$ untersuchen, um die möglichen offenen Definitionsintervalle in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen:

$$t^3 + c > 0 \iff t^3 > -c \iff t > \begin{cases} \sqrt[3]{|c|} = \sqrt[3]{-c}, & \text{wenn } c \leq 0, \\ -\sqrt[3]{|c|} = -\sqrt[3]{c}, & \text{wenn } c > 0 \end{cases}$$

Also finden wir die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} y :] \sqrt[3]{|c|}, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := \ln(t^3 + c), \quad \text{wenn } c \leq 0, \\ y :] -\sqrt[3]{|c|}, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := \ln(t^3 + c), \quad \text{wenn } c > 0. \end{aligned}$$

- (b) $y' = t y$ und man sieht direkt, dass die konstante Funktion $y(t) = 0$ eine Lösung ist. Ab jetzt betrachten wir nun noch den Fall $y(t) \neq 0$.

Durch Trennung der Variablen kann man alle Lösungen finden, die stets $\neq 0$ bleiben, und wir setzen ab jetzt $y(t) \neq 0$ voraus:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = t y &\iff \frac{1}{y} dy = t dt \\ &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int t dt \\ &\iff \ln(|y|) = \frac{1}{2} t^2 + c \\ &\iff |y| = e^{\frac{1}{2} t^2 + c} = e^c e^{\frac{1}{2} t^2} \\ &\iff y(t) = y = \pm e^c e^{\frac{1}{2} t^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwei Lösungen:

$$y_1(t) = e^c e^{\frac{1}{2} t^2}, \quad y_2(t) = -e^c e^{\frac{1}{2} t^2}.$$

Alle gefundenen Lösungen lassen sich in einer Formel zusammenfassen:

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := C e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

In Teilkapitel 8.3 werden wir sehen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Zum Abschluss dieses Teilkapitels lösen wir noch zwei Anfangswertprobleme mit Trennung der Variablen.

Beispiel 8.11. (Trennung der Variablen für Anfangswertprobleme)

(a) $y' = 3t^2 e^{-y}, \quad y(-1) = 0$

Schritt 1: Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 3t^2 e^{-y} &\iff e^y dy = 3t^2 dt \\ &\implies \int e^y dy = \int 3t^2 dt \\ &\iff e^y = t^3 + c. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Schritt 2: Anfangsbedingung $y(-1) = 0$ einarbeiten:

$$e^{y(-1)} = (-1)^3 + c \iff e^0 = c - 1 \iff c = 2.$$

Schritt 3: Konstante $c = 2$ in (8.1) einsetzen:

$$\begin{aligned} e^y = t^3 + 2 &\iff y(t) = \ln(t^3 + 2), \\ &\text{falls } t^3 + 2 > 0, \text{ d.h. falls } t > -\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Lösungsvariante mit bestimmten Integralen:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 e^{-y} \iff e^y dy = 3t^2 dt,$$

und bei der nun folgenden Integration verwenden wir bestimmte Integrale, deren untere Grenze die Anfangswertbedingung berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^t e^{y(s)} y'(s) ds &= \int_{-1}^t 3s^2 ds \iff \left[e^{y(s)} \right]_{s=-1}^{s=t} = \left[s^3 \right]_{s=-1}^{s=t} \\ &\iff e^{y(t)} - e^{y(-1)} = t^3 - (-1)^3 \\ &\iff e^{y(t)} = e^{y(-1)} + t^3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff e^{y(t)} &= e^0 + t^3 + 1 = t^3 + 2 \\ \iff y(t) &= \ln(t^3 + 2), \quad \text{falls } t > -\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y :] - \sqrt[3]{2}, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := \ln(t^3 + 2).$$

(b) Radioaktiver Zerfall (vgl. Chemische Anwendung 8.1):

$$u' = -\lambda u, \quad u(0) = u_0 > 0$$

Schritt 1: Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = -\lambda u &\iff \frac{1}{u} du = -\lambda dt \\ &\implies \int \frac{1}{u} du = \int -\lambda dt \\ &\iff \ln(|u|) = -\lambda t + c. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Schritt 2: Anfangsbedingung $u(0) = u_0 > 0$ einarbeiten:

$$\underbrace{\ln(|u(0)|)}_{=\ln(|u_0|)=\ln(u_0)} = -\lambda \cdot 0 + c = c \iff c = \ln(u_0).$$

Schritt 3: Konstante $c = \ln(u_0)$ in (8.2) einsetzen:

$$\begin{aligned} \ln(|u(t)|) &= -\lambda t + \ln(u_0) \\ \iff |u(t)| &= e^{-\lambda t + \ln(u_0)} = e^{-\lambda t} e^{\ln(u_0)} = u_0 e^{-\lambda t} \\ \iff u(t) &= \pm u_0 e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Da die Lösung differenzierbar, also insbesondere stetig ist und $u(0) = u_0 > 0$ gilt, ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) := u_0 e^{-\lambda t}$, die Lösung des Anfangswertproblems. In Teilkapitel 8.3 werden wir sehen, dass dieses die einzige Lösung ist.

8.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung: die homogene Gleichung

Wir beginnen mit der Definition einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Definition 8.12. (lineare Differentialgleichung erster Ordnung)

Eine **Differentialgleichung erster Ordnung** heißt **linear**, wenn sie von der Form

$$y' = a(t)y + b(t) \quad (8.3)$$

ist (oder sich durch elementare Umformungen auf diese Form bringen lässt). Dabei sind $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I .

Ist $b(t) = 0$ für alle $t \in I$, so heißt die Differentialgleichung (8.3) **homogen**, andernfalls nennt man sie **inhomogen**.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 8.13. (lineare Differentialgleichung erster Ordnung)

(a) $y' = \frac{3}{t}y$ ist linear und homogen. Hier ist $a(t) := 3/t$ und $b(t) := 0$.

(b) $y' = y + t^2$ ist linear und inhomogen. Hier ist $a(t) := 1$ und $b(t) := t^2$.

(c) $y' = y^2 + t$ ist **nicht** linear wegen des quadratischen Terms y^2 .

In diesem Teilkapitel betrachten wir **ausschließlich homogene lineare** Differentialgleichungen erster Ordnung. Inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung behandeln wir in Teilkapitel 8.4. Sei also in diesem Teilkapitel immer $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**, und wir betrachten dann

$$y' = a(t)y. \quad (H)$$

Homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung kann man immer durch Trennung der Variablen lösen! Einfacher geht es mit dem folgenden Satz.

Satz 8.14. (Lösung einer homogenen linearen DGL erster Ordnung)

Sei $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von a . Für jedes $C \in \mathbb{R}$ ist dann

$$y_H : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := C e^{A(t)},$$

eine Lösung von (H). Jede Lösung von (H) lässt sich in dieser Form darstellen.

Wir beweisen den Satz, weil sein Beweis instruktiv ist.

Beweis von Satz 8.14: Da $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, besitzt A eine Stammfunktion. Es

gilt nach der Kettenregel

$$y'_H(t) = C e^{A(t)} A'(t) = \underbrace{C e^{A(t)}}_{= y_H(t)} a(t) = a(t) y_H(t), \quad t \in I.$$

Also ist y_H tatsächlich eine Lösung von (H).

Kann es weitere Lösungen geben? Nein, denn sei y irgendeine Lösung von (H) und $z(t) := e^{-A(t)} y(t)$. Dann gilt mit der Kettenregel für alle $t \in I$

$$z'(t) = e^{-A(t)} (-a(t)) y(t) + e^{-A(t)} y'(t) = e^{-A(t)} \underbrace{(y'(t) - a(t) y(t))}_{=0} = e^{-A(t)} \cdot 0 = 0,$$

da y eine Lösung von (H) ist und daher gilt:

$$y'(t) = a(t) y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) - a(t) y(t) = 0.$$

Da $z'(t) = 0$ für alle $t \in I$ ist, ist z konstant auf I , d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $z(t) = C$ für alle $t \in I$. (Für diesen Schluss ist es wichtig, dass I ein Intervall ist!)
Damit gilt

$$C = e^{-A(t)} y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad y(t) = C e^{A(t)},$$

d.h. die Lösung y von (H) ist ebenfalls von der Form y_H . □

Betrachten wir nun einige Beispiele, um die Anwendung von Satz 8.14 zu üben.

Beispiel 8.15. (Lösung homogener linearer DGLen 1. Ordnung)

(a) $y' = \frac{3}{t} y$

Hier ist $a(t) := 3/t$, d.h. $a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Die Stammfunktion von $a(t)$ ist $A(t) := 3 \ln(|t|) = \ln(|t|^3)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist kein Intervall. Deshalb betrachten wir $t > 0$ (also $t \in]0, \infty[$) und $t < 0$ (also $t \in]-\infty, 0[$) getrennt.

(i) $t > 0$: $y_H(t) = C e^{\ln(|t|^3)} = C |t|^3 = C t^3$, $C \in \mathbb{R}$

(ii) $t < 0$: $y_H(t) = C e^{\ln(|t|^3)} = C |t|^3 = C (-t)^3 = \underbrace{-C}_{=: \tilde{C}} t^3 = \tilde{C} t^3$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}$

Fazit: Somit sind

$$y_{H,1} :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_{H,1}(t) := C t^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{und}$$

$$y_{H,2} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_{H,2}(t) := C t^3, \quad C \in \mathbb{R},$$

jeweils eine allgemeine Lösung von $y' = \frac{3}{t} y$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = a y.$$

Hier gilt:

$$a(t) := a, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{d.h. } a(t) = a \text{ ist unabhängig von } t),$$

$$A(t) := a t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also ist $y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_H(t) := C e^{at}$, die allgemeine Lösung von $y' = a y$.

Wir kommen nun noch einmal auf Anfangswertprobleme zurück.

Bemerkung 8.16. (AWP für homogene lineare DGL 1. Ordnung)

Sei $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = a(t) y, \quad y(t_0) = y_0,$$

immer genau eine Lösung.

Begründung: Die allgemeine Lösung von $y' = a(t) y$ ist durch

$$y_H(t) = C e^{A(t)}, \quad t \in I,$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist, gegeben. Setzt man t_0 ein, so erhält man

$$y_0 = y_H(t_0) = C e^{A(t_0)}, \quad \text{also} \quad C = y_0 e^{-A(t_0)}.$$

Damit ist C durch $y(t_0) = y_0$ eindeutig bestimmt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-A(t_0)}}_{\substack{= C \text{ für} \\ y(t_0) = y_0}} e^{A(t)} = y_0 e^{A(t) - A(t_0)} = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Betrachten wir noch zwei Beispiele für Anfangswertprobleme mit einer homogenen linearen Differentialgleichung.

Beispiel 8.17. (AWP für homogene lineare DGL 1. Ordnung)

(a) $y' = \frac{3}{t} y, \quad y(-1) = 1$

Aus Beispiel 8.15 (a) wissen wir, dass

$$y_{H,1} :] - \infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_{H,1}(t) := C t^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{und}$$

$$y_{H,2} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_{H,2}(t) := C t^3, \quad C \in \mathbb{R},$$

jeweils eine allgemeine Lösung von $y' = \frac{3}{t} y$. Da $t_0 = -1$ negativ ist, betrachten wir nur die auf $] - \infty, 0[$ definierte Lösung $y = y_{H,1}$.

Wir setzen $t_0 = -1$ ein und verwenden die Anfangsbedingung $y(-1) = 1$:

$$1 = y(-1) = C (-1)^3 = -C, \quad \text{also} \quad C = -1.$$

Einsetzen von $C = -1$ in $y = y_{H,1}$ liefert, dass

$$y :] - \infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := -t^3,$$

die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist.

(b) Radioaktiver Zerfall: Seien $\lambda > 0$, $u_0 > 0$ und

$$u' = -\lambda u, \quad u(0) = u_0.$$

Nach Beispiel 8.15 (b) (mit $a = -\lambda$) ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = C e^{-\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der DGL $u' = -\lambda u$.

Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ einarbeiten:

$$u_0 = u(0) = C e^{-\lambda \cdot 0} = C \quad \iff \quad C = u_0$$

Also ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) := u_0 e^{-\lambda t}$, die Lösung des Anfangswertproblems.

8.4 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung: die inhomogene Gleichung

Wir betrachten nun **inhomogene** lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = a(t) y + b(t), \quad (\text{IH})$$

wobei $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Der erste Schritt zur Lösung solcher Gleichungen ist, die **zugehörige homogene Differentialgleichung**

$$y' = a(t) y \quad (\text{H})$$

zu betrachten. Wir haben in Satz 8.14 gesehen, dass

$$y_H(t) := C e^{A(t)}, \quad t \in I,$$

die allgemeine Lösung von (H) ist, wobei A eine Stammfunktion von a ist.

Wir untersuchen zunächst die **Struktur der allgemeinen Lösung von (IH)**: Angenommen wir kennen eine spezielle Lösung y_S von (IH). Ist y irgendeine Lösung von (IH), so gilt für $z := y - y_S$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t) - y'_S(t) = a(t)y(t) + b(t) - [a(t)y_S(t) - b(t)] \\ &= a(t)[y(t) - y_S(t)] = a(t)z(t). \end{aligned}$$

Also ist z eine Lösung von (H), d.h. es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $z(t) = C e^{A(t)}$, also $y(t) - y_S(t) = C e^{A(t)}$. Durch Auflösen nach $y(t)$ findet man

$$y(t) = y_S(t) + \underbrace{C e^{A(t)}}_{=y_H(t)} = y_S(t) + y_H(t).$$

Damit haben wir den nachfolgenden Satz bewiesen.

Satz 8.18. (Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung)

Die allgemeine Lösung von (IH) lässt sich schreiben als

$$y = y_S + y_H,$$

wobei y_S eine (spezielle) Lösung von (IH) und y_H die allgemeine Lösung von (H) ist.

Wir lernen nun das Lösungsverfahren „Variation der Konstanten“ zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung kennen.

Lösungsmethode 8.19. ((IH) lösen mit Variation der Konstanten)

Schritt 1: Man bestimmt die allgemeine Lösung von (H):

$$y_H(t) = C e^{A(t)}, \quad \text{wobei } A \text{ eine Stammfunktion von } a \text{ ist.}$$

Schritt 2: Man macht den Ansatz $y(t) = C(t) e^{A(t)}$.

Dann folgt mit der Produktregel

$$y'(t) = C'(t) e^{A(t)} + C(t) e^{A(t)} a(t).$$

Einsetzen in (IH) liefert

$$\begin{aligned} \underbrace{C'(t) e^{A(t)} + C(t) e^{A(t)} a(t)}_{=y'(t)} &= a(t) \underbrace{C(t) e^{A(t)}}_{=y(t)} + b(t) \\ \iff C'(t) e^{A(t)} &= b(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff C'(t) = b(t) e^{-A(t)} \\ &\iff C(t) = \int b(t) e^{-A(t)} dt. \end{aligned}$$

Betrachten wir einige Beispiele und Anwendungsprobleme.

Beispiel 8.20. (Variation der Konstanten)

(a) $y' = y - t^2$ (also hier: $a(t) = 1$ und $b(t) = -t^2$)

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung von $y' = y$

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := C \exp\left(\int 1 dt\right) = C e^t.$$

Schritt 2: Variation der Konstanten

Ansatz: $y(t) := C(t) e^t \implies y'(t) = C'(t) e^t + C(t) e^t$

Einsetzen in $y' = y - t^2$ liefert:

$$\begin{aligned} C'(t) e^t + C(t) e^t = C(t) e^t - t^2 &\iff C'(t) e^t = -t^2 \\ &\iff C'(t) = -t^2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Integration über t liefert nun mit zweimaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned} C(t) &= \int \underbrace{t^2}_{=v(t)} \underbrace{(-e^{-t})}_{=u'(t)} dt = \underbrace{t^2 e^{-t}}_{=v(t)u(t)} - \int \underbrace{2t}_{=v'(t)} \underbrace{e^{-t}}_{=u(t)} dt \\ &= t^2 e^{-t} + \int \underbrace{2t}_{=\tilde{v}(t)} \underbrace{(-e^{-t})}_{=\tilde{u}'(t)} dt \\ &= t^2 e^{-t} + \underbrace{2t e^{-t}}_{=\tilde{v}(t)\tilde{u}(t)} - \int \underbrace{2}_{=\tilde{v}'(t)} \underbrace{e^{-t}}_{=\tilde{u}(t)} dt \\ &= t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + 2e^{-t} + c. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) &:= C(t) e^t = (t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + 2e^{-t} + c) e^t \\ &= t^2 + 2t + 2 + c e^t, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) $y' = -\sin(t) y + \sin(t)$ (also hier: $a(t) = -\sin(t)$ und $b(t) = \sin(t)$)

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung von $y' = -\sin(t)y$

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := C \exp\left(\int -\sin(t) dt\right) = C e^{\cos(t)}$$

Schritt 2: Variation der Konstanten

Ansatz:

$$y(t) := C(t) e^{\cos(t)} \quad \Longrightarrow \quad y'(t) = C'(t) e^{\cos(t)} + C(t) e^{\cos(t)} (-\sin(t)).$$

Einsetzen in die inhomogene DGL liefert:

$$\begin{aligned} C'(t) e^{\cos(t)} - C(t) e^{\cos(t)} \sin(t) &= -\sin(t) C(t) e^{\cos(t)} + \sin(t) \\ \iff C'(t) e^{\cos(t)} &= \sin(t) \iff C'(t) = \sin(t) e^{-\cos(t)}. \end{aligned}$$

Durch Integration über t findet man mit der Substitution

$$u = -\cos(t), \quad \text{also} \quad \frac{du}{dt} = \sin(t) \iff du = \sin(t) dt,$$

dass

$$\begin{aligned} C(t) &= \int \sin(t) e^{-\cos(t)} dt = \left[\int e^u du \right]_{u=-\cos(t)} \\ &= \left[e^u + c \right]_{u=-\cos(t)} = e^{-\cos(t)} + c. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) = C(t) e^{\cos(t)} = (e^{-\cos(t)} + c) e^{\cos(t)} = 1 + c e^{\cos(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) *Lösungsvariante für $y' = -\sin(t)y + \sin(t)$:*

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung von $y' = -\sin(t)y$:

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := C \exp\left(\int -\sin(t) dt\right) = C e^{\cos(t)}.$$

Schritt 2: Schreibt man die inhomogene Differentialgleichung um in

$$y' = -\sin(t)y + \sin(t) = \sin(t)(1 - y),$$

so sieht man, dass $y_S(t) := 1$ eine (spezielle) Lösung ist. (In der Tat gilt für $y_S(t) = 1$: $y'_S(t) = 0 = \sin(t)(1 - 1) = \sin(t)(1 - y_S(t))$.) Nach Satz 8.18 ist somit die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := y_S(t) + y_H(t) = 1 + C e^{\cos(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nun betrachten wir noch zwei Anfangswertprobleme.

Beispiel 8.21. (Variation der Konstanten für Anfangswertproblem)

$$y' = \frac{3}{t} y + t^3 e^t - 2t, \quad y(1) = 1 \quad \left(\text{also hier: } a(t) = \frac{3}{t} \text{ und } b(t) = t^3 e^t - 2t \right)$$

Weil wir $t \neq 0$ voraussetzen müssen, kommen nur die Intervalle $] -\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ als offene Definitionsintervalle in Frage. Da $t_0 = 1 > 0$, betrachten wir nur das Intervall $]0, \infty[$.

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung von $y' = \frac{3}{t} y$ auf $]0, \infty[$

$$\begin{aligned} y_H :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) &:= C \exp \left(\int \frac{3}{t} dt \right) = C e^{3 \ln(|t|)} \\ &= C e^{3 \ln(t)} = C e^{\ln(t^3)} = C t^3, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Schritt 2: Variation der Konstanten

$$\text{Ansatz: } y(t) = C(t) t^3 \quad \Longrightarrow \quad y'(t) = C'(t) t^3 + C(t) 3t^2$$

Einsetzen liefert für $t > 0$:

$$\begin{aligned} C'(t) t^3 + C(t) 3t^2 &= \frac{3}{t} C(t) t^3 + t^3 e^t - 2t \quad \Longleftrightarrow \quad C'(t) t^3 = t^3 e^t - 2t \\ \Longleftrightarrow \quad C'(t) &= e^t - \frac{2}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad C(t) = \int \left(e^t - \frac{2}{t^2} \right) dt = e^t + \frac{2}{t} + c. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := \left(e^t + \frac{2}{t} + c \right) t^3 = t^3 e^t + 2t^2 + ct^3, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Schritt 3: Anfangsbedingung einarbeiten

$$1 = y(1) = e + 2 + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = -1 - e$$

Fazit: Die Lösung der Anfangswertproblems ist also

$$y :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := t^3 e^t + 2t^2 - (1 + e) t^3.$$

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Nun lernen wir lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung kennen, wobei uns insbesondere der Sonderfall konstanter Koeffizienten interessiert. In Teilkapitel 9.1 lernen wir die grundlegenden Begriffe und die allgemeine Lösungstheorie kennen. In Teilkapitel 9.2 lernen wir, wie man homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten löst, und in Teilkapitel 9.3 lernen wir, wie man mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten eine spezielle Lösung der zugehörigen inhomogenen Gleichung findet. In Teilkapitel 9.4 betrachten wir schließlich Anfangswertprobleme.

9.1 Einführung und Lösungstheorie zu linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Teilkapitel lernen wir zunächst die neue Notation und Terminologie kennen.

Definition 9.1. (lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $a_0, a_1, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Eine Gleichung der Form

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \tag{9.1}$$

(oder eine Gleichung, die sich in diese Form bringen lässt) heißt eine **lineare Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung**. Falls $b(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt, heißt (9.1) **homogen**. Andernfalls heißt (9.1) **inhomogen**.

Falls (9.1) inhomogen ist, nennen wir

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

die zu (9.1) **gehörende homogene lineare Differentialgleichung**.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 9.2. (lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

- (a) $y'' + 4y' + 7y = 0$ ist eine homogene lineare DGL zweiter Ordnung.
- (b) $y'' + \sin(t)y' + \cos(t)y = e^t$ ist eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung. Die zugehörige homogene lineare DGL ist $y'' + \sin(t)y' + \cos(t)y = 0$.
- (c) $y'' + e^t y' + t^2 y = 0$ ist eine homogene lineare DGL zweiter Ordnung.
- (d) $y'' + y^3 = 0$ ist keine lineare, sondern eine nicht-lineare DGL zweiter Ordnung.

Definition 9.3. (Lösung einer linearen DGL zweiter Ordnung)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $a_0, a_1, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Lösung der Differentialgleichung**

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

falls

(i) y auf I zweimal stetig differenzierbar ist und

(ii) $y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$ für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Der nächste Satz beschreibt die allgemeine Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Satz 9.4. (allgemeine Lösung einer linearen DGL zweiter Ordnung)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $a_0, a_1, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(1) Sind $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei reellwertige Lösungen von

$$y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0, \quad (9.2)$$

die keine Vielfachen voneinander sind, so ist

$$y_H : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

die **(reelle) allgemeine Lösung** von (9.2).

(2) Ist $y_S : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine (spezielle) reellwertige Lösung von

$$y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = b(t), \quad (9.3)$$

und ist $y_H : I \rightarrow \mathbb{R}$ die (reelle) allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0,$$

so ist die **(reelle) allgemeine Lösung** von (9.3) gegeben durch

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := y_S(t) + y_H(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 9.5. (allgemeine Lösung einer linearen DGL zweiter Ordn.)

(a) Gesucht ist die allgemeine Lösung von

$$y'' + y = 0. \quad (9.4)$$

Die homogene lineare DGL zweiter Ordnung (9.4) hat die beiden Lösungen $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_1(t) := \sin(t)$, und $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_2(t) := \cos(t)$, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt jeweils

$$\begin{aligned} \sin''(t) + \sin(t) &= \cos'(t) + \sin(t) = -\sin(t) + \sin(t) = 0, \\ \cos''(t) + \cos(t) &= -\sin'(t) + \cos(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0. \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen $y_1(t) = \sin(t)$ und $y_2(t) = \cos(t)$ sind offensichtlich keine Vielfachen voneinander.

(Erklärung: Betrachten wir $c_1 \sin(t) = \cos(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so liefert Einsetzen von $t = 0$, dass $c_1 \sin(0) = \cos(0)$ also $0 = 1 \not\checkmark$. Somit gibt es kein $c_1 \in \mathbb{R}$, dass $c_1 \sin(t) = \cos(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Betrachten wir $\sin(t) = c_2 \cos(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so liefert Einsetzen von $t = \pi/2$,

dass $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, also $1 = 0 \not\downarrow$. Somit gibt es kein $c_2 \in \mathbb{R}$, dass $\sin(t) = c_2 \cos(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.)

Die allgemeine Lösung von (9.4) ist somit

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Gesucht ist die Lösung von

$$y'' + y = 5.$$

Mit Inspizieren, sieht man leicht, dass $y_S(t) = 5$ eine spezielle Lösung ist. In der Tat gilt

$$y_S''(t) + y_S(t) = 0 + 5 = 5.$$

Aus Beispiel (a) wissen wir bereits, dass

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

die (reelle) allgemeine Lösung der zugehörige homogene Gleichung

$$y'' + y = 0$$

ist. Nach Satz 9.4 ist daher

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := y_S(t) + y_H(t) = 5 + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

die allgemeine Lösung von $y'' + y = 5$.

In den nachfolgenden Teilkapiteln lernen wir, wie man homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten löst und wie man in vielen Fällen eine (spezielle) Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten finden kann.

9.2 Homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt betrachten wir **homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** (d.h. die Koeffizientenfunktionen a_0 und a_1 sind jeweils konstant, also $a_0(t) = a_0$ und $a_1(t) = a_1$ für alle $t \in I$):

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\text{H}_2)$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Um diese Differentialgleichung zu lösen, macht man den **komplexen Exponentialansatz**

$$y(t) = e^{st}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Ableiten liefert

$$y'(t) = s e^{st} \quad \text{und} \quad y''(t) = s^2 e^{st}.$$

Einsetzen in (H₂) ergibt nun:

$$\begin{aligned} & s^2 e^{st} + a_1 s e^{st} + a_0 e^{st} = 0 \\ \iff & (s^2 + a_1 s + a_0) e^{st} = 0 \\ \iff & s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{9.5} \\ \iff & s^2 + 2 \frac{a_1}{2} s + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 = 0 \\ \iff & \left(s + \frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} (a_1^2 - 4a_0) = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung (9.5) heißt die **charakteristische Gleichung von (H₂)**. Für jede Lösung s von (9.5) ist e^{st} eine Lösung von (H₂). Wir müssen also (9.5) lösen. Dabei können **drei Fälle** auftreten:

Fall 1: (9.5) hat zwei verschiedene reelle Lösungen s_1, s_2 (falls $a_1^2 - 4a_0 > 0$).

Fall 2: (9.5) hat eine zweifache reelle Lösung s (falls $a_1^2 - 4a_0 = 0$). Dann gilt $s = -a_1/2$.

Fall 3: (9.5) hat keine reellen Lösungen (falls $a_1^2 - 4a_0 < 0$). Dann hat (9.5) zwei konjugiert komplexe Lösungen der Form

$$s_1 = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad s_2 = \alpha - \beta i \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ wobei } \beta \neq 0.$$

(Dabei sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ passend zu bestimmen.)

Anmerkung: Andere Fälle können nicht auftreten, d.h. wir können keine „doppelte“ komplexe, nicht-reelle Lösung finden und auch keine zwei verschiedenen komplexen, nicht-reellen Lösungen, die nicht konjugiert komplex zueinander sind. Das sieht man wie folgt: Sei $s_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine komplexe, nicht-reelle Lösung von (9.5). Dann gilt (indem wir die Gleichung komplex konjugieren)

$$\begin{aligned} s_1^2 + a_1 s_1 + a_0 = 0 & \iff \overline{s_1^2 + a_1 s_1 + a_0} = 0 \\ & \iff \overline{s_1}^2 + \overline{a_1} \overline{s_1} + \overline{a_0} = 0 \\ & \iff \overline{s_1}^2 + a_1 \overline{s_1} + a_0 = 0 \quad (\text{weil } a_0, a_1 \in \mathbb{R} \text{ sind}). \end{aligned}$$

Also ist $s_2 := \overline{s_1}$ ebenfalls eine Lösung von (9.5). Mehr als zwei verschiedene Lösungen kann es bei einer quadratischen Gleichung nicht geben.

Fall 1 ($a_1^2 - 4a_0 > 0$): Die charakteristische Gleichung (9.5) von (H_2) habe **zwei verschiedene reelle** Lösungen s_1, s_2 . Dann sind

$$y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_1(t) := e^{s_1 t}, \quad \text{und} \quad y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_2(t) := e^{s_2 t},$$

Lösungen von (H_2) . Da $s_1 \neq s_2$ ist, sind diese beiden Lösungen keine Vielfachen voneinander. Damit gilt der nachfolgende Satz.

Satz 9.6. (zwei verschiedene reelle Lösungen der char. Gleichung)

*Hat die charakteristische Gleichung (9.5) von (H_2) zwei verschiedene reelle Lösungen $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, so ist die **reelle allgemeine Lösung** von (H_2)*

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 9.7. (zwei verschiedene reelle Lösungen der char. Gleichung)

Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Der Exponentialansatz $y(t) = e^{st}$ (und damit $y'(t) = s e^{st}$ und $y''(t) = s^2 e^{st}$) liefert

$$s^2 e^{st} - 4s e^{st} + 3e^{st} = 0 \iff (s^2 - 4s + 3) e^{st} = 0 \iff s^2 - 4s + 3 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$0 = s^2 - 4s + 3 = (s - 1)(s - 3)$$

hat die reellen Lösungen $s_1 = 1$ und $s_2 = 3$. Damit ist die reelle allgemeine Lösung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := c_1 e^t + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Fall 2 ($a_1^2 = 4a_0$): Die charakteristische Gleichung (9.5) von (H_2) habe die (**einzige**) **reelle Lösung** $s = -a_1/2$. In diesem Fall liefert der Exponentialansatz nur eine Lösung von (H_2) , nämlich

$$y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_1(t) := e^{st} = e^{-\frac{a_1}{2}t}.$$

Wir zeigen nun, dass

$$y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_2(t) := t e^{st},$$

ebenfalls eine Lösung von (H_2) ist: Mit

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= (t e^{st})' = e^{st} + t s e^{st} = (1 + st) e^{st}, \\ y_2''(t) &= ((1 + st) e^{st})' = s e^{st} + (1 + st) s e^{st} = (2s + s^2 t) e^{st} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} y_2''(t) + a_1 y_2'(t) + a_0 y_2(t) &= (2s + s^2 t) e^{st} + a_1 (1 + st) e^{st} + a_0 t e^{st} \\ &= \left[\underbrace{(s^2 + a_1 s + a_0)}_{=0} t + \underbrace{(2s + a_1)}_{=0} \right] e^{st} = 0, \end{aligned}$$

da $s = -a_1/2$ eine Lösung von $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ und $2s + a_1 = 0$ ist. Die Lösungen

$$y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_1(t) := e^{st}, \quad \text{und} \quad y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_2(t) := t e^{st},$$

sind keine Vielfachen voneinander. Damit haben wir den nachfolgenden Satz bewiesen.

Satz 9.8. (genau eine zweifache reelle Lösung der char. Gleichung)

Hat die charakteristische Gleichung von (H_2) die *einzigste reelle Lösung* $s = -a_1/2$, so ist die *reelle allgemeine Lösung* von (H_2)

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := c_1 e^{st} + c_2 t e^{st} = (c_1 + c_2 t) e^{st}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 9.9. (genau eine zweifache reelle Lösung der char. Gleichung)

Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0.$$

Der Exponentialansatz $y(t) = e^{st}$ (und damit $y'(t) = s e^{st}$ und $y''(t) = s^2 e^{st}$) liefert

$$s^2 e^{st} + s e^{st} + \frac{1}{4} e^{st} = 0 \iff \left(s^2 + s + \frac{1}{4} \right) e^{st} = 0 \iff s^2 + s + \frac{1}{4} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$0 = s^2 + s + \frac{1}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2$$

hat genau eine reelle Lösung $s = -1/2$. Also ist die reelle allgemeine Lösung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{1}{2}t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{1}{2}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Fall 3 ($a_1^2 - 4a_0 < 0$): Die charakteristische Gleichung von (H_2) habe die **konjugiert komplexen Lösungen** $s_1 = \alpha + \beta i$ und $s_2 = \alpha - \beta i$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\beta \neq 0$). Damit erhalten wir die folgenden zwei komplexen Lösungen von (H_2) , die keine Vielfachen voneinander sind:

$$\begin{aligned} z_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_1(t) &:= e^{s_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t), \\ z_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_2(t) &:= e^{s_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} [\cos(-\beta t) + i \sin(-\beta t)] = e^{\alpha t} \cos(\beta t) - i e^{\alpha t} \sin(\beta t), \end{aligned}$$

wobei wir die Euler-Formel (vgl. Notation 3.18)

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

und $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ benutzt haben. Es gilt offensichtlich $z_1(t) = \overline{z_2(t)}$ und $z_2(t) = \overline{z_1(t)}$.

Wir sind aber eigentlich an den reellen Lösungen (und nicht an komplexwertigen Lösungen) von (H_2) interessiert. Wir beobachten, dass die reellen Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_1(t) &:= \frac{1}{2} [z_1(t) + z_2(t)] = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_2(t) &:= \frac{1}{2i} [z_1(t) - z_2(t)] = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

als gewichtete Summe von z_1 und z_2 nach Satz 9.4 ebenfalls Lösungen von (H_2) sind. (*Anmerkung:* Es gilt $y_1(t) = \operatorname{Re}(z_1(t)) = \operatorname{Re}(z_2(t))$ und $y_2(t) = \operatorname{Im}(z_1(t)) = -\operatorname{Im}(z_2(t))$.) Da $\beta \neq 0$ ist, kann man zeigen, dass die beiden reellen Lösungen keine Vielfachen voneinander sind. Damit gilt der nachfolgende Satz.

Satz 9.10. (zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung)

Hat die charakteristische Gleichung von (H_2) die beiden konjugiert komplexen Lösungen $s_1 = \alpha + \beta i$ und $s_2 = \alpha - \beta i$, so gelten:

(1) Die **komplexe allgemeine Lösung** von (H_2) ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad y(t) := k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} = k_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + k_2 e^{(\alpha-\beta i)t} \\ = e^{\alpha t} [k_1 e^{i\beta t} + k_2 e^{-i\beta t}], \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

(2) Die **reelle allgemeine Lösung** von (H_2) ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Betrachten wir auch hierzu ein Beispiel.

Beispiel 9.11. (zwei zueinander konj. kompl. Lsgen. der char. Glg.)

Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Der Exponentialansatz $y(t) = e^{st}$ (und damit $y'(t) = s e^{st}$ und $y''(t) = s^2 e^{st}$) liefert

$$s^2 e^{st} + 2s e^{st} + 2e^{st} = 0 \iff (s^2 + 2s + 2)e^{st} = 0 \iff s^2 + 2s + 2 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$0 = s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1 = (s + 1)^2 - i^2 = (s + 1 - i)(s + 1 + i)$$

hat die zwei zueinander konjugiert komplexen (nicht-reellen) Lösungen

$$s_1 = -1 + i \quad \text{und} \quad s_2 = -1 - i.$$

Wir finden also die komplexe allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$y(t) := k_1 e^{(-1+i)t} + k_2 e^{(-1-i)t} = k_1 e^{-t} e^{it} + k_2 e^{-t} e^{-it} = e^{-t} [k_1 e^{it} + k_2 e^{-it}]$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Damit ist die reelle allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(t) := c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) = e^{-t} [c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 9.12. (Zshg. zwischen reeller und komplexer Lösung)

Es gilt für eine geeignete Wahl der Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ bzw. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$e^{\alpha t} [k_1 e^{i\beta t} + k_2 e^{-i\beta t}] = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)]$$

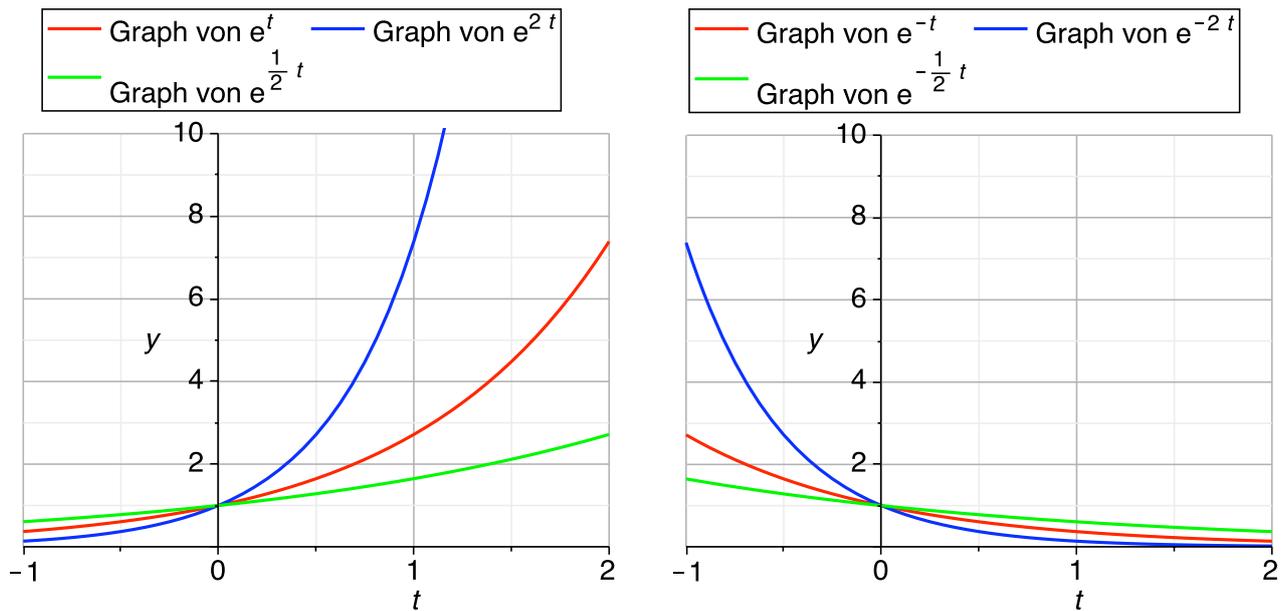


Abb. 9.1: Funktionen der Form $e^{\alpha t}$ mit $\alpha > 0$ wachsen exponentiell. Funktionen der Form $e^{\alpha t}$ mit $\alpha < 0$ streben exponentiell (wie e^{-t}) gegen null.

$$\iff k_1 e^{i\beta t} + k_2 e^{-i\beta t} = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)$$

$$\iff k_1 [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] + k_2 [\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)] \\ = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)$$

$$\iff (k_1 + k_2) \cos(\beta t) + i(k_1 - k_2) \sin(\beta t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)$$

$$\iff [(k_1 + k_2) - c_1] \cos(\beta t) + [i(k_1 - k_2) - c_2] \sin(\beta t) = 0$$

$$\iff (k_1 + k_2) - c_1 = 0 \quad \text{und} \quad i(k_1 - k_2) - c_2 = 0$$

$$\iff c_1 = k_1 + k_2 \quad \text{und} \quad (c_2 = i(k_1 - k_2) \iff i c_2 = k_2 - k_1)$$

$$\iff k_1 = \frac{1}{2}(c_1 - i c_2) \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{1}{2}(c_1 + i c_2), \quad (9.6)$$

wobei wir von der viertletzten Zeile in die drittletzte Zeile benutzt haben, dass $\sin(\beta t)$ und $\cos(\beta t)$ keine Vielfachen voneinander sind und die Koeffizienten der beiden Funktionen somit 0 sein müssen.

Es folgt aus dieser Rechnung: Die komplexe Lösung

$$y(t) = e^{\alpha t} [k_1 e^{i\beta t} + k_2 e^{-i\beta t}]$$

ist genau dann reellwertig, wenn (9.6) mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt, also wenn $k_2 = \bar{k}_1$ gilt.

Abschließend schauen wir uns in Abbildungen 9.1, 9.2 und 9.3 Bilder der verschie-

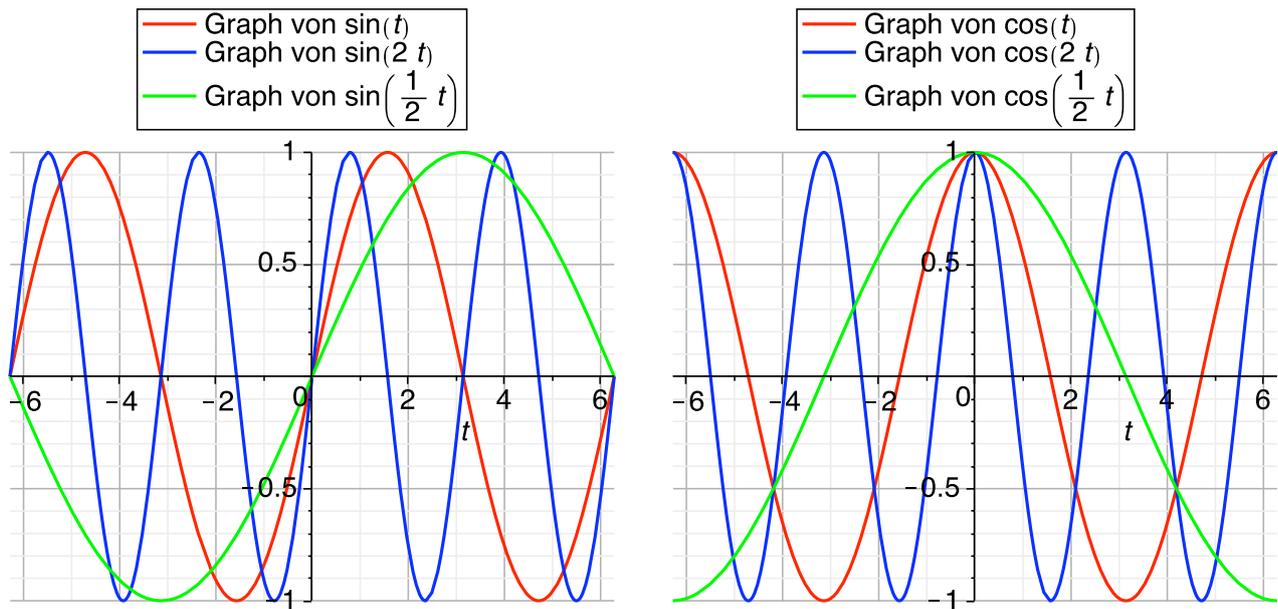


Abb. 9.2: Funktionen der Form $\sin(\beta t)$ und $\cos(\beta t)$ sind klassische Wellen oder Schwingungen. Der Wert β steuert die Frequenz der Schwingung.

denen Typen von Lösungen an, um ein Gefühl für die durch solche Funktionen beschriebenen Phänome zu bekommen.

9.3 Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten die **inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \quad (\text{IH}_2)$$

mit **konstanten Koeffizienten** $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und die **zugehörige homogene lineare Differentialgleichung**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (\text{H}_2)$$

Im Folgenden seien $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei reellwertige Lösungen von (H_2) , die keine Vielfachen voneinander sind, so dass die reelle allgemeine Lösung von (H_2) durch

$$y_H(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

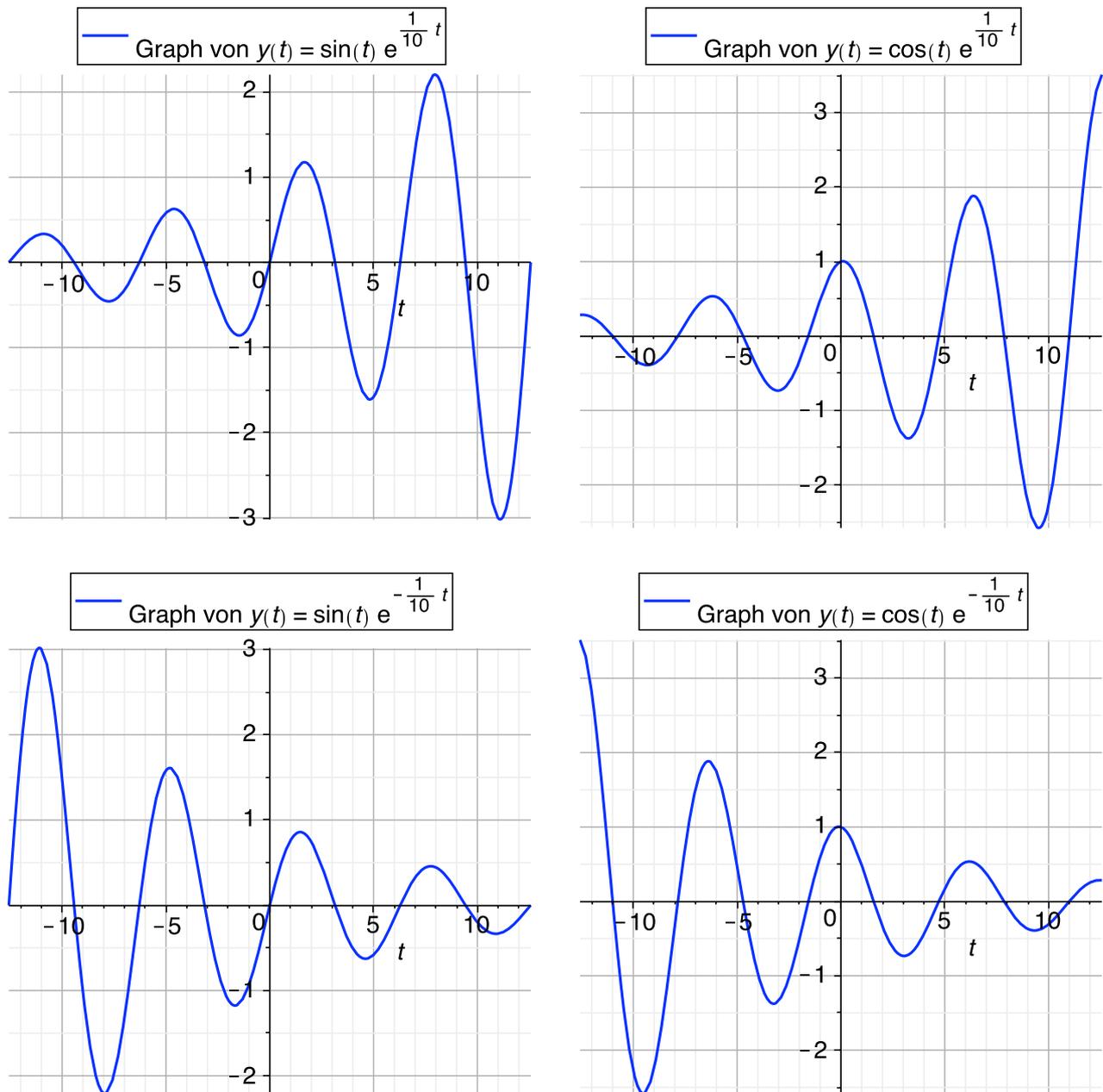


Abb. 9.3: Funktionen der Form $\sin(\beta t) e^{\alpha t}$ und $\cos(\beta t) e^{\alpha t}$ sind Schwingungen, deren Amplitude exponentiell wächst, wenn $\alpha > 0$ ist, bzw. deren Amplitude exponentiell (wie e^{-t}) gedämpft wird, wenn $\alpha < 0$ ist.

gegeben ist. Wenn wir eine (spezielle) reelle Lösung y_S von (IH_2) finden können, dann ist nach Satz 9.4 die reelle allgemeine Lösung von (IH_2) gegeben durch

$$y(t) = y_S(t) + y_H(t) = y_S(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wie kann man eine spezielle Lösung y_S von (IH_2) finden?

rechte Seite $b(t)$	Ansatz für $y_S(t)$
$b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$	falls 0 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m$ falls 0 eine k -fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m)$
$(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t}$	falls α keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{\alpha t}$ falls α eine k -fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{\alpha t}$
$(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) \cos(\beta t)$ oder $(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) \sin(\beta t)$ oder eine Summe dieser Funktionentypen	falls βi keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)$ falls βi eine k -fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k [(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)]$
$(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ oder $(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ oder eine Summe dieser Funktionentypen	falls $\alpha + \beta i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $[(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ falls $\alpha + \beta i$ eine k -fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k [(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$

Tabelle 9.1: Damit die „Methode der unbestimmten Koeffizienten“ angewendet werden kann, muss die rechte Seite $b(t)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung (IH₂) in der linken Spalte der Tabelle vertreten sein. Ist dieses der Fall, so wählt man einen Ansatz y_S für die spezielle Lösung gemäß der rechten Spalte der Tabelle.

Methode 1: Raten. Bitte hier **immer** nachweisen, dass es sich tatsächlich um eine Lösung von (IH₂) handelt, indem Sie Ihre geratene Lösung in die Differentialgleichung (IH₂) einsetzen!

Methode 2: „Methode der unbestimmten Koeffizienten“ mit einem Ansatz nach Tabelle 9.1. Zuerst ist zu beachten, dass diese Methode nur angewendet werden kann, wenn die rechte Seite $b(t)$ der Differentialgleichung von einer Form ist, die in der Tabelle aufgeführt ist. Ist dieses der Fall, so wählt man gemäß der Tabelle einen Ansatz y_S für die spezielle Lösung und setzt diesen in die inhomogene lineare Differentialgleichung (IH₂) ein, um die Koeffizienten (d.h. die Konstanten) im Ansatz zu bestimmen.

Bemerkung 9.13. (zu Tabelle 9.1)

- (1) Merken muss man sich nur die letzte Tabellenzeile. Alle anderen Zeilen sind darin als Spezialfälle enthalten.
- (2) Ist $b(t)$ eine Linearkombination der in der linken Spalte genannten Funktionen, so wählt man als Ansatz für y_S die Summe aus den entsprechenden Ansätzen in der rechten Spalte. Dabei müssen die Konstanten (also die „Koeffizienten“) alle unterschiedlich benannt sein.
- (3) Für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung tritt in der Praxis nur $k = 0, 1, 2$ auf.
- (4) In \mathbb{C} lässt sich jede quadratische Gleichung

$$t^2 + a_1 t + a_0 = 0 \quad (9.7)$$

mit ihren zwei komplexen (nicht notwendigerweise verschiedenen) Lösungen $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ faktorisieren:

$$(t - s_1)(t - s_2) = 0. \quad (9.8)$$

Ist $s_1 \neq s_2$, so sind s_1 und s_2 jeweils **einfache Lösungen** von (9.7) und (9.8). Ist $s_1 = s_2$, so ist $s := s_1 = s_2$ eine **zweifache Lösung** von (9.7) und (9.8).

Betrachten wir einige Beispiele zur Anwendung der „Methode der unbestimmten Koeffizienten“.

Beispiel 9.14. (Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen DGL mit der „Methode der unbestimmten Koeffizienten“)

- (a) Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ord-

nung

$$y'' - 2y' + y = e^{3t}.$$

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugeh. hom. lin. DGL. Einsetzen des komplexen Exponentialansatzes $y(t) = e^{st}$ (und $y'(t) = s e^{st}$, $y''(t) = s^2 e^{st}$) in die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0$$

liefert

$$s^2 e^{st} - 2s e^{st} + e^{st} = 0 \iff (s^2 - 2s + 1) e^{st} = 0 \iff s^2 - 2s + 1 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$0 = s^2 - 2s + 1 = (s - 1)^2, \quad \text{d.h. } s_1 = s_2 = 1 \quad (\text{zweifache Lösung}).$$

Damit finden wir die reelle allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 e^t + c_2 t e^t = (c_1 + c_2 t) e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Finden einer speziellen Lösung. Es gilt $b(t) = e^{3t}$, und $s = 1$ ist eine zweifache (und die einzige) Lösung der charakteristischen Gleichung, aber 3 ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung. Gemäß Tabelle 9.1 wählen wir daher den folgenden Ansatz:

$$y_S(t) = \gamma e^{3t}, \quad y'_S(t) = 3\gamma e^{3t}, \quad y''_S(t) = 9\gamma e^{3t}.$$

Einsetzen in die inhomogene lineare Differentialgleichung liefert:

$$9\gamma e^{3t} - 2(3\gamma e^{3t}) + \gamma e^{3t} = e^{3t} \iff 4\gamma e^{3t} = e^{3t} \iff \gamma = \frac{1}{4}.$$

Also ist

$$y_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_S(t) := \frac{1}{4} e^{3t},$$

eine spezielle Lösung.

Ergebnis: Die reelle allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = e^{3t}$ ist

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) &:= y_S(t) + y_H(t) = \frac{1}{4} e^{3t} + c_1 e^t + c_2 t e^t \\ &= \frac{1}{4} e^{3t} + (c_1 + c_2 t) e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (b) Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - 2y' + y = e^t.$$

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugeh. hom. lin. DGL. Mit dem komplexen Exponentialansatz $y(t) = e^{st}$ finden wir analog zum vorigen Beispiel die charakteristische Gleichung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$0 = s^2 - 2s + 1 = (s - 1)^2, \quad \text{d.h. } s_1 = s_2 = 1 \quad (\text{zweifache Lösung}).$$

Damit finden wir die reelle allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 e^t + c_2 t e^t = (c_1 + c_2 t) e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Finden einer speziellen Lösung. Es gilt $b(t) = e^t = e^{1t}$, und $s = 1$ ist eine zweifache Lösung der charakteristischen Gleichung. Gemäß Tabelle 9.1 wählen wir daher den folgenden Ansatz:

$$y_S(t) = t^2 \gamma e^t, \quad y'_S(t) = (2t + t^2) \gamma e^t, \quad y''_S(t) = (2 + 4t + t^2) \gamma e^t.$$

Einsetzen in die inhomogene lineare Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} & (2 + 4t + t^2) \gamma e^t - 2(2t + t^2) \gamma e^t + t^2 \gamma e^t = e^t \\ \iff & (2 + 4t + t^2 - 4t - 2t^2 + t^2) \gamma e^t = e^t \\ \iff & 2\gamma e^t = e^t \quad \iff \quad 2\gamma = 1 \quad \iff \quad \gamma = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist eine spezielle Lösung

$$y_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_S(t) := \frac{1}{2} t^2 e^t.$$

Ergebnis: Die reelle allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = e^t$ ist also

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) & := y_S(t) + y_H(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t + (c_1 + c_2 t) e^t \\ & = \left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2 \right) e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (c) Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - 2y' + 2y = e^t \cos(t).$$

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugeh. hom. lin. DGL. Einsetzen des komplexen Exponentialansatzes $y(t) = e^{st}$ (und $y'(t) = s e^{st}$, $y''(t) = s^2 e^{st}$) in die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

liefert

$$s^2 e^{st} - 2s e^{st} + 2e^{st} = 0 \iff (s^2 - 2s + 2) e^{st} = 0 \iff s^2 - 2s + 2 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 - 2s + 2 = (s - 1)^2 + 1 = (s - 1)^2 - i^2 = (s - 1 - i)(s - 1 + i) \\ \implies & \quad s_1 = 1 + i, \quad s_2 = 1 - i \quad (\text{zu einander kompl. conj. Lösungen}), \end{aligned}$$

d.h. $\alpha = 1$ und $\beta = 1$. Damit erhalten wir die reelle allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_H : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t) \\ &= (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Finden einer speziellen Lösung. Es gilt $b(t) = e^t \cos(t)$, und $1 + i$ ist eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung. Gemäß Tabelle 9.1 wählen wir daher den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} y_S(t) &= t \underbrace{(A \cos(t) + B \sin(t))}_{= y_H(t)} e^t = t y_H(t), \\ y'_S(t) &= y_H(t) + t y'_H(t), \\ y''_S(t) &= y'_H(t) + y'_H(t) + t y''_H(t) = 2y'_H(t) + t y''_H(t), \end{aligned}$$

wobei wir bereits wissen, dass die mit y_H abgekürzte Funktion eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist. Einsetzen in die inhomogene lineare Differentialgleichung und Ausnutzen, dass y_H eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist, liefert

$$\begin{aligned} y''_S(t) - 2y'_S(t) + 2y_S(t) &= e^t \cos(t) \\ \iff 2y'_H(t) + t y''_H(t) - 2(y_H(t) + t y'_H(t)) + 2t y_H(t) &= e^t \cos(t) \\ \iff 2y'_H(t) - 2y_H(t) + t \underbrace{(y''_H(t) - 2y'_H(t) + 2y_H(t))}_{=0} &= e^t \cos(t) \end{aligned}$$

$$\iff 2y'_H(t) - 2y_H(t) = e^t \cos(t).$$

Mit

$$y_H(t) = (A \cos(t) + B \sin(t)) e^t,$$

$$y'_H(t) = (-A \sin(t) + B \cos(t)) e^t + (A \cos(t) + B \sin(t)) e^t$$

finden wir

$$2y'_H(t) - 2y_H(t) = e^t \cos(t)$$

$$\iff 2(-A \sin(t) + B \cos(t)) e^t + 2(A \cos(t) + B \sin(t)) e^t - 2(A \cos(t) + B \sin(t)) e^t = e^t \cos(t)$$

$$\iff 2(-A \sin(t) + B \cos(t)) e^t = e^t \cos(t)$$

$$\iff 2(-A \sin(t) + B \cos(t)) = \cos(t)$$

$$\iff -2A \sin(t) + (2B - 1) \cos(t) = 0$$

$$\iff -2A = 0 \quad \text{und} \quad 2B - 1 = 0$$

$$\iff A = 0 \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$y_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_S(t) := \frac{1}{2} t e^t \sin(t),$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Ergebnis: Die reelle allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' - 2y' + 2y = e^t \cos(t)$ ist

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) &:= y_S(t) + y_H(t) \\ &= \frac{1}{2} t e^t \sin(t) + (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In der Literatur finden Sie weitere Methoden zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung, beispielsweise:

- Variation der Konstanten,
- den Potenzreihenansatz.

Diese werden aber hier nicht weiter behandelt.

9.4 Anfangswertaufgaben

In diesem letzten Teilkapitel betrachten wir nun noch Anfangswertprobleme.

Definition 9.15. (Anfangswertproblem für eine lineare DGL zweiter Ordnung)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $a_0, a_1, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Seien $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t)$$

zusammen mit den **Anfangsbedingungen**

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$$

heißt ein **Anfangswertproblem (AWP)** oder eine **Anfangswertaufgabe**.

Durch die Vorgabe der Anfangsbedingungen werden die zwei Konstanten in der allgemeinen Lösung festgelegt. Betrachten wir zwei Beispiele für Anfangswertprobleme.

Beispiel 9.16. (Anfangswertprobleme)

(a) Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen lin. DGL. Mit dem komplexen Exponentialansatz $y(t) = e^{st}$ (und damit $y'(t) = s e^{st}$, $y''(t) = s^2 e^{st}$) finden wir

$$s^2 e^{st} + 2s e^{st} + 2e^{st} = 0 \quad \iff \quad s^2 + 2s + 2 = 0,$$

und die charakteristische Gleichung faktorisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1 = (s + 1)^2 - i^2 = (s + 1 - i)(s + 1 + i) \\ \implies & \quad s_1 = -1 + i, \quad s_2 = -1 - i, \end{aligned}$$

d.h. $\alpha = -1$ und $\beta = \pm 1$. Damit finden wir die reelle allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) &:= c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) \\ &= e^{-t} [c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Anfangsbedingung einarbeiten. Mit

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t} [c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)], \\ y'(t) &= e^{-t} [-c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t) - c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)], \end{aligned}$$

finden wir für die gegebenen Anfangsbedingungen in $t = 0$:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = e^0 [c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)] = c_1, \\ 2 &= y'(0) = e^0 [-c_1 \cos(0) - c_2 \sin(0) - c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0)] \\ &= -c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Also gilt $c_1 = 1$ und $c_2 = 2 + c_1 = 3$.

Ergebnis: Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := e^{-t} [\cos(t) + 3 \sin(t)].$$

(b) Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^t + 9t - 15, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Schritt 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugeh. hom. lin. DGL. Einsetzen des komplexen Exponentialansatzes $y(t) = e^{st}$ (und $y'(t) = s e^{st}$, $y''(t) = s^2 e^{st}$) in die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

liefert

$$s^2 e^{st} - 6s e^{st} + 9e^{st} = 0 \quad \iff \quad s^2 - 6s + 9 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung faktorisiert wie folgt:

$$0 = s^2 - 6s + 9 = (s - 3)^2 \quad \implies \quad s_1 = s_2 = 3 \quad (\text{zweifache Lösung}).$$

Somit finden wir als reelle allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(t) := c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} = (c_1 + c_2 t) e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Finden einer speziellen Lösung. Es gilt $b(t) = 2e^t + 9t - 15$, und $s = 3$ ist eine zweifache Lösung der charakteristischen Gleichung, aber 0 und 1 sind keine Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gemäß Tabelle 9.1 wählen wir daher den folgenden Ansatz:

$$y_S(t) = A e^t + B_0 + B_1 t, \quad y'_S(t) = A e^t + B_1, \quad y''_S(t) = A e^t.$$

Einsetzen in die inhomogene lineare Differentialgleichung liefert:

$$y''_S(t) - 6y'_S(t) + 9y_S(t) = 2e^t + 9t - 15$$

$$\begin{aligned} \iff A e^t - 6(A e^t + B_1) + 9(A e^t + B_0 + B_1 t) &= 2 e^t + 9t - 15 \\ \iff (4A - 2)e^t + (9B_0 - 6B_1 + 15) + (9B_1 - 9)t &= 0 \\ \iff 4A - 2 = 0 \quad \text{und} \quad 9B_0 - 6B_1 + 15 = 0 \quad \text{und} \quad 9B_1 - 9 = 0 \\ \iff A = \frac{1}{2}, \quad B_1 = 1, \quad B_0 = \frac{1}{9}(6B_1 - 15) &= \frac{1}{9}(6 - 15) = -1. \end{aligned}$$

Also ist

$$y_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_S(t) := \frac{1}{2} e^t + t - 1$$

eine spezielle Lösung.

Zwischenergebnis: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := y_S(t) + y_H(t) = \frac{1}{2} e^t + t - 1 + (c_1 + c_2 t) e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 3: Anfangsbedingungen einarbeiten. Mit

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} e^t + t - 1 + (c_1 + c_2 t) e^{3t}, \\ y'(t) &= \frac{1}{2} e^t + 1 + (c_2 + 3c_1 + 3c_2 t) e^{3t} \end{aligned}$$

finden wir für die gegebenen Anfangsbedingungen in $t = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= \frac{1}{2} e^0 + 0 - 1 + (c_1 + c_2 \cdot 0) e^0 = \frac{1}{2} - 1 + c_1 = -\frac{1}{2} + c_1, \\ 0 = y'(0) &= \frac{1}{2} e^0 + 1 + (c_2 + 3c_1 + 3c_2 \cdot 0) e^0 \\ &= \frac{1}{2} + 1 + c_2 + 3c_1 = \frac{3}{2} + 3c_1 + c_2, \end{aligned}$$

$$\text{also } c_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{3}{2} - 3c_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3.$$

Ergebnis: Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(t) := \frac{1}{2} e^t + t - 1 + \left(\frac{1}{2} - 3t\right) e^{3t}.$$

Teil IV

Lineare Algebra

KAPITEL 10

Vektoren: Grundlagen

In diesem Kapitel lernen wir die Grundideen der Vektorrechnung kennen. In Teilkapitel 10.1 führen wir Vektoren ein, und in Teilkapiteln 10.2 und 10.3 lernen wir, wie man Vektoren addiert und mit Skalaren (d.h. reellen Zahlen) multipliziert. In Teilkapitel 10.4 sehen wir, wie man Vektoren mit Punkten im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n identifizieren kann. Wir betrachten dabei auch die Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen in \mathbb{R}^n (mit $n \geq 2$ bzw. $n \geq 3$). In Teilkapitel 10.5 beschreiben wir Kreise in \mathbb{R}^2 und Kugeln in \mathbb{R}^3 mit Hilfe von Vektoren und leiten die Kreisgleichung und Kugelgleichung her.

In Teilkapitel 10.6 führen wir das Skalarprodukt zweier Vektoren ein, dessen Ergebnis eine reelle Zahl, also ein Skalar, ist, und untersuchen die Eigenschaften des Skalarprodukts. In Teilkapitel 10.7 nutzen wir das Skalarprodukt, um Geraden in \mathbb{R}^2 mittels einer Geradengleichung und Ebenen in \mathbb{R}^3 mittels einer Ebenengleichung darzustellen.

In Teilkapitel 10.8 lernen wir schließlich das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) zweier Vektoren in \mathbb{R}^3 kennen, welches einen neuen Vektor ergibt, der auf den beiden ursprünglichen Vektoren senkrecht steht. Wir betrachten die Eigenschaften des Vektorprodukts, die unter anderem in der Physik eine wichtige Rolle spielen.

10.1 Spaltenvektoren

Wir beginnen mit der Definition eines (Spalten-)Vektors.

Definition 10.1. (Spaltenvektoren)

(1) Ein (*n*-dimensionaler Spalten-) Vektor ist ein Objekt der Form

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ die **Komponenten** von \vec{x} heißen.

(2) Der Spaltenvektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n \text{ Komponenten})$$

heißt der (*n*-dimensionale) **Nullvektor**.

(3) Seien

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

n-dimensionale Vektoren. $\vec{x} = \vec{y}$ gilt per Definition genau dann, wenn

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \dots, \quad x_n = y_n.$$

Betrachten wir nun einige Beispiele für Vektoren.

Beispiel 10.2. (Vektoren)

(a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ ist ein 3-dimensionaler Vektor.

(b) $\vec{y} = \begin{bmatrix} 17 \\ -13 \\ 0 \\ \pi \\ \sqrt{33} \end{bmatrix}$ ist ein 5-dimensionaler Vektor.

(c) $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist ein 4-dimensionaler Vektor.

(d) $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist ein 2-dimensionaler Vektor.

Bemerkung 10.3. (geometrische Vorstellung)

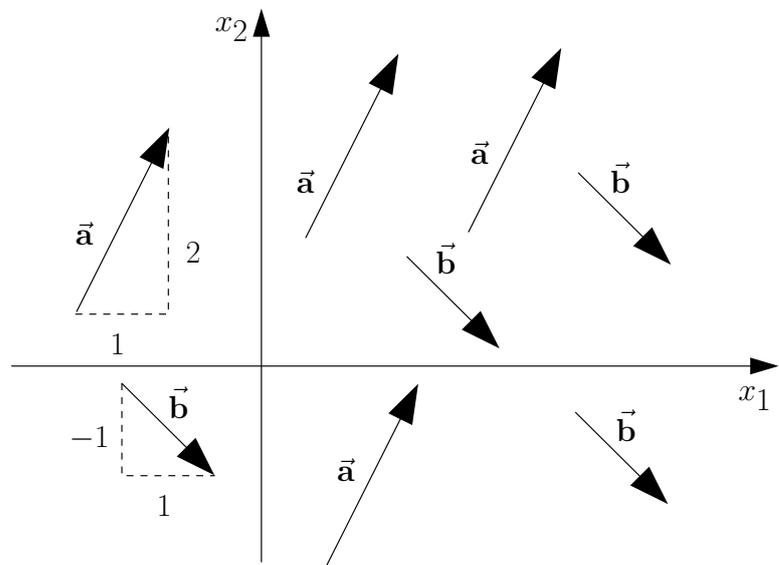
Spaltenvektoren (mit Ausnahme des Nullvektors) kann man sich als **Pfeile** mit einer festgelegten **Länge** und **Richtung** vorstellen; für $n = 2$ in der Ebene und für $n = 3$ im dreidimensionalen Raum. Dabei werden Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung als gleich angesehen. Man spricht daher auch von „**freien Vektoren**“ im Gegensatz zu „**gebundenen Vektoren**“. Letztere stellt man sich als Pfeile vor, die an einen Punkt (den Fußpunkt) mit dem „Fuß“ der Pfeils angeheftet sind.

Beispiel ($n = 2$): Die Pfeile können im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (der Ebene) dargestellt werden. z.B. gilt für

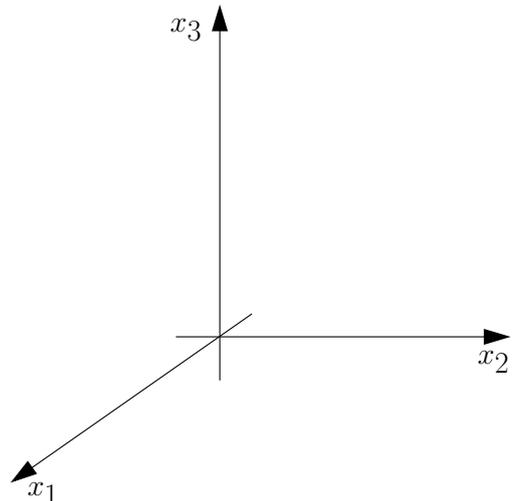
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

\vec{a} : „1 in x_1 -Richtung, 2 in x_2 -Richtung

\vec{b} : „1 in x_1 -Richtung, -1 in x_2 -Richtung



Beispiel ($n = 3$): Auch für $n = 3$ kann man sich die Pfeile in einem kartesischen Koordinatensystem vorstellen. Dabei wählt man die x_1 -, x_2 - und x_3 -Achsen so, dass sie ein Rechtssystem bilden, d.h. der **Rechten-Hand-Regel** genügen. (Rechte-Hand-Regel: Die x_1 -Achse, die x_2 -Achse bzw. die x_3 -Achse zeigen jeweils in die Richtung des Daumens, Zeigefingers bzw. Mittelfingers der rechten Hand, wenn diese so gespreizt sind, dass sie ein System mit rechten Winkeln bilden.)



Vektorielle Größen (also Größen, deren Werte Vektoren sind) kommen in der Physik häufig vor. Beispiele sind: Kräfte, Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrisches Feld.

Im Kontext von Vektoren bezeichnet man Größen, deren Werte (reelle) Zahlen sind, auch als **skalare Größen**. Beispiele sind: Zeit, Temperatur, Masse.

Definition 10.4. (Länge/Betrag eines Vektors)

Sei \vec{x} ein n -dimensionaler Vektor, also

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dann heißt

$$|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

die **Länge** oder der **Betrag** von \vec{x} .

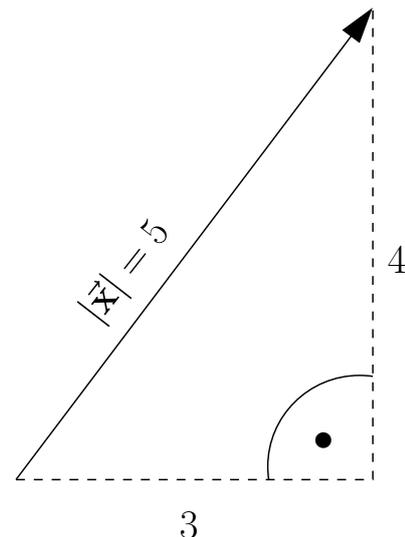
Beispiel 10.5. (Länge/Betrag von Vektoren)

(a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \implies$

$$|\vec{x}| = \left| \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

(b) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies$

$$|\vec{x}| = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$



Bemerkung 10.6. (Länge/Betrag eines Vektors)

- (1) Es gilt stets $|\vec{x}| \geq 0$.
- (2) Für $n = 2$ oder $n = 3$ ist $|\vec{x}|$ gerade die Länge des zugehörigen Pfeils. Dieses folgt aus dem Satz des Pythagoras.

- (3) Für $n = 1$ gilt: $\vec{x} = [x_1] \Rightarrow |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$, d.h. wir erhalten den üblichen Betrag der reellen Zahl x_1 .

Der nächste Hilfssatz zeigt, dass für alle Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ sogar $|\vec{x}| > 0$ gilt.

Hilfssatz 10.7. (Vektor hat Länge null \Leftrightarrow Vektor ist der Nullvektor)

Sei \vec{x} ein n -dimensionaler Vektor, also

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

$$|\vec{x}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \text{ ist der Nullvektor } \vec{0}.$$

Die Aussage des Hilfssatzes ist geometrisch natürlich klar. Wir wollen den Hilfssatz jetzt auch noch rechnerisch überprüfen.

Beweis von Hilfssatz 10.7:

„ \Leftarrow “: Wir müssen zeigen: $\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{x}| = 0$

$$\vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}| = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{0} = 0$$

„ \Rightarrow “: Wir müssen zeigen: $|\vec{x}| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} |\vec{x}| = 0 &\quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad x_1^2 = 0, \dots, x_n^2 = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt genutzt, dass Quadrate immer ≥ 0 sind.

Damit haben wir beide Richtungen der Aussage bewiesen. □

Eine besondere Rolle spielen Vektoren mit Länge Eins.

Definition 10.8. (Einheitsvektor)

Ein Spaltenvektor \vec{x} ist ein **Einheitsvektor** (oder auch **normiert**), wenn $|\vec{x}| = 1$ gilt.

Betrachten wir einige Beispiele dazu.

Beispiel 10.9. (Einheitsvektoren)

(a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist ein Einheitsvektor, und $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ist kein Einheitsvektor, denn:

$$|\vec{x}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad \text{aber} \quad |\vec{y}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ heißen die n -dimensionalen Spaltenvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

die **Standardeinheitsvektoren**. Insbesondere sind die Standardeinheitsvektoren für $n = 2$ bzw. $n = 3$ jeweils:

$$n = 2 : \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$n = 3 : \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ ein Einheitsvektor, denn nach Eigenschaft (2)

des Sinus und Cosinus (vgl. Seite 45) gilt:

$$\left| \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \right| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1.$$

10.2 Vektoraddition

Wir lernen nun, wie man Vektoren addiert.

Definition 10.10. (Vektoraddition)

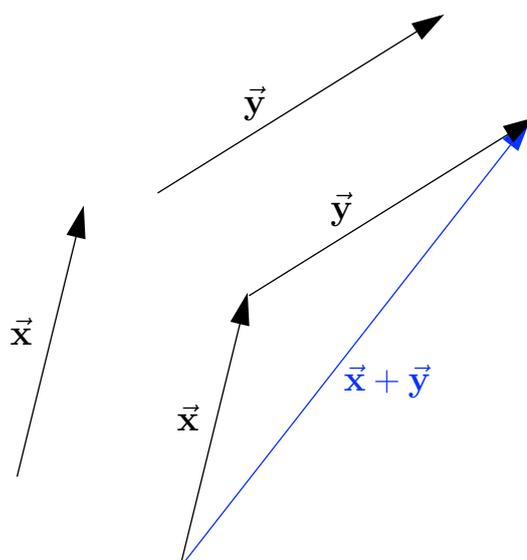
Seien \vec{x} und \vec{y} n -dimensionale Vektoren, also

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Die **Addition** von \vec{x} und \vec{y} ist wie folgt definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

(Nur Vektoren mit der **gleichen** Anzahl von Komponenten können addiert werden, d.h. die Dimension der Vektoren muss übereinstimmen.)



Formal werden n -dimensionale Vektoren also „**komponentenweise**“ addiert, indem man jeweils die Komponenten mit dem gleichen Index addiert.

Die Zeichnung neben Definition 10.10 zeigt, was die Vektoraddition **geometrisch** bedeutet: Wir verschieben den Vektor \vec{y} so, dass wir seinen Fuß an die Spitze des Vektors \vec{x} heften können. Der Vektor $\vec{x} + \vec{y}$ ist dann der Vektor, dessen Fuß mit den Fuß von \vec{x} übereinstimmt und dessen Spitze die Spitze des verschobenen Vektors \vec{y} trifft.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 10.11. (Vektoraddition)

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 2+\sqrt{2} \\ -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2+\sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Im nächsten Satz sind die Rechenregeln für die Vektoraddition zusammengestellt.

Satz 10.12. (Rechenregeln für die Vektoraddition)

Seien \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} n -dimensionale Vektoren. Dann gelten:

- (1) **Kommutativgesetz:** $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- (2) **Assoziativgesetz:** $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- (3) **Dreiecksungleichung:** $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$
- (4) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (wobei $\vec{0}$ der Nullvektor ist).

Anschauung zur Dreiecksungleichung:

Anhand der nebenstehenden geometrischen Interpretation der Vektoraddition macht man sich leicht klar, dass die Dreiecksungleichung gelten muss: In dem Dreieck ist die Summe der beiden Seitenlängen $|\vec{x}|$ und $|\vec{y}|$ immer größer als die Seitenlänge $|\vec{x} + \vec{y}|$ der dritten Seite.

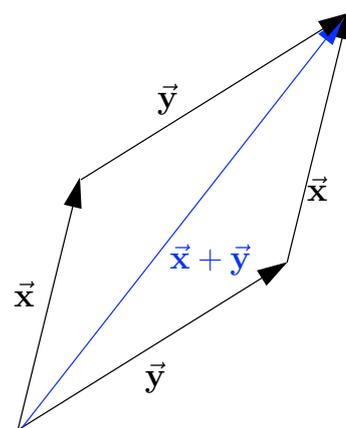
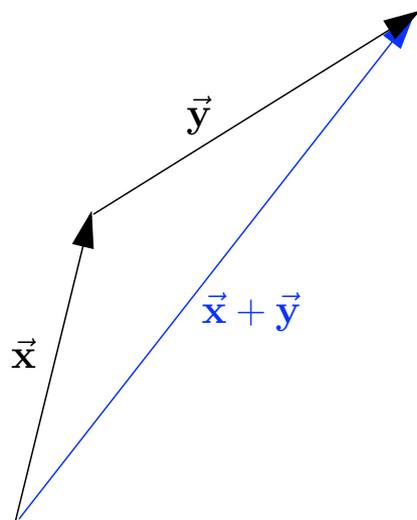
Wenn \vec{x} und \vec{y} die gleiche Richtung haben, dann „fällt das Dreieck zu einer Linie zusammen“, und es gilt

$$|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Beweis von Satz 10.12 (1): Mit dem Kommutativgesetz für die reellen Zahlen gelten $x_1 + y_1 = y_1 + x_1, \dots, x_n + y_n = y_n + x_n$ und somit

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{bmatrix} = \vec{y} + \vec{x}.$$

(In der graphischen Darstellung der Vektoraddition sieht man direkt, dass das Kommutativgesetz gelten muss.) □



Beweis von Satz 10.12 (2): Mit dem Assoziativgesetz für die reellen Zahlen gilt

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{bmatrix} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}), \end{aligned}$$

womit das Assoziativgesetz für die Vektoraddition bewiesen ist. \square

Der Beweis von Satz 10.12 (4) ergibt sich direkt durch Nachrechnen, und den Beweis der Dreiecksungleichung zeigen wir in Teilkapitel 10.5.

10.3 Multiplikation mit Skalaren

Nun lernen wir, wie man Vektoren mit reellen Zahlen multipliziert.

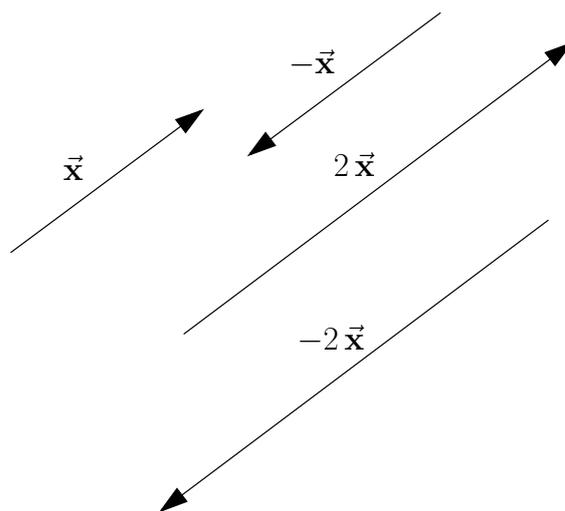
Definition 10.13. (Multiplikation mit Skalaren)

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ein n -dimensionaler Vektor. Dann definieren wir

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$



Das Symbol λ („lambda“) ist ein kleiner griechischer Buchstabe. Im Anhang C finden Sie eine Liste aller griechischen Buchstaben mit deren Namen.

Die skalare Multiplikation erfolgt also „**komponentenweise**“, indem man jede Komponente des Vektors mit der reellen Zahl λ multipliziert.

Geometrische Anschauung der Multiplikation mit Skalaren: Das Bild neben Definition 10.13 liefert die geometrische Anschauung: Ein Vektor wird also mit einem Skalar λ multipliziert, indem man ihn streckt oder staucht (je nach dem Wert von $|\lambda|$) und seine Richtung umkehrt, falls der Skalar λ negativ ist.

Definition 10.14. (parallele bzw. antiparallele Vektoren)

Gilt für zwei n -dimensionale Vektoren \vec{x} und \vec{y} , dass $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ (bzw. äquivalent dazu $\vec{y} = \frac{1}{\lambda} \vec{x}$) mit einem $\lambda \neq 0$, so sind \vec{x} und \vec{y} **parallel**, wenn $\lambda > 0$ ist, bzw. **antiparallel**, wenn $\lambda < 0$ ist.

Beispiel 10.15. (Multiplikation mit Skalaren)

$$(a) \quad 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ sind parallele Vektoren.}$$

$$(b) \quad -\pi \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 2\pi \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} -\pi \\ 2\pi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sind antiparallele Vektoren.}$$

$$(c) \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 23 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 46 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 23 \end{bmatrix} \text{ sind parallele Vektoren.}$$

Wir erklären nun, wie wir Vektoren subtrahieren.

Bemerkung 10.16. (Subtraktion von Vektoren)

Wir schreiben

$$-\vec{x} := (-1) \vec{x} \quad \text{und} \quad \vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-\vec{y}).$$

Im nächsten Satz sind die Rechenregeln für die skalare Multiplikation zusammengestellt.

Satz 10.17. (Rechenregeln für die Multiplikation mit Skalaren)

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare, und seien \vec{x} und \vec{y} n -dimensionale Vektoren. Dann gelten:

(1) **Assoziativgesetz:** $(\lambda \mu) \vec{x} = \lambda (\mu \vec{x})$

(2) **Distributivgesetze:**

$$(\lambda + \mu) \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x} \quad \text{und} \quad \lambda (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$$

(3) $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$

(4) $0 \vec{x} = \vec{0}$ und $\lambda \vec{0} = \vec{0}$

Das Symbol μ („mü“) ist ebenfalls ein griechischer Buchstabe.

Beweis von Satz 10.17:

$$\begin{aligned} |\lambda \vec{x}| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\lambda| |\vec{x}| \end{aligned}$$

Damit ist 10.17 (3) nachgewiesen. Satz 10.17 (2) und (4) zeigt man einfach durch Nachrechnen. \square

In der nächsten Bemerkung halten wir fest, wie man einen beliebigen Vektor mittels der Standardeinheitsvektoren darstellen kann.

Bemerkung 10.18. (Darstellung mit den Standardeinheitsvektoren)

Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ die n -dimensionalen Standardeinheitsvektoren (siehe Beispiel 10.9 (b)). Dann gilt:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

10.4 Ortsvektoren und Verbindungsvektoren

In diesem Teilkapitel stellen wir einen Zusammenhang zwischen Punkten im \mathbb{R}^n und Vektoren, genauer Ortsvektoren, her. Dabei lernen wir auch die Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^n kennen.

Definition 10.19. (n -Tupel, Punkte, \mathbb{R}^n , Nullpunkt/Ursprung)

Ein Objekt der Form (x_1, x_2, \dots, x_n) heißt ein n -**Tupel**.

$n = 2$: Statt 2-Tupel sagt man (**geordnetes**) **Paar** (siehe Definition 1.23).

$n = 3$: Statt 3-Tupel sagt man auch **Tripel**.

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nennen wir auch **Punkte** in \mathbb{R}^n .

Der Punkt $\mathcal{O} := (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ heißt der **Nullpunkt** oder **Ursprung**.

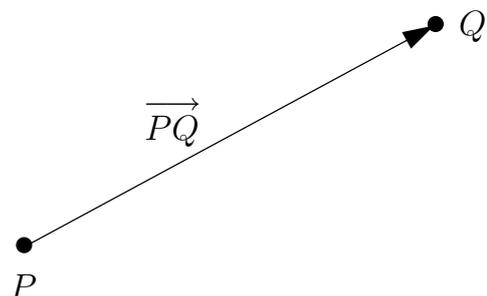
\mathbb{R}^2 kann man sich als die Zeichenebene vorstellen, und \mathbb{R}^3 kann man sich als den 3-dimensionalen Anschauungsraum vorstellen. Man wählt dazu jeweils ein kartesisches Koordinatensystem.

Definition 10.20. (Verbindungsvektor und Ortsvektor)

Seien $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

- (1) Der **Verbindungsvektor** von P nach Q ist definiert durch

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix}.$$



- (2) Der Verbindungsvektor

$$\vec{p} := \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \begin{bmatrix} p_1 - 0 \\ \vdots \\ p_n - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

vom Ursprung \mathcal{O} nach P ist der **Ortsvektor** von P .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 10.21. (Punkte in \mathbb{R}^n , Ortsvektoren und Verbindungsvektoren)

$$P := (1, -1, 3), \quad Q := (2, 1, -2) \quad \text{und} \quad X := (-1, 0, 2)$$

sind Punkte in \mathbb{R}^3 . Dann sind die zugehörigen Ortsvektoren

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Die Verbindungsvektoren von P bzw. Q nach X sind

$$\overrightarrow{PX} = \begin{bmatrix} -1 - 1 \\ 0 - (-1) \\ 2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{QX} = \begin{bmatrix} -1 - 2 \\ 0 - 1 \\ 2 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Wir halten nun einige leicht zu überprüfende Eigenschaften von Verbindungsvektoren und Ortsvektoren fest.

Hilfssatz 10.22. (Eigenschaften von Verbindungsvektoren)

- (1) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$
- (2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
- (3) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$
- (4) $\overrightarrow{PQ} \stackrel{(2)}{=} \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \stackrel{(3)}{=} -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = -\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} - \vec{p}$
- (5) $|\overrightarrow{PQ}| = \text{Abstand von } P \text{ und } Q$

In der nachfolgenden Bemerkung kommen wir noch einmal auf den Zusammenhang zwischen Punkten, Ortsvektoren und Spaltenvektoren zurück.

Bemerkung 10.23. (Zusammenhang zwischen Spaltenvektoren und Punkten)

Jeder Punkt $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert seinen Ortsvektor

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

eindeutig. Damit ist P eindeutig ein Spaltenvektor zugeordnet.

Umgekehrt gibt es zu jedem Spaltenvektor

$$\vec{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

genau einen Punkt $P = (p_1, \dots, p_n)$ in \mathbb{R}^n , so dass $\overrightarrow{\mathcal{O}P} = \vec{\mathbf{p}}$. (Für $n = 2$ oder $n = 3$ findet man P , indem man $\vec{\mathbf{p}}$ mit seinem Fuß an den Ursprung \mathcal{O} anheftet. Die Pfeilspitze zeigt dann auf P .)

Man kann also Punkte in \mathbb{R}^n mit ihren Ortsvektoren identifizieren. Deshalb wird in der Fachliteratur häufig nicht klar zwischen Punkten und Vektoren getrennt, d.h. der Punkt (p_1, \dots, p_n) wird manchmal als Vektor bezeichnet, und umgekehrt wird

$$\vec{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

manchmal als Punkt bezeichnet.

Nun nutzen wir Verbindungsvektoren und Ortsvektoren, um Geraden bzw. Ebenen in \mathbb{R}^n (mit $n \geq 2$ bzw. $n \geq 3$) darzustellen.

Anwendung 10.24. (Parameterdarst. von Geraden und Ebenen)

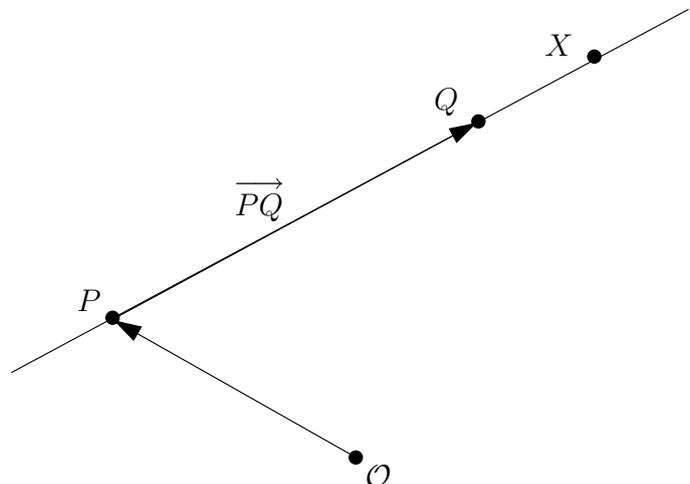
- (a) Seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$ (wobei $n \geq 2$) mit $P \neq Q$. Die **Gerade** \mathcal{G} durch P und Q kann beschrieben werden durch

$$\mathcal{G} = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \text{es existiert } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \overrightarrow{\mathcal{O}X} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + t \overrightarrow{PQ} \right\}.$$

Der Verbindungsvektor \overrightarrow{PQ} ist ungleich dem Nullvektor $\vec{\mathbf{0}}$, da $P \neq Q$ ist, und \overrightarrow{PQ} heißt ein **Richtungsvektor** von \mathcal{G} . Die Gleichung

$$\overrightarrow{\mathcal{O}X} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + t \overrightarrow{PQ}$$

heißt eine **Parameterdarstellung** von \mathcal{G} .



(Weder Richtungsvektor noch Parameterdarstellung sind eindeutig! Für je-

des $\lambda \neq 0$ ist auch $\lambda \overrightarrow{PQ}$ ein Richtungsvektor von \mathcal{G} . In der Parameterdarstellung kann man \overrightarrow{OP} durch \overrightarrow{OR} ersetzen, sofern $R \in \mathcal{G}$.)

- (b) Sind P, Q, R drei verschiedene Punkte in \mathbb{R}^n (wobei $n \geq 3$), die nicht auf einer Geraden liegen, so spannen diese eine **Ebene** \mathcal{E} auf:

$$\mathcal{E} = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \text{es gibt } s, t \in \mathbb{R} \text{ mit } \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{PQ} + t \overrightarrow{PR} \right\}.$$

Die Gleichung $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{PQ} + t \overrightarrow{PR}$ heißt eine **Parameterdarstellung** von \mathcal{E} .

Als Anwendung betrachten wir die Berechnung des Schwerpunktes von k Massenpunkten.

Chemische Anwendung 10.25. (Schwerpunkt)

Sind P_1, P_2, \dots, P_k Massenpunkte in \mathbb{R}^3 mit den jeweiligen Massen m_1, m_2, \dots, m_k , so kann der **Schwerpunkt** S von P_1, P_2, \dots, P_k berechnet werden durch

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{M} \left(m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots + m_k \overrightarrow{OP_k} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{OP_i},$$

wobei

$$M := m_1 + m_2 + \dots + m_k = \sum_{i=1}^k m_i$$

die Gesamtmasse ist. Sind die Massen alle gleich, d.h. gilt $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$ (und damit $M = km$), so vereinfacht sich die Formel zu

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{k} \left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_k} \right).$$

10.5 Kreise in \mathbb{R}^2 und Kugeloberflächen in \mathbb{R}^{3*}

In diesem Teilkapitel beschreiben wir Kreislinien in \mathbb{R}^2 und Kugeloberflächen in \mathbb{R}^3 mit Hilfe von Vektoren. Wir leiten dabei die Kreisgleichung und die Kugelgleichung her.

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

Definition 10.26. (Kreislinie in \mathbb{R}^2)

Sei $n = 2$. Die **Kreislinie** \mathcal{K} um den **Mittelpunkt** $M = (m_1, m_2)$ mit **Radius** $r > 0$ ist die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{R}^2$, die von M den Abstand r haben:

$$\mathcal{K} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : |\overrightarrow{MX}| = r \right\}. \quad (10.1)$$

Es gilt also für $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{K} &\iff |\overrightarrow{MX}| = r \\ &\iff |\vec{x} - \vec{m}| = r \\ &\iff \sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2} = r \\ &\iff (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

nennt man die **Kreisgleichung** der Kreislinie (10.1).

Beispiel 10.27. (Kreislinie)

Die Kreisgleichung

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 = 9$$

beschreibt die Kreislinie \mathcal{K} um $M = (2, -1)$ mit Radius $r = \sqrt{9} = 3$. Also

$$\mathcal{K} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left| \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 + 1 \end{bmatrix} \right| = 3 \right\}.$$

Nun definieren wir die Kugeloberfläche oder Sphäre.

Definition 10.28. (Kugeloberfläche/Sphäre in \mathbb{R}^3)

Sei $n = 3$. Die **Kugeloberfläche** (oder **Sphäre**) \mathcal{S} um den **Mittelpunkt** $M = (m_1, m_2, m_3)$ mit **Radius** $r > 0$ ist die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{R}^3$, die von M den Abstand r haben:

$$\mathcal{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : |\overrightarrow{MX}| = r \right\}. \quad (10.2)$$

Es gilt also für $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S} &\iff |\overrightarrow{MX}| = r \\ &\iff |\vec{x} - \vec{m}| = r \\ &\iff \sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2} = r \\ &\iff (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

nennt man die **Kugelgleichung** der Kugeloberfläche (10.2).

Beispiel 10.29. (Kugeloberfläche/Sphäre)

Die Kugeloberfläche (oder Sphäre) um $M = (1, 0, -1)$ mit Radius $r = 2$ wird beschrieben durch die Kugelgleichung

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 = 4.$$

10.6 Das Skalarprodukt

Zunächst definieren wir den **Winkel zwischen zwei Vektoren**:

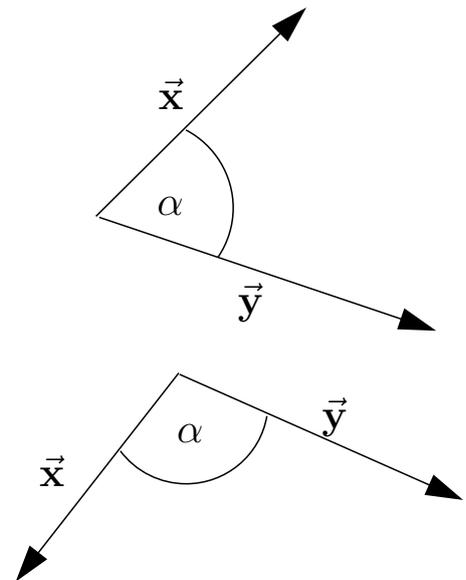
Seien also \vec{x}, \vec{y} zwei n -dimensionale Vektoren. Wir setzen voraus, dass beide ungleich dem Nullvektor $\vec{0}$ sind, und heften beide Vektoren (mit ihren Fußpunkten) an ein und denselben Punkt an.

Den Winkel zwischen \vec{x} und \vec{y} bezeichnen wir mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$. $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ liegt immer zwischen $0^\circ \cong 0$ und $180^\circ \cong \pi$. Es gilt:

$$\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \sphericalangle(\vec{y}, \vec{x}).$$

Falls $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = 90^\circ \cong \pi/2$ ist, so schreiben wir $\vec{x} \perp \vec{y}$. (Das Symbol „ \perp “ steht für „ist senkrecht zu“.)

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, definieren wir noch $\sphericalangle(\vec{0}, \vec{x}) := \pi/2$ für jeden Vektor \vec{x} , d.h. der Nullvektor $\vec{0}$ steht per Definition auf jedem Vektor \vec{x} senkrecht.



Definition 10.30. (Skalarprodukt)

Seien \vec{x} und \vec{y} n -dimensionale Vektoren. Das Skalarprodukt von \vec{x} und \vec{y} ist definiert durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos(\alpha),$$

wobei $\alpha := \angle(\vec{x}, \vec{y})$.

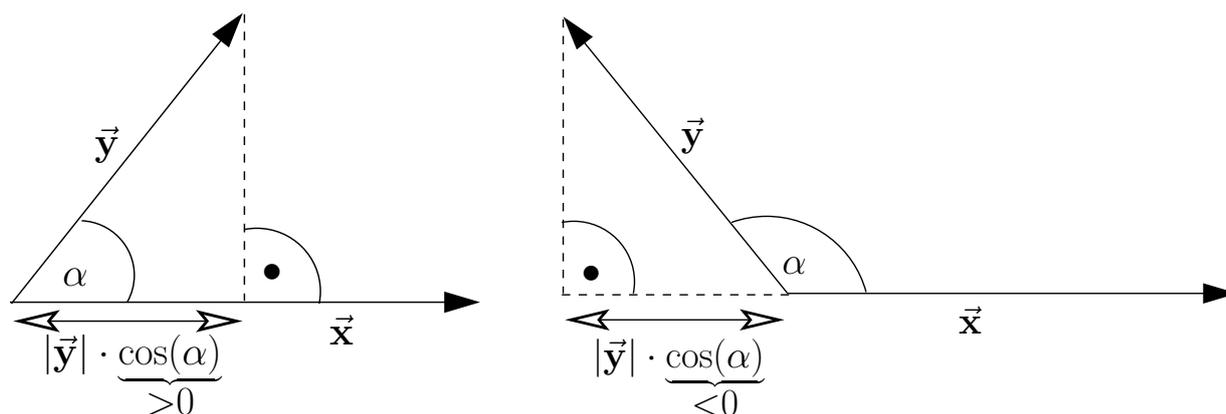
Bemerkung 10.31. (Skalarprodukt)

- (1) $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$, d.h. $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ist ein Skalar; daher kommt der Name „Skalarprodukt“.
- (2) Aus dem Vorzeichen von $\vec{x} \cdot \vec{y}$ können wir die folgende Information gewinnen (siehe Skizzen unten):

$$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0 \iff \cos(\alpha) > 0 \iff \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{d.h. } \vec{x}, \vec{y} \text{ schließen einen spitzen Winkel ein}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} < 0 \iff \cos(\alpha) < 0 \iff \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] , \quad \text{d.h. } \vec{x}, \vec{y} \text{ schließen einen stumpfen Winkel ein}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ, \quad \text{d.h. } \vec{x} \text{ steht senkrecht auf } \vec{y}$$

**Definition 10.32. (orthogonale Vektoren)**

Gilt für n -dimensionale Vektoren \vec{x} und \vec{y} , dass $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ist, so sagen wir, \vec{x} und \vec{y} sind **orthogonal**.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 10.33. (Skalarprodukt)

(a) Seien

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann sind $|\vec{x}| = 2$, $|\vec{y}| = \sqrt{2}$ und $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 45^\circ \cong \frac{\pi}{4}$, und wir berechnen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

(b) Seien

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann sind $|\vec{x}| = 2$, $|\vec{y}| = \sqrt{2}$ und $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 135^\circ \cong \frac{3\pi}{4}$, und wir berechnen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2.$$

(c) Seien

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann sind $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 1$ und $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 90^\circ \cong \frac{\pi}{2}$, und wir berechnen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Die beiden Vektoren sind orthogonal.

Im nachfolgenden Hilfssatz halten wir die Eigenschaften des Skalarprodukts fest.

Hilfssatz 10.34. (Eigenschaften des Skalarprodukts)

Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ n -dimensionale Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$

(2) $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

(3) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:** $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$

(4) **Kommutativgesetz:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

$$(5) \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$$

(6) Für die n -dimensionalen **Standardbasisvektoren** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ gilt:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = k, \\ 0, & \text{wenn } i \neq k. \end{cases}$$

(7) **Distributivgesetze:**

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}, \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Wir beweisen die Eigenschaften des Skalarprodukts aus Hilfssatz 10.34.

Beweis von Hilfssatz 10.34:

(1) Wir untersuchen die beiden Fälle $\vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{x} \neq \vec{0}$ separat.

- Falls $\vec{x} = \vec{0}$ ist, so folgt: $\vec{0} \cdot \vec{0} = |\vec{0}| \cdot |\vec{0}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = |\vec{0}|^2$.
- Falls $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist, so ist $\angle(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, und es folgt:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = |\vec{x}|^2.$$

(2) Eigenschaft (2) folgt aus Eigenschaft (1), indem wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen.

(3) Sei $\alpha := \angle(\vec{x}, \vec{y})$. Dann gilt:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \left| |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha) \right| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \underbrace{|\cos(\alpha)|}_{\leq 1} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|.$$

(4) Für zwei beliebige n -dimensionale Vektoren \vec{x} und \vec{y} gilt $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \angle(\vec{y}, \vec{x}) =: \alpha$. Damit folgt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{y}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = \vec{y} \cdot \vec{x}.$$

(5) Wir betrachten die drei Fälle $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$ separat.

- *Fall* $\lambda = 0$: Ist $\lambda = 0$, so ist $0 \vec{x} = \vec{0}$ und $0 \vec{y} = \vec{0}$, und wir erhalten

$$\underbrace{0 (\vec{x} \cdot \vec{y})}_{=0} = \underbrace{(0 \vec{x}) \cdot \vec{y}}_{=\vec{0} \cdot \vec{y} = 0} = \underbrace{\vec{x} \cdot (0 \vec{y})}_{=\vec{x} \cdot \vec{0} = 0}.$$

Dabei haben wir genutzt, dass für jeden Vektor \vec{z} gilt $\vec{z} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{z} = 0$, weil $|\vec{0}| = 0$ ist.

- *Fall $\lambda > 0$:* Ist $\lambda > 0$, so ist $\angle(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \angle(\vec{x}, \vec{y}) =: \alpha$, und es folgt

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} &= |\lambda \vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha) = \underbrace{|\lambda|}_{=\lambda} \cdot |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha) \\ &= \lambda \cdot \underbrace{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha)}_{=\vec{x} \cdot \vec{y}} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}). \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$.

- *Fall $\lambda < 0$:* Ist $\lambda < 0$, so ist $\angle(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = 180^\circ - \angle(\vec{x}, \vec{y})$. Mit $\alpha := \angle(\vec{x}, \vec{y})$ folgt also $\angle(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \pi - \alpha$, und mit dem Additionstheorem für den Cosinus (siehe Seite 46) gilt

$$\cos(\pi - \alpha) = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \underbrace{\cos(-\alpha)}_{=\cos(\alpha)} - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \sin(-\alpha) = -\cos(\alpha).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} &= |\lambda \vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\pi - \alpha) = |\lambda| \cdot |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot (-\cos(\alpha)) \\ &= \underbrace{-|\lambda|}_{=\lambda} \cdot \underbrace{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha)}_{=\vec{x} \cdot \vec{y}} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}). \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$.

- (6) Zwei verschiedene n -dimensionale Standardeinheitsvektoren \vec{e}_i und \vec{e}_k haben zueinander jeweils den Winkel

$$\angle(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = 90^\circ \cong \pi/2.$$

Weiter haben die Standardeinheitsvektoren jeweils die Länge 1. Somit gilt

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k &= \underbrace{|\vec{e}_i|}_{=1} \cdot \underbrace{|\vec{e}_k|}_{=1} \cdot \cos(\angle(\vec{e}_i, \vec{e}_k)) \\ &= \begin{cases} |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_i| \cdot \cos(0) = 1 & \text{für } i = k, \\ |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_i| \cdot \cos(\pi/2) = 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

- (7) Wir geben einen anschaulichen Beweis für das erste Distributivgesetz:

Seien die Winkel (vgl. Skizze)

$$\alpha := \angle(\vec{x}, \vec{z}),$$

$$\beta := \angle(\vec{y}, \vec{z}),$$

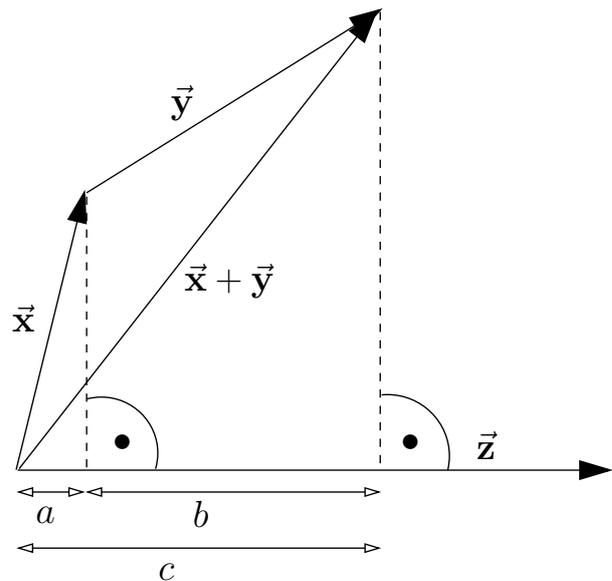
$$\gamma := \angle(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}),$$

und seien die Projektionen der Vektoren \vec{x} , \vec{y} und $\vec{x} + \vec{y}$ auf \vec{z} (vgl. Skizze)

$$a := |\vec{x}| \cos(\alpha),$$

$$b := |\vec{y}| \cos(\beta),$$

$$c := |\vec{x} + \vec{y}| \cos(\gamma).$$



Da gilt (vgl. Skizze) $c = a + b$, folgt

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} &= |\vec{x} + \vec{y}| \cdot |\vec{z}| \cdot \cos(\gamma) = c \cdot |\vec{z}| \\ &= (a + b) \cdot |\vec{z}| = (|\vec{x}| \cos(\alpha) + |\vec{y}| \cos(\beta)) \cdot |\vec{z}| \\ &= |\vec{x}| |\vec{z}| \cos(\alpha) + |\vec{y}| |\vec{z}| \cos(\beta) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}. \end{aligned}$$

Das zweite Distributivgesetz folgt nun aus dem ersten Distributivgesetz mit Hilfe des Kommutativgesetzes aus Hilfssatz 10.34 (4):

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{z} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}. \quad \square$$

Wir lernen nun eine zweite Formel zur Berechnung des Skalarprodukts kennen.

Satz 10.35. (alternative Formel für das Skalarprodukt)

Seien \vec{x} und \vec{y} n -dimensionale Vektoren, also

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Beweis von Satz 10.35: Nach Bemerkung 10.18 gilt:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i,$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n = \sum_{k=1}^n y_k \vec{e}_k.$$

Damit folgt mit Hilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts aus Hilfssatz 10.34:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k \vec{e}_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (x_i \vec{e}_i) \cdot (y_k \vec{e}_k) && \text{(nach Hilfssatz 10.34 (7))} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (x_i y_k) \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)}_{=\delta_{i,k}} && \text{(nach Hilfssatz 10.34 (5))} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, && \text{(nach Hilfssatz 10.34 (6))} \end{aligned}$$

wobei $\delta_{i,k}$ das Kronecker-Delta mit Wert 1 wenn $i = k$ und Wert 0 sonst ist. \square

Als Anwendung der alternativen Formel für das Skalarprodukt können wir nun den Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren (die beide vom Nullvektor verschieden sind) berechnen.

Anwendung 10.36. (Winkelberechnung)

Gegeben seien zwei n -dimensionale Vektoren \vec{x} und \vec{y} , die beide ungleich dem Nullvektor $\vec{0}$ sind. Gesucht ist der Winkel $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen den beiden Vektoren. Es gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}, \quad \text{also} \quad \alpha = \arccos \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} \right),$$

wobei wir das Skalarprodukt im Zähler nun mit der Formel aus Satz 10.35 berechnen.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 10.37. (Winkelberechnung)

- (a) Wir suchen den Winkel zwischen den beiden (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{x}| = 2, \quad |\vec{y}| = \sqrt{2}.$$

Dann gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2.$$

Daraus folgt für den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen den beiden Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ.$$

- (b) Wir suchen den Winkel zwischen den beiden (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst das Skalarprodukt:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Weiter wissen wir, dass $|\vec{x}| \neq 0$ und $|\vec{y}| \neq 0$ gilt, da keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist. Also finden wir für den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen den beiden Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \frac{0}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ.$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir nun auch die **Dreiecksungleichung**

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

(vgl. Satz 10.12 (3)) beweisen.

Beweis von Satz 10.12 (3):

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \quad (\text{nach Hilfssatz 10.34 (1)})$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} && \text{(nach Hilfssatz 10.34 (7))} \\
&= |\vec{x}|^2 + 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2 && \text{(nach Hilfssatz 10.34 (1) und (4))} \\
&\leq |\vec{x}|^2 + 2 |\vec{x} \cdot \vec{y}| + |\vec{y}|^2 && \text{(da } \vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x} \cdot \vec{y}|) \\
&\leq |\vec{x}|^2 + 2 |\vec{x}| |\vec{y}| + |\vec{y}|^2 && \text{(nach Hilfssatz 10.34 (3))} \\
&= (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2, && \text{(nach der 1. binom. Formel)}
\end{aligned}$$

und durch Ziehen der Quadratwurzel erhalten wir die Dreiecksungleichung

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|. \quad \square$$

10.7 Geraden in \mathbb{R}^2 und Ebenen in \mathbb{R}^{3*}

In diesem Teilkapitel betrachten wir Geraden in \mathbb{R}^2 und Ebenen in \mathbb{R}^3 .

Sei eine Gerade \mathcal{G} in \mathbb{R}^2 gegeben durch die Parameterdarstellung (siehe Skizze, vgl. auch Anwendung 10.24 (a))

$$\vec{x} = \vec{p} + t \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit dem Richtungsvektor bzw. dem Stützvektor

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

Weiter sei

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

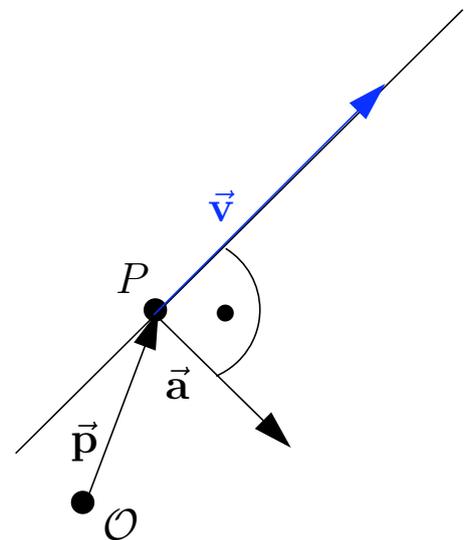
so gewählt, dass $\vec{a} \perp \vec{v}$ (d.h. $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$).

Liegt $X = (x_1, x_2)$ auf \mathcal{G} , so gilt für den zugehörigen Ortsvektor $\vec{x} = \vec{p} + t \vec{v}$, dass

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot (\vec{p} + t \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{p} + t \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{v}}_{=0} = \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{p}}_{=: b}.$$

Also gilt:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \quad \text{mit} \quad b := \vec{a} \cdot \vec{p} = a_1 p_1 + a_2 p_2.$$



*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

Als Wahl für $\vec{\mathbf{a}}$ mit $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ und $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{v}}$ kommen alle Vektoren der Form

$$\vec{\mathbf{a}} = \lambda \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

in Frage. Weitere $\vec{\mathbf{a}}$ mit $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ und $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{v}}$ gibt es nicht.

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 10.38. (Geradengleichung)

Sei \mathcal{G} gegeben durch

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann wählen wir

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

und erhalten

$$b = \vec{\mathbf{a}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 5.$$

Also ist die Geradengleichung

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 5 \quad \iff \quad 2x_1 - x_2 = 5.$$

Umgekehrt ist auch jede Teilmenge von \mathbb{R}^2 der Form

$$\{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$$

mit $b \in \mathbb{R}$ und

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq \vec{\mathbf{0}}$$

eine Gerade in \mathbb{R}^2 , deren Richtungsvektor auf $\vec{\mathbf{a}}$ senkrecht steht.

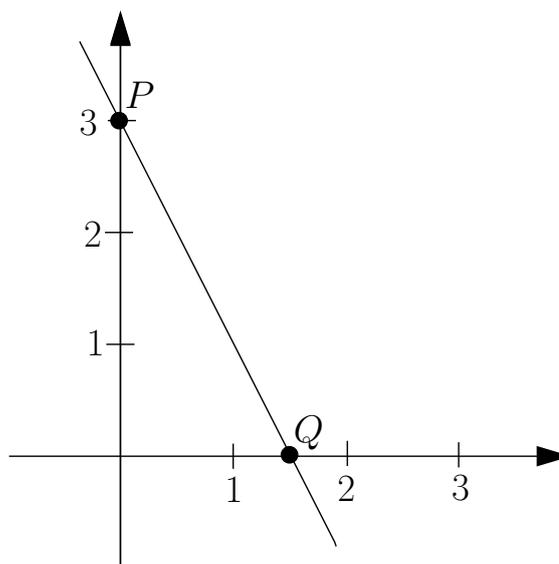
Beispiel 10.39. (Geradengleichung)

Die Geradengleichung

$$2x_1 + x_2 = 3 \quad (10.3)$$

beschreibt die Gerade \mathcal{G} durch die beiden Punkte $P = (0, 3)$ und $Q = (\frac{3}{2}, 0)$, wie man durch Einsetzen in (10.3) sieht. Eine Parameterdarstellung von \mathcal{G} ist beispielsweise

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Wir halten in einer Definition fest, was wir gerade hergeleitet haben.

Definition 10.40. (Geradengleichung in \mathbb{R}^2)

Sei $b \in \mathbb{R}$ und

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq \vec{\mathbf{0}}.$$

Dann nennt man

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \quad (10.4)$$

eine **Geradengleichung** in \mathbb{R}^2 . Die Menge aller Punkte $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, die (10.4) erfüllen, liegen auf einer **Gerade** in \mathbb{R}^2 , die auf $\vec{\mathbf{a}}$ senkrecht steht.

Sei eine Ebene \mathcal{E} im \mathbb{R}^3 gegeben durch die Parameterdarstellung (vgl. auch Anwendung 10.24 (b))

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + s \vec{\mathbf{v}} + t \vec{\mathbf{w}}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad (10.5)$$

wobei die beiden Vektoren $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ und $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ nicht parallel oder antiparallel sind. Sei $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ so gewählt, dass $\vec{\mathbf{a}}$ auf \mathcal{E} senkrecht steht, d.h. $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{w}}$. Liegt $X = (x_1, x_2, x_3)$ in \mathcal{E} , so gilt für den zugehörigen Ortsvektor $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + s \vec{\mathbf{v}} + t \vec{\mathbf{w}}$, dass

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{p}} + s \vec{\mathbf{v}} + t \vec{\mathbf{w}}) = \underbrace{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}}_{=: b} + s \underbrace{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}_{=0} + t \underbrace{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}_{=0},$$

d.h. es gilt

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \quad \text{mit} \quad b = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3.$$

Einen Vektor $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, der auf den beiden Spannvektoren $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{w}}$ der Parameterdarstellung (10.5) der Ebene senkrecht steht, kann man leicht mit dem Kreuzprodukt berechnen (siehe Teilkapitel 10.8).

Sind umgekehrt $b \in \mathbb{R}$ und ein Vektor

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \neq \vec{\mathbf{0}}$$

gegeben, so ist

$$\{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}$$

eine Ebene in \mathbb{R}^3 , die auf $\vec{\mathbf{a}}$ senkrecht steht.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 10.41. (Ebene in \mathbb{R}^3)

Sie die Ebene \mathcal{E} gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 17 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\vec{\mathbf{v}}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\vec{\mathbf{w}}}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Durch Inspektion und Nachrechnen sieht man, dass der Vektor

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

auf den Vektoren $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{w}}$ senkrecht steht. Also finden wir die Ebenengleichung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{x}} = x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 17,$$

d.h. $x_1 = 17$.

Beispiel 10.42. (Ebene in \mathbb{R}^3)

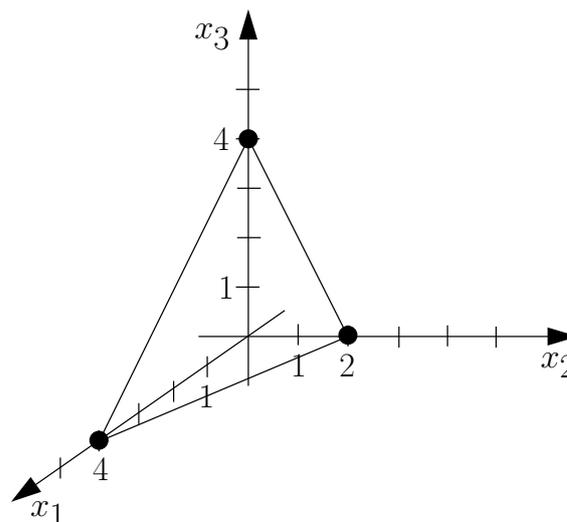
Die Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \tag{10.6}$$

beschreibt eine Ebene \mathcal{E} in \mathbb{R}^3 durch die Punkte $P = (4, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ und $R = (0, 0, 4)$, wie man durch Einsetzen in (10.6) sieht. Eine Parameterdarstellung der Ebene \mathcal{E} ist beispielsweise

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

mit $s, t, \in \mathbb{R}^3$.



Wir halten abschließend in einer Definition fest, was wir über Ebenen in \mathbb{R}^3 gelernt haben.

Definition 10.43. (Ebenengleichung in \mathbb{R}^3)

Sei $b \in \mathbb{R}$ und

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \neq \vec{0}.$$

Dann nennt man

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \quad (10.7)$$

eine **Ebenengleichung** in \mathbb{R}^3 . Die Menge aller Punkte $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, die (10.7) erfüllen, liegen auf einer **Ebene** in \mathbb{R}^3 , die auf \vec{a} senkrecht steht.

10.8 Das Vektor- oder Kreuzprodukt

Im letzten Teilkapitel lernen wir das Vektor- oder Kreuzprodukt von Vektoren im \mathbb{R}^3 kennen. Dieses ist **nur** für Vektoren im \mathbb{R}^3 definiert.

Definition 10.44. (Vektorprodukt/Kreuzprodukt)

Seien

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

dreidimensionale reelle Vektoren. Das **Vektorprodukt** (oder **Kreuzprodukt**) $\vec{u} \times \vec{v}$ ist definiert durch

$$\vec{u} \times \vec{v} := \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 10.45. (Vektorprodukt/Kreuzprodukt)

- (1) $\vec{u} \times \vec{v}$ ist ein **Vektor**; daher der Name „Vektorprodukt“.
- (2) Das Vektorprodukt ist ausschließlich für dreidimensionale Vektoren erklärt!

Die Berechnung der Vektorprodukts kann man sich mit der folgenden **Merkhilfe** erleichtern: Wir schreiben die ersten beiden Einträge von \vec{u} bzw. \vec{v} , also u_1 und u_2 bzw. v_1 und v_2 noch einmal unter \vec{u} bzw. \vec{v} . Dann erhalten wir die Einträge von $\vec{u} \times \vec{v}$, indem wir in absteigender Reihenfolge jeweils die durch die schrägen Linien verbundenen Einträge multiplizieren und anschließend die durch die rote schräge Linie multiplizierten Einträge von denen durch die blaue schräge Linie multiplizierten Einträgen subtrahieren. Also

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} \\ u_1 & \begin{array}{c} \text{blue } \diagdown \\ \text{red } \diagup \end{array} & v_1 \\ u_2 & \begin{array}{c} \text{blue } \diagdown \\ \text{red } \diagup \end{array} & v_2 \end{array}$$

Betrachten wir ein Beispiel für die Berechnung des Vektorprodukts.

Beispiel 10.46. (Vektorprodukt)

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -18 \\ -3 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{array}{c} \text{blue } \diagdown \\ \text{red } \diagup \end{array} & -4 \\ -2 & \begin{array}{c} \text{blue } \diagdown \\ \text{red } \diagup \end{array} & 5 \end{array}$$

Als Nächstes interessieren wir uns für die geometrische Interpretation der Vektorprodukts.

Bemerkung 10.47. (geom. Interpretation des Vektorprodukts)

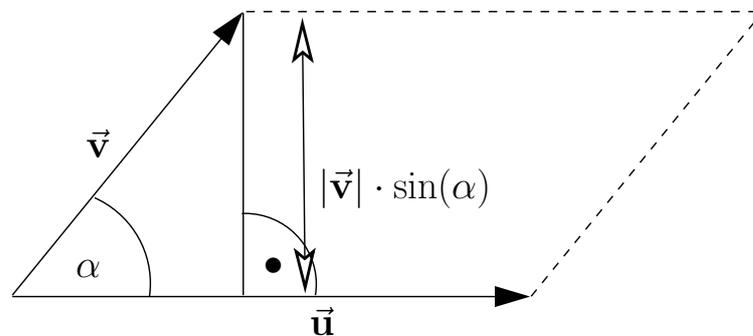
(1) Sind \vec{u} und \vec{v} dreidimensionale reelle Vektoren, so gilt

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad \text{und} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v},$$

d.h. der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ steht **senkrecht auf den Vektoren \vec{u} und \vec{v}** .
Spannen die Vektoren \vec{u} und \vec{v} eine Ebene auf, so steht $\vec{u} \times \vec{v}$ senkrecht auf dieser Ebene.

(2) Es gilt

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha), \quad \text{wobei } \alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$



Also ist $|\vec{u} \times \vec{v}|$ der Flächeninhalt des von \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Parallelogramms.

(3) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ gilt genau dann, wenn \vec{u} oder \vec{v} der Nullvektor ist, oder wenn \vec{u} und \vec{v} parallel oder antiparallel sind. Spannen \vec{u} und \vec{v} eine Ebene auf, so ist weder \vec{u} noch \vec{v} der Nullvektor, noch sind \vec{u} und \vec{v} parallel oder antiparallel. Also ist $\vec{u} \times \vec{v}$ in diesem Fall immer $\neq \vec{0}$.

Wir beweisen die in Bemerkung 10.47 festgehaltenen Eigenschaften des Vektorprodukts.

Beweis von Bemerkung 10.47:

(1) Um nachzuweisen, dass $\vec{u} \times \vec{v}$ zu \vec{u} und \vec{v} senkrecht ist, müssen wir beweisen, dass $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$ und $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ gilt.

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) u_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) u_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) u_3 \end{aligned}$$

$$= u_1 u_2 v_3 - u_1 v_2 u_3 + v_1 u_2 u_3 - u_1 u_2 v_3 + u_1 v_2 u_3 - v_1 u_2 u_3 = 0.$$

Mit einer analogen Rechnung weist man nach, dass $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ ist.

(2) Falls wir zeigen können, dass

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \quad (10.8)$$

gilt, so folgt mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ und $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha)$, dass

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2(\alpha), \end{aligned}$$

wobei wir

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad \iff \quad \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$

genutzt haben. Da $\alpha \in [0, \pi]$ gilt, ist $\sin(\alpha) \geq 0$; also folgt durch Ziehen der Quadratwurzel

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\sin(\alpha)| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha).$$

Wir müssen also nur noch die sogenannte Lagrange-Identität (10.8) beweisen. Dieses ist nicht schwierig aber rechenaufwendig und ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

(3) Aus Hilfssatz 10.7 und Bemerkung 10.47 (2) folgt:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} &\iff |\vec{u} \times \vec{v}| = 0 \iff |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha) = 0 \\ &\iff (|\vec{u}| = 0 \text{ oder } |\vec{v}| = 0 \text{ oder } \sin(\alpha) = 0) \\ &\iff (\vec{u} = \vec{0} \text{ oder } \vec{v} = \vec{0} \text{ oder } \alpha = 0^\circ \text{ oder } \alpha = 180^\circ) \end{aligned}$$

Also ist (mindestens) einer der beiden Vektoren \vec{u} oder \vec{v} der Nullvektor, oder die beiden Vektoren sind parallel oder antiparallel. \square

Im nächsten Satz halten wir die Rechenregeln für das Vektorprodukt fest.

Satz 10.48. (Rechenregeln für das Vektorprodukt)

Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dreidimensionale Vektoren und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.

$$(1) \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$(2) \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad (\text{Das Vektorprodukt ist also **nicht** kommutativ!})$$

(3) **Distributivgesetze:**

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w},$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}.$$

(Es gilt immer „Punkt- vor Strichrechnung“, genauer gesagt „Kreuz- vor Strichrechnung“.)

$$(4) \lambda (\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$$

$$(5) \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Satz 10.48 (1) folgt direkt aus Bemerkung 10.47 (2). Alle anderen Aussagen zeigt man durch Nachrechnen.

Achtung: Das Vektorprodukt ist **nicht assoziativ**, d.h. im Allgemeinen gilt:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Die Klammern dürfen hier auf keinen Fall weggelassen werden, was durch das folgende Beispiel illustriert wird:

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{0} = \vec{0}.$$

Es gilt $-\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, und wir erhalten mit der unterschiedlichen Klammersetzung unterschiedliche Ergebnisse.

In der nächsten Bemerkung halten wir weitere Rechenregeln für das Kreuzprodukt fest, die man als Übungsaufgabe durch Nachrechnen beweisen kann.

Bemerkung 10.49. (weitere Rechenregeln für das Vektorprodukt)

Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dreidimensionale Vektoren. Dann gelten:

(1) **Graßmann-Identität:**

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

(2) **Jacobi-Identität:**

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$$

(3) **Lagrange-Identität:**

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

KAPITEL 11

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

In Teilkapitel 11.1 führen wir Matrizen ein. In Teilkapitel 11.2 schreiben wir beliebige reelle lineare Gleichungssysteme mit Vektoren und Matrizen, und in Teilkapitel 11.3 lernen wir das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems kennen. In Teilkapitel 11.4 lernen wir erste allgemeine theoretische Aussagen über die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems kennen.

11.1 Matrizen und Vektoren

Wir führen zunächst Matrizen mit reellen Einträgen ein.

Definition 11.1. (Matrizen)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Ein rechteckiges Schema der Form

$$\mathbf{A} := [a_{i,k}] := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

mit allen $a_{i,k} \in \mathbb{R}$ heißt eine $m \times n$ -**Matrix**. Sie hat m Zeilen und n Spalten. Die $a_{i,k}$ heißen die **Komponenten** oder **Einträge** der Matrix, wobei sich erste Index (also hier i) auf die Nummer der Zeile und der zweite Index (also hier k) auf die Nummer der Spalte bezieht.

(2) $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichne die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{R} .

(3) Die $m \times n$ -Matrix

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m \times n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

heißt die **Nullmatrix** in $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(4) Matrizen in $\mathbb{R}^{m \times 1}$ (d.h. Matrizen mit nur einer Spalte) heißen auch **Spaltenvektoren**.

(5) Matrizen in $\mathbb{R}^{1 \times n}$ (d.h. Matrizen mit nur einer Zeile) heißen auch **Zeilenvektoren**.

Wie wir es bereits in Kapitel 10 kennengelernt haben, kann man **Spaltenvektoren mit Punkten in \mathbb{R}^m identifizieren**:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{wird mit dem Punkt} \quad (a_1, \dots, a_m) \quad \text{identifiziert.}$$

Deshalb schreiben wir statt $\mathbb{R}^{m \times 1}$ auch \mathbb{R}^m .

Definition 11.2. (gleiche Matrizen)

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} = [b_{i,k}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ sind **gleich** (also $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), wenn gilt:

(i) $m = p$ und $n = q$ und

(ii) $a_{i,k} = b_{i,k}$ für alle $i = 1, 2, \dots, m$ und alle $k = 1, 2, \dots, n$.

Betrachten wir einige Beispiele für Matrizen.

Beispiel 11.3. (Matrizen)

(a) Hier sind drei Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \quad \begin{bmatrix} -\pi & 7 & 13 \\ 0 & 22 & -11 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und ein Spaltenvektor und ein Zeilenvektor

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \quad [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}.$$

(b) Hier sind einige Nullmatrizen:

$$\mathbf{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{O}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Es gilt

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{da die Spaltenanzahl verschieden ist.}$$

(c) Die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = [b_{i,k}] \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \text{mit} \quad b_{i,k} = (-1)^{i+k}$$

sind gleich, denn

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Als Nächstes lernen wir die Addition von Matrizen und die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (also einer Zahl in \mathbb{R}) kennen.

Definition 11.4. (Addition von Matrizen)

Zwei $m \times n$ -Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,k}]$, $\mathbf{B} = [b_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ werden **addiert**, indem man die entsprechenden Einträge addiert:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := [a_{i,k} + b_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{d.h.}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Betrachten wir einige Beispiele für die Addition von Matrizen.

Beispiel 11.5. (Addition von Matrizen)

(a) Die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

sind beide in $\mathbb{R}^{2 \times 3}$. Ihre Summe ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+7 & 0+1 & 4-6 \\ 2-1 & -1+2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

können nicht addiert werden, da die Matrizen nicht vom selben Typ sind. (\mathbf{A} ist eine 2×2 -Matrix, und \mathbf{B} ist eine 2×3 -Matrix.)

Im nächsten Satz sind die Rechenregeln für die Matrizenaddition festgehalten.

Satz 11.6. (Rechenregeln für die Matrizenaddition)

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gelten:

- (1) **Kommutativgesetz:** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (2) **Assoziativgesetz:** $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (3) $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{m \times n} = \mathbf{O}_{m \times n} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ für die Nullmatrix $\mathbf{O}_{m \times n}$ in $\mathbb{R}^{m \times n}$

Man kann die Rechenregeln für Matrizen durch direktes Nachrechnen mit Hilfe der Rechenregeln für die reellen Zahlen nachweisen.

Beweis von Satz 11.6: Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{m \times n}$ und die $m \times n$ -Nullmatrix

$$\mathbf{O}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{1,1} + a_{1,1} & \cdots & b_{1,n} + a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} + a_{m,1} & \cdots & b_{m,n} + a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile das Kommutativgesetz der reellen Zahlen genutzt haben.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} + c_{1,1} & \cdots & b_{1,n} + c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} + c_{m,1} & \cdots & b_{m,n} + c_{m,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} + c_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} + c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} + c_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} + c_{m,n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},
\end{aligned}$$

wobei wir das Assoziativgesetz für die reellen Zahlen genutzt haben.

(3) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + \mathbf{O}_{m \times n} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{1,1} + 0 & \cdots & a_{1,n} + 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + 0 & \cdots & a_{m,n} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Wegen Satz 11.6 (1) gilt weiter $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{m \times n} = \mathbf{O}_{m \times n} + \mathbf{A}$.

Damit haben wir alle drei Rechenregeln für die Matrizenaddition bewiesen. \square

Nun lernen wir die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar kennen.

Definition 11.7. (Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar)

Eine Matrix $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird **mit dem Skalar** $\lambda \in \mathbb{R}$ **multipliziert**, indem man jeden Eintrag von \mathbf{A} mit λ multipliziert:

$$\lambda \mathbf{A} := [\lambda a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{d.h.}$$

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$-\mathbf{A} := (-1) \mathbf{A} = [-a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (11.1)$$

Beispiel 11.8. (Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar)

Seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda = -2, \quad \mu = 3.$$

Dann sind

$$\lambda \mathbf{A} = (-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 5 & (-2) \cdot 6 \\ (-2) \cdot 7 & (-2) \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \\ -10 & -12 \\ -14 & -16 \end{bmatrix},$$

$$\mu \mathbf{B} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 21 \\ -3 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 11.9. (Subtraktion von Matrizen)

Mit (11.1) definieren wir die Subtraktion von Matrizen

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} := \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{B} + (-1) \mathbf{A} \quad \text{für alle } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Satz 11.10. (Rechenregeln für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar)Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$(1) \text{ Assoziativgesetz: } \lambda(\mu \mathbf{A}) = (\lambda\mu) \mathbf{A} = (\mu\lambda) \mathbf{A} = \mu(\lambda \mathbf{A})$$

$$(2) \text{ Distributivgesetze:}$$

$$(\lambda + \mu) \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$$

Beweis von Satz 11.10: Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{und} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(1) Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda(\mu \mathbf{A}) &= \lambda \begin{bmatrix} \mu a_{1,1} & \cdots & \mu a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m,1} & \cdots & \mu a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mu a_{1,1} & \cdots & \lambda \mu a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \mu a_{m,1} & \cdots & \lambda \mu a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda \mu) \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = (\lambda \mu) \mathbf{A} = (\mu \lambda) \mathbf{A},\end{aligned}$$

wobei wir das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Multiplikation der reellen Zahlen ausgenutzt haben. Analog zeigt man, dass gilt $\mu(\lambda \mathbf{A}) = (\mu \lambda) \mathbf{A}$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} (\lambda + \mu) a_{1,1} & \cdots & (\lambda + \mu) a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda + \mu) a_{m,1} & \cdots & (\lambda + \mu) a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} + \mu a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} + \mu a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} + \mu a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} + \mu a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a_{1,1} & \cdots & \mu a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m,1} & \cdots & \mu a_{m,n} \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A},\end{aligned}$$

wobei wir das Distributivgesetz der reellen Zahlen genutzt haben. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \lambda \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(a_{1,1} + b_{1,1}) & \cdots & \lambda(a_{1,n} + b_{1,n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{m,1} + b_{m,1}) & \cdots & \lambda(a_{m,n} + b_{m,n}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} + \lambda b_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} + \lambda b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} + \lambda b_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} + \lambda b_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda b_{1,1} & \cdots & \lambda b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{m,1} & \cdots & \lambda b_{m,n} \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B},\end{aligned}$$

wobei wir das Distributivgesetz der reellen Zahlen genutzt haben.

Damit haben wir alle Rechenregeln bewiesen. \square

Nun führen wir die Matrizenmultiplikation ein.

Definition 11.11. (Multiplikation von Matrizen)

Seien $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} = [b_{k,\ell}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann definieren wir

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [c_{i,\ell}] \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

durch

$$c_{i,\ell} := \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,\ell} = a_{i,1} b_{1,\ell} + a_{i,2} b_{2,\ell} + \dots + a_{i,n} b_{n,\ell}.$$

Der Eintrag $c_{i,\ell}$ in der i -ten Zeile und der ℓ -ten Spalte von $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist also das **Skalarprodukt** der i -ten Zeilenvektors von A ,

$$[a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \dots \quad a_{i,n}],$$

mit dem ℓ -ten Spaltenvektor von B ,

$$\begin{bmatrix} b_{1,\ell} \\ b_{2,\ell} \\ \vdots \\ b_{n,\ell} \end{bmatrix}.$$

Ausgeschrieben finden wir:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,p} \end{bmatrix}.$$

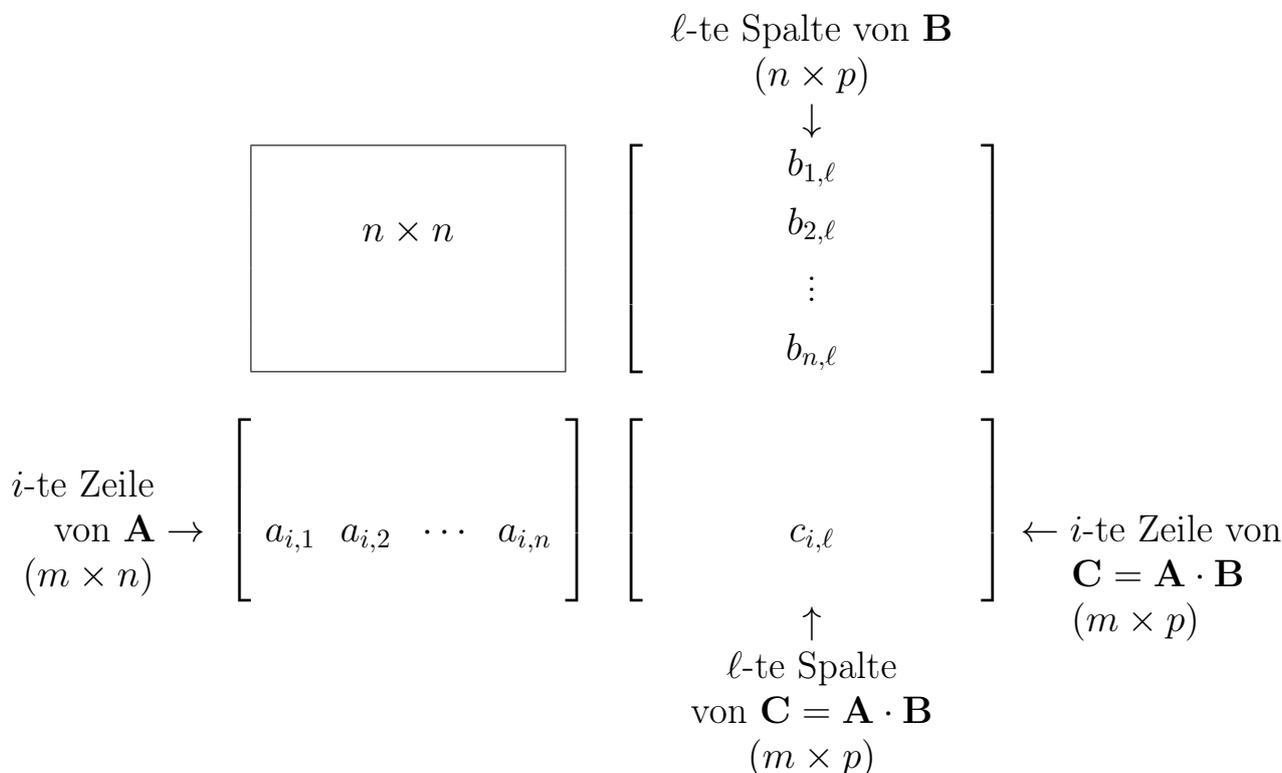
Achtung: Nur wenn gilt

Anzahl der Spalten von \mathbf{A} = Anzahl der Zeilen von \mathbf{B}

kann das Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ gebildet werden!

Bemerkung 11.12. (Berechnung der Matrizenprodukts)

Die Berechnung von $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ merkt man sich als Schema „**Skalarprodukte von Zeilenvektoren von \mathbf{A} und Spaltenvektoren von \mathbf{B}** “, wie in dem folgenden Diagramm illustriert:



So findet man die Formel

$$c_{i,\ell} = a_{i,1} b_{1,\ell} + a_{i,2} b_{2,\ell} + \dots + a_{i,n} b_{n,\ell},$$

die wir aus der Definition 11.11 des Matrizenprodukts kennen.

Beispiel 11.13. (Multiplikation von Matrizen)

(a) Seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Dann sind $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$. Wir können das Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bilden und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ist dagegen nicht definiert. Wir finden

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

(b) Betrachten wir die zwei Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$. Also können wir sowohl $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ als auch $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ berechnen. Die Matrix $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 22 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ist in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 & (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 0 & 4 & 10 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Für die quadratischen 2×2 -Matrizen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

können wir sowohl $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$ als auch $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$ berechnen. Wir finden

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir sehen also, dass $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \neq \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$ gilt.

Bemerkung 11.14. (zur Multiplikation von Matrizen)

- (1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist nur dann definiert, wenn die Spaltenanzahl von \mathbf{A} mit der Zeilenanzahl von \mathbf{B} übereinstimmt.
- (2) Selbst wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ beide definiert sind, gilt im Allgemeinen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, d.h. die Multiplikation von Matrizen ist **nicht kommutativ!**

Im nächsten Satz lernen wir die Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen.

Satz 11.15. (Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen)

(1) *Assoziativgesetz:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} && \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times \ell}. \\ \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}) && \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und} \\ &&& \text{alle } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}. \end{aligned}$$

(2) *Distributivgesetz:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} && \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}. \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} && \text{für alle } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}. \end{aligned}$$

Beweis von Satz 11.15:

(1) Wir berechnen zunächst die Einträge der Matrizen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,s}] = \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,s} \right], \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{r,k}] = \left[\sum_{s=1}^p b_{r,s} c_{s,k} \right].$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= [(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}))_{i,k}] = \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{r,k} \right] \\
 &= \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} \sum_{s=1}^p b_{r,s} c_{s,k} \right] = \left[\sum_{s=1}^p \left(\sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,s} \right) c_{s,k} \right] \\
 &= \left[\sum_{s=1}^p (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,s} c_{s,k} \right] = [((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C})_{i,k}] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= [\lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,s}] = \left[\lambda \sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,s} \right] \\
 &= \underbrace{\left[\sum_{r=1}^n (\lambda a_{i,r}) b_{r,s} \right]}_{=(\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}} = \underbrace{\left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} (\lambda b_{r,s}) \right]}_{=\mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B})}.
 \end{aligned}$$

(2) Seien $\mathbf{A} = [a_{i,r}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} = [b_{r,k}]$, $\mathbf{C} = [c_{r,k}] \in \mathbb{K}^{n \times p}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= [(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{i,k}] = \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{r,k} \right] \\
 &= \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} (b_{r,k} + c_{r,k}) \right] = \left[\sum_{r=1}^n (a_{i,r} b_{r,k} + a_{i,r} c_{r,k}) \right] \\
 &= \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,k} + \sum_{r=1}^n a_{i,r} c_{r,k} \right] \\
 &= \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,k} \right] + \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} c_{r,k} \right] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.
 \end{aligned}$$

Seien $\mathbf{A} = [a_{i,r}]$, $\mathbf{B} = [b_{i,r}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $\mathbf{C} = [c_{r,k}] \in \mathbb{K}^{n \times p}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= [((\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C})_{i,k}] = \left[\sum_{r=1}^n (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{i,r} c_{r,k} \right] \\
 &= \left[\sum_{r=1}^n (a_{i,r} + b_{i,r}) c_{r,k} \right] = \left[\sum_{r=1}^n (a_{i,r} c_{r,k} + b_{i,r} c_{r,k}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} c_{r,k} + \sum_{r=1}^n b_{i,r} c_{r,k} \right] \\
&= \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} c_{r,k} \right] + \left[\sum_{r=1}^n b_{i,r} c_{r,k} \right] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in beiden Rechnungen die Distributivgesetze für die reellen bzw. die komplexen Zahlen genutzt. \square

Als letztes lernen wir die transponierte Matrix kennen.

Definition 11.16. (transponierte Matrix)

Schreibt man die Einträge der Spalten der Matrix $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in die Zeilen einer neuen Matrix \mathbf{B} , so hat diese n Zeilen und m Spalten. Diese Matrix heißt **Transponierte** (oder **transponierte Matrix**) von \mathbf{A} und wird mit \mathbf{A}^T bezeichnet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Als Sonderfall erhalten wir aus einem **Spaltenvektor** \vec{x} (also einer Matrix in $\mathbb{R}^{m \times 1}$) einen **Zeilenvektor** \vec{x}^T (also eine Matrix in $\mathbb{R}^{1 \times m}$):

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \implies \vec{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]$$

Notation: Wir bezeichnen mit \vec{x} immer nur Spaltenvektoren; wollen wir einen Zeilenvektor darstellen, so schreiben wir \vec{x}^T .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 11.17. (transponierte Matrix)

$$\text{(a)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$$(b) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$(c) \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}^T = [1 \ 2 \ 3],$$

$$\vec{\mathbf{y}}^T = [1 \ -1 \ 0] \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zum Schluss halten wir die Rechenregeln für die transponierte Matrix fest.

Hilfssatz 11.18. (Rechenregeln für die transponierte Matrix)

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

$$(1) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(2) \quad (\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$$

$$(3) \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

Beweis von Hilfssatz 11.18: Der Beweis von Hilfssatz 11.18 (1) und (2) sind Übungsaufgaben. Hilfssatz 11.18 (3) zeigt man wie folgt: Als Vorbereitung halten wir fest, dass gilt

$$\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{C} = [c_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad \Longrightarrow \\ \mathbf{A}^T = [(\mathbf{A}^T)_{i,k}] = [a_{k,i}] \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{C}^T = [(\mathbf{C}^T)_{i,k}] = [c_{k,i}] \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Zunächst berechnen wir $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, also

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{i,k}] = \left[\sum_{r=1}^n a_{i,r} c_{r,k} \right].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^T &= [((\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^T)_{i,k}] = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{k,i}] = \left[\sum_{r=1}^n a_{k,r} c_{r,i} \right] = \left[\sum_{r=1}^n c_{r,i} a_{k,r} \right] \\ &= \left[\sum_{r=1}^n (\mathbf{C}^T)_{i,r} (\mathbf{A}^T)_{r,k} \right] = [(\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}^T)_{i,k}] = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}^T, \end{aligned}$$

und wir haben (3) bewiesen. □

11.2 Lineare Gleichungssysteme: Notation

Wir betrachten das **lineare Gleichungssystem (LGS)**

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n &= b_1 \\
 a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

mit m **Gleichungen** und n **Unbekannten** x_1, x_2, \dots, x_n . Vorgegeben sind dabei die Koeffizienten $a_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$, und b_i , $i = 1, 2, \dots, m$, in \mathbb{R} . Gesucht werden $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, welche die m Gleichungen erfüllen.

In Summenschreibweise lautet das lineare Gleichungssystem (11.2)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_{1,k} x_k &= b_1 \\
 \sum_{k=1}^n a_{2,k} x_k &= b_2 \\
 &\vdots \\
 \sum_{k=1}^n a_{m,k} x_k &= b_m
 \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Wir wollen nun unser lineares Gleichungssystem (11.2) in **Matrixschreibweise** notieren: Dazu schreiben wir für (11.2) zunächst in Vektorform:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Fassen wir die Koeffizienten $a_{i,k}$ zu der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

und die x_k bzw. b_i jeweils zu einem Spaltenvektor (also einer Matrix mit nur einer Spalte)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{bzw.} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

zusammen, so lässt sich das lineare Gleichungssystem (11.2) schreiben als

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oder kurz

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}.$$

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt die **Koeffizientenmatrix** und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ die **rechte Seite** des LGS. Die Matrix

$$[\mathbf{A} | \vec{b}] := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** des LGS $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$.

Betrachten wir hierzu ein Zahlenbeispiel.

Beispiel 11.19. (LGS in Matrixschreibweise)

Wir schreiben das lineare Gleichungssystem zunächst in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - 13x_3 + x_4 = -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -13 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

und dann mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

11.3 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Seien stets $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Wir bezeichnen die **Lösungsmenge** des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ (mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]$) mit $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]}$, also

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]} := \{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \}.$$

Wir werden in den späteren Kapiteln der Vorlesung sehen, dass für $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]}$ immer **genau einer der folgenden drei Fälle** eintritt:

- (1) $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]} = \emptyset$, d.h. das LGS $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist nicht lösbar.
- (2) $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]}$ enthält genau einen Vektor; d.h. das LGS $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist eindeutig lösbar.
- (3) $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]}$ enthält unendlich viele Lösungen.

In diesem Abschnitt geht es darum, wie man $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]}$ konkret berechnen kann.

Hilfssatz 11.20. (elementare Zeilenoperationen)

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ändert sich nicht unter den folgenden **elementaren Zeilenoperationen**:

- (E1) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (E2) Ersetzen einer Zeile durch die Summe aus dieser Zeile und dem μ -fachen einer anderen Zeile ($\mu \in \mathbb{R}$).
- (E3) Vertauschen zweier Zeilen.

Das **Gaußsche Eliminationsverfahren** besteht aus der systematischen Anwendung dieser elementaren Zeilenoperationen auf $[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}]$. Das Ziel ist, das lineare Gleichungssystem so zu vereinfachen, dass man die Lösungsmenge leicht ablesen kann. Dies soll jetzt zunächst an zwei Beispielen demonstriert werden.

Notation 11.21. (elementare Zeilenumformungen)

Dabei bezeichnen wir die Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix als Z_1, Z_2, \dots, Z_m (also Z_i ist die i -te Zeile) und **notieren die durchgeführten elementaren Zeilenoperationen** wie folgt:

- (E1) $Z_i \rightarrow \lambda Z_i$ (wobei $\lambda \neq 0$) bedeutet, dass die i -te Zeile mit λ multipliziert wird.
- (E2) $Z_i \rightarrow Z_i + \mu Z_j$ bedeutet, dass zu der i -ten Zeile das μ -fache der j -ten Zeile addiert wird.
- (E3) $Z_i \leftrightarrow Z_j$ (wobei $i \neq j$) bedeutet, dass die i -te und j -te Zeile getauscht werden.

Beispiel 11.22. (Gaußsches Eliminationsverfahren für LGS)

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 13x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 14x_3 - 2x_4 &= \alpha \end{aligned}$$

lösbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge.

Wir schreiben das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$[\mathbf{A} | \vec{\mathbf{b}}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 14 & -2 & \alpha \end{array} \right]$$

und nutzen dann die elementaren Zeilenumformungen (E1), (E2) und (E3) systematisch, um das lineare Gleichungssystem zu lösen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 14 & -2 & \alpha \end{array} \right] \begin{array}{c} \xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_4 \rightarrow Z_4 - 2Z_1} \\ \downarrow \\ \iff \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 20 & -4 & \alpha - 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{ccc}
Z_2 \rightarrow (-1) \cdot Z_2 & \begin{array}{c} \downarrow \\ \iff \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & | & 2 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 20 & -4 & | & \alpha - 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 + 3Z_2 \\ \downarrow \\ \iff \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & \alpha + 4 \end{bmatrix} \\
Z_4 \rightarrow Z_4 + Z_3 & \begin{array}{c} \downarrow \\ \iff \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \alpha - 1 \end{bmatrix} & & & (11.3)
\end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist nun in **Stufenform**. (Bei der Stufenform ist die erste Zahl ungleich null in jeder Zeile eine 1 und diese tritt immer weiter rechts als in der vorherigen Zeile auf.) Damit sieht das lineare Gleichungssystem so aus:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\
x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= 2 \\
x_3 - 5x_4 &= -5 \\
0 &= \alpha - 1
\end{aligned}$$

Falls $\alpha \neq 1$, ist $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \emptyset$, denn die letzte Gleichung ist dann nicht erfüllbar.

Falls $\alpha = 1$ ist, so ist die letzte Gleichung immer wahr und das LGS reduziert sich auf drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 & \text{(I)} \\
x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= 2 & \text{(II)} \\
x_3 - 5x_4 &= -5 & \text{(III)}
\end{aligned}$$

Wir setzen $x_4 := \lambda \in \mathbb{R}$ und bestimmen die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]}$ durch „Rückwärtsrechnen“:

$$\begin{aligned}
\text{(III) : } & x_3 = -5 + 5x_4 = -5 + 5\lambda \\
\text{in (II) : } & x_2 = 2 + 7x_3 - 3x_4 = 2 + 7(-5 + 5\lambda) - 3\lambda = -33 + 32\lambda \\
\text{in (I) : } & x_1 = 1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \\
& = 1 - (-33 + 32\lambda) + 3(-5 + 5\lambda) - \lambda = 19 - 18\lambda
\end{aligned}$$

Also finden wir die folgende Lösungsmenge für $\alpha = 1$:

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \left\{ \begin{bmatrix} 19 - 18\lambda \\ -33 + 32\lambda \\ -5 + 5\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 19 \\ -33 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -18 \\ 32 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Lösungsmenge ist eine Gerade in \mathbb{R}^4 .

Beginnend mit (11.3) führen nun noch die Reduktion auf die reduzierte Stufenform durch:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} Z_2 \rightarrow Z_2 + 7Z_3 \\ Z_1 \rightarrow Z_1 + 3Z_3 \\ \Downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -32 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2 \\ \Downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -32 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{LGS ist nur lösbar, wenn } \alpha = 1. \\ \text{Dann gilt:} \\ x_1 = 19 - 18x_4 \\ x_2 = -33 + 32x_4 \\ x_3 = -5 + 5x_4 \\ x_4 = \lambda \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{array} \right.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix in der zweiten Zeile ist dabei in **reduzierter Stufenform**. (Bei der reduzierten Stufenform handelt es sich um eine Stufenform, bei der sich über der ersten Zahl ungleich null (also der 1) in einer Zeile nur Nullen befinden.) – Natürlich erhalten wir dieselbe Lösungsmenge wie mit „Rückwärtsrechnen“.

Beispiel 11.23. (Gaußsches Eliminationsverfahren für LGS)

(a) Das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 & = & 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = & -2 \end{array} \right]$$

hat die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Wir bringen diese nun mit elementaren Zeilenoperationen in Stufenform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} Z_3 \rightarrow Z_3 + 2 \cdot Z_2 \\ \Downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{ccc}
 Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1 & & Z_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot Z_2 \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \Leftrightarrow & & \Leftrightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]
 \quad
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Als lineares Gleichungssystem haben wir nun:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & \text{(I)} \\
 x_2 + x_3 = 1 & \text{(II)} \\
 x_3 = 2 & \text{(III)}
 \end{array}$$

Mit „Rückwärtsrechnen“ finden wir also:

$$\text{Aus (III) :} \quad x_3 = 2$$

$$\text{In (II) einsetzen:} \quad x_2 = 1 - x_3 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{In (I) einsetzen:} \quad x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -3$$

Also ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\mathbb{L}_{[A|\vec{b}]} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = & 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = & -2 \end{array} \right]$$

hat die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right].$$

Wir bringen diese nun mit elementaren Zeilenoperationen in Stufenform:

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] & \begin{array}{c} Z_3 \rightarrow Z_3 + 2 \cdot Z_2 \\ \Downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1 & & Z_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot Z_2 \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \Leftrightarrow & & \Leftrightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \quad
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Die letzte Zeile besteht nur aus Nullen und kann daher ignoriert werden. Wir erhalten aus der Stufenform also die beiden Gleichungen

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad (\text{I})$$

$$x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{2}{3} \quad (\text{II})$$

Wir setzen $x_3 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann erhalten wir mit „Rückwärtsrechnen“:

$$\text{Aus (II): } x_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x_3 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\lambda$$

$$\text{Aus (I): } x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - 2\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\lambda\right) - 3\lambda = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda$$

Also ist die Lösungsmenge des LGS

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{bmatrix}$$

hat die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right].$$

Mit einer elementaren Zeilenoperation finden wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{Z_3 \rightarrow Z_3 + 2Z_2 \\ \downarrow \\ \iff}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Die letzte Zeile ist

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2 \quad \iff \quad 0 = 2.$$

Da diese Gleichung nicht erfüllbar ist (egal wie wir x_1, x_2 und x_3 wählen), hat das LGS keine Lösung, d.h. es gilt $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \emptyset$.

(d) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right].$$

Wir bringen das LGS mit elementaren Zeilenoperationen in reduzierte Stufenform:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[Z_2 \rightarrow Z_2 - 2Z_1]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[Z_2 \rightarrow -\frac{1}{3}Z_2]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_2]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -\frac{2}{3} \end{array} \right] \xrightarrow[Z_3 \rightarrow \frac{1}{4}Z_3]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \xrightarrow[Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_3]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \end{aligned}$$

An der reduzierten Stufenform lesen wir mit $x_4 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}, \\ x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda, \\ x_3 &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge des LGS

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir halten die Vorgehensweise aus den Beispielen allgemein fest:

Methode 11.24. (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ mit der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der rechten Seite $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$.

- (1) Durch elementare Zeilenoperationen lässt sich jede erweiterte Koeffizientenmatrix $[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]$ in die sogenannte **Stufenform** bringen

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \cdots & 1 & * & \cdots & * & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & d_m \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r \\ m \end{array} \right\}$$

n

oder sogar in die sogenannte **reduzierte Stufenform**

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \cdots & 1 & * & \cdots & * & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & d_m \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r \\ m \end{array} \right\}$$

n

- Bei der Stufenform und der reduzierten Stufenform sind die Zeilen, in denen alle Koeffizienten null sind, in den unteren Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix angeordnet.

- Bei der **Stufenform** ist jede Zeile der erweiterten Matrix von der Form

$$[0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ * \ \cdots \ * \ | \ *],$$

wobei die *-Symbole für beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen stehen können. Dabei gilt die folgende Regel für die Anordnung der Zeilen: Wandert man durch die Zeilen der Matrix von oben nach unten, so muss die Eins in einer Zeile immer weiter rechts als in der vorhergehenden Zeile auftreten.

- Bei der **reduzierten Stufenform** handelt es sich um eine Matrix in Stufenform mit zusätzlichen Eigenschaften: Über jeder Eins, die in einer Zeile (von links nach rechts) der erste Eintrag ungleich null ist, sind alle Einträge null. (D.h. in der Spalte dieser Eins sind alle Einträge außer der Eins null.)

(2) Es gilt immer $r \leq \min\{m, n\}$.

(3) **Lösbarkeit:**

Fall 1: $r = m$ oder ($r < m$ und $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$)

\implies LGS ist lösbar, d.h. $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} \neq \emptyset$.

Falls $r = n$: LGS hat genau eine Lösung.

Falls $r < n$: LGS hat unendlich viele Lösungen

Anzahl der Parameter: $n - r$

Fall 2: $r < m$ und $d_i \neq 0$ für mindestens ein $i > r$

\implies LGS ist unlösbar, d.h. $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \emptyset$.

(4) In Fall 1 erhält man die Lösungsmenge aus der Stufenform durch **Rückwärtsrechnen**. An der reduzierten Stufenform lässt sich die Lösungsmenge sogar fast direkt ablesen.

Betrachten wir noch ein abschließendes Beispiel.

Beispiel 11.25. (Gaußsches Eliminationsverfahren für LGS)

Wir betrachten das LGS $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & -1 & -2 & \alpha \end{array} \right].$$

Mit elementaren Zeilenumformungen finden wir:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & -1 & -2 & \alpha \end{array} \right] & \begin{array}{c} Z_1 \leftrightarrow Z_2 \\ \downarrow \\ \rightleftharpoons \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & -1 & -2 & \alpha \end{array} \right] \\ \\ & \begin{array}{c} Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_1 \\ Z_5 \rightarrow Z_5 - 3Z_1 \\ \downarrow \\ \rightleftharpoons \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -1 & 1 & \alpha - 3 \end{array} \right] \\ \\ & \begin{array}{c} Z_2 \leftrightarrow Z_3 \\ \downarrow \\ \rightleftharpoons \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -1 & 1 & \alpha - 3 \end{array} \right] \\ \\ & \begin{array}{c} Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - Z_2 \\ Z_5 \rightarrow Z_5 - 2Z_2 \\ \downarrow \\ \rightleftharpoons \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & \alpha - 3 \end{array} \right] \\ \\ & \begin{array}{c} Z_4 \rightarrow Z_4 + Z_3 \\ Z_5 \rightarrow Z_5 + Z_3 \\ \downarrow \\ \rightleftharpoons \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 4 \end{array} \right] \end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist nun in **reduzierter Stufenform**. Falls

$\alpha \neq 4$, so ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \emptyset$, denn die letzte Gleichung ist nicht erfüllbar.

Falls $\alpha = 4$ ist, so reduziert sich das lineare Gleichungssystem auf die ersten drei Gleichungen:

$$x_1 + x_3 + 3x_4 - x_6 = 1 \quad (\text{I})$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_6 = 0 \quad (\text{II})$$

$$x_5 + 3x_6 = -1 \quad (\text{III})$$

Setze $x_6 := \lambda_1$, $x_4 := \lambda_2$ und $x_3 := \lambda_3$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (I) bis (III) und Auflösen nach x_1, x_2 und x_5 liefert

$$\text{aus (III) : } x_5 = -1 - 3x_6 = -1 - 3\lambda_1$$

$$\text{aus (II) : } x_2 = -2x_6 + x_4 - 2x_3 = -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3$$

$$\text{aus (I) : } x_1 = 1 + x_6 - 3x_4 - x_3 = 1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3$$

Also finden wir für $\alpha = 4$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ -1 - 3\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

11.4 Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme

Im letzten Teil dieses Kapitels lernen wir erste Resultate zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme kennen.

Definition 11.26. (homogenes bzw. inhomogenes LGS)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$.

- (1) Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ heißt **homogen**, falls $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$ ist. Sonst heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**.
- (2) Ist $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, so heißt $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ das **zugehörige homogene LGS**.

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 11.27. (homogenes und inhomogenes LGS)

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_3 = 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ist inhomogen. Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_3 = 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In den nächsten beiden Sätzen, die wir auch beweisen werden, lernen wir mehr Informationen über die Lösungen von homogenen bzw. inhomogenen Gleichungssystemen.

Satz 11.28. (Lösung des homogenen LGS)

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten das **homogene** lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}. \quad (H)$$

- (1) Das LGS (H) hat immer (mindestens) die **triviale Lösung** $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, d.h. $\vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{0}}]}$.
- (2) Sind $\vec{\mathbf{y}}$ und $\vec{\mathbf{z}}$ beide Lösungen von (H), so ist auch $\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}$ eine Lösung von (H).
(Kurz: $\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{0}}]} \implies \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{0}}]}$)

(3) Ist \vec{y} eine Lösung von (H) und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda \vec{y}$ eine Lösung von (H).
 (Kurz: $\vec{y} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]}, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda \vec{y} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]}$)

Beweis von Satz 11.28:

$$(1) \mathbf{A} \vec{0} = \vec{0} \implies \vec{0} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]}$$

$$(2) \text{ Seien } \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]} \implies \mathbf{A} \vec{y} = \vec{0} \text{ und } \mathbf{A} \vec{z} = \vec{0}$$

Nach dem Distributivgesetz für die Matrizenmultiplikation gilt:

$$\mathbf{A} (\vec{y} + \vec{z}) = \mathbf{A} \vec{y} + \mathbf{A} \vec{z} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies \vec{y} + \vec{z} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]}$$

$$(3) \text{ Sei } \vec{y} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]} \implies \mathbf{A} \vec{y} = \vec{0} \implies \mathbf{A} (\lambda \vec{y}) = \lambda \mathbf{A} \vec{y} = \lambda \vec{0} = \vec{0} \\ \implies \lambda \vec{y} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]} \quad \square$$

Satz 11.29. (Lösung des inhomogenen LGS)

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Gegeben sei das *inhomogene lineare Gleichungssystem*

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}, \quad (IH)$$

und das *zugehörige homogene lineare Gleichungssystem* ist

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}. \quad (H)$$

(1) Sind \vec{y} und \vec{z} beide Lösungen von (IH), so ist $\vec{y} - \vec{z}$ eine Lösung von (H).

$$(Kurz: \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{b}]} \implies \vec{y} - \vec{z} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]})$$

(2) Kennt man die komplette Lösungsmenge $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]}$ von (H) und irgendeine Lösung \vec{x}_s von (IH), so kennt man die komplette Lösungsmenge $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{b}]}$ von (IH):

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{b}]} = \left\{ \vec{x}_s + \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]} \right\}.$$

Beweis von Satz 11.29:

$$(1) \text{ Seien } \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{b}]} \implies \mathbf{A} \vec{y} = \vec{b} \text{ und } \mathbf{A} \vec{z} = \vec{b} \implies$$

$$\mathbf{A} (\vec{y} - \vec{z}) = \mathbf{A} \vec{y} - \mathbf{A} \vec{z} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \implies \vec{y} - \vec{z} \in \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]}$$

(2) Hier müssen wir die folgenden zwei Teilmengenbeziehungen zeigen

$$\left\{ \vec{x}_s + \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]} \right\} \subseteq \mathbb{L}_{[A|\vec{b}]} \quad \text{und} \quad \mathbb{L}_{[A|\vec{b}]} \subseteq \left\{ \vec{x}_s + \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]} \right\},$$

denn aus diesen folgt $\mathbb{L}_{[A|\vec{b}]} = \left\{ \vec{x}_s + \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]} \right\}$.

- Sei $\vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]}$. $\implies \mathbf{A}(\vec{x}_s + \vec{y}) = \mathbf{A}\vec{x}_s + \mathbf{A}\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$
 $\implies \vec{x}_s + \vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{b}]}$

Damit ist $\left\{ \vec{x}_s + \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]} \right\} \subseteq \mathbb{L}_{[A|\vec{b}]}$ gezeigt.

- Sei $\vec{x} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{b}]}$. $\xrightarrow{\text{nach (1)}} \vec{y} := \vec{x} - \vec{x}_s \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]}$
 $\implies \vec{x} = \vec{x}_s + \vec{y}$ mit $\vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]}$

Damit ist $\mathbb{L}_{[A|\vec{b}]} \subseteq \left\{ \vec{x}_s + \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{L}_{[A|\vec{0}]} \right\}$ gezeigt. \square

Als Letztes betrachten wir ein Beispiel für die Anwendung von Satz 11.29.

Beispiel 11.30. (Anwendung von Satz 11.29)

Gesucht sind alle reellen Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} x_1 & + 2x_3 = -1 \\ x_2 & + x_3 = 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Durch Inspizieren des linearen Gleichungssystems sieht man, dass

$$\vec{x}_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eine Lösung ist. (In der Tat: $(-1) + 2 \cdot 0 = -1$ und $2 + 0 = 2$.)

Um alle Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems zu finden, lösen wir nun das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem und nutzen dann Satz (2). Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem befindet sich bereits in reduzierter Stufenform, und wir lesen ab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{bmatrix}$$

Mit $x_3 = \lambda$ finden wir also

$$\mathbb{L}_{[A|\vec{0}]} = \left\{ \begin{bmatrix} -2\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach Satz (2) ist die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}]} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

KAPITEL 12

Vektoren: Weiterführende Resultate

In Teilkapitel 12.1 lernen wir Untervektorräume (oder lineare Teilräume) des Vektorraums \mathbb{R}^n kennen. In Teilkapitel 12.2 führen wir die Begriffe der Linearkombination und der linearen Hülle ein. In Teilkapitel 12.3 nutzen wir den Begriff der Linearkombination um Vektoren auf lineare Unabhängigkeit bzw. lineare Abhängigkeit zu untersuchen. In Teilkapitel 12.4 führen wir schließlich den Begriff der Dimension von \mathbb{R}^n und von Untervektorräumen von \mathbb{R}^n ein.

In Teilkapitel 12.5 betrachten wir schließlich Systeme von paarweise orthogonalen Vektoren und deren Eigenschaften. Besonders wichtig für die Praxis sind Orthonormalbasen, also Basen mit paarweise orthonormalen Vektoren.

12.1 Untervektorräume

Wir führen zunächst den wichtigen Begriff eines Untervektorraums oder linearen Teilraums von \mathbb{R}^n ein. Bei einem Untervektorraum eines Vektorraums handelt es sich anschaulich um eine Teilmenge von \mathbb{R}^n , die den Nullvektor enthält und die Vektoraddition und die skalare Multiplikation „erbt“, wobei das Ergebnis dieser Operationen immer wieder in der Teilmenge liegt. Diese Eigenschaften liegen natürlich nur für spezielle Teilmengen von \mathbb{R}^n vor.

Definition 12.1. (Untervektorraum oder linearer Teilraum von \mathbb{R}^n)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls

- (i) $\vec{0} \in U$ (und damit $U \neq \emptyset$),
(ii) $\vec{x}, \vec{y} \in U \implies \vec{x} + \vec{y} \in U$, und
(iii) $\vec{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda \vec{x} \in U$

alle gelten, dann heißt U ein **Untervektorraum (UVR) von \mathbb{R}^n** (oder ein **linearer Teilraum von \mathbb{R}^n**).

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 12.2. (Untervektorräume)

(a) Die Teilmenge

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 , denn:

(i) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$, da $2 \cdot 0 + 0 = 0$

(ii) Seien $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in U$. Dann müssen wir zeigen, dass auch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

in U liegt. Wir überprüfen die Bedingung an Elemente in U :

$$2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{=0} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{=0} = 0,$$

wobei die Terme in den Klammern jeweils null sind, weil $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ und

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ in U sind. Also folgt $\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in U$.

(iii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in U$. Wir müssen zeigen, dass auch

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

in U liegt. Wir überprüfen die Bedingung an Elemente in U :

$$2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

wobei der Term in den Klammern null ist, weil $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in U$ ist. Also

$$\text{folgt } \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \in U.$$

Die Teilmenge U ist geometrisch eine Gerade in der Ebene durch den Nullpunkt mit Steigung -2 , denn $2x_1 + x_2 = 0$ lässt sich als $x_2 = -2x_1$ umschreiben.

(b) Die Teilmenge

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 3 \right\}$$

ist **kein** Untervektorraum von \mathbb{R}^2 , denn $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin U$, da $2 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 3$.

Die Teilmenge V ist geometrisch eine Gerade in der Ebene mit Steigung -2 und x_2 -Achsenabschnitt 3 , denn $2x_1 + x_2 = 3$ lässt sich als $x_2 = -2x_1 + 3$ umschreiben. Diese Gerade geht nicht durch den Nullpunkt.

Der nächste Satz zeigt, dass Untervektorräume für das Verständnis der Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme wichtig sind.

Satz 12.3. (Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein UVR)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\mathbf{0}]} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \vec{x} = \vec{\mathbf{0}} \}$$

des **homogenen** linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{\mathbf{0}}$ ist ein **Untervektorraum** von \mathbb{R}^n .

Beweis: Dieses folgt aus Satz 11.28 und Satz 12.1: Die Aussagen (1) bis (3) in Satz 11.28 garantieren, dass $\mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\mathbf{0}]}$ die Eigenschaften (i) bis (iii) in Satz 12.1 erfüllt und somit ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist. \square

Betrachten wir noch einige weitere Beispiele für Untervektorräume.

Beispiel 12.4. (Untervektorräume)

(a) \mathbb{R}^n selber ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

Nachweis: Wir überprüfen die Eigenschaften eines Untervektorraums.

(i) Es gilt $\vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n$.

- (ii) Nach Definition der Vektoraddition gilt $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Nach Definition der skalaren Multiplikation gilt $\lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da alle drei Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt sind, ist \mathbb{R}^n ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

- (b) $\{\vec{0}\}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

Nachweis: Wir überprüfen die Eigenschaften eines Untervektorraums.

- (i) Es gilt $\vec{0} \in \{\vec{0}\}$.
- (ii) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \{\vec{0}\}$. Dann folgt, dass $\vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{y} = \vec{0}$ ist. Also gilt $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ d.h. $\vec{x} + \vec{y} \in \{\vec{0}\}$.
- (iii) Seien $\vec{x} \in \{\vec{0}\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt, dass $\vec{x} = \vec{0}$. Also gilt $\lambda \vec{x} = \lambda \vec{0} = \vec{0}$ d.h. $\lambda \vec{x} \in \{\vec{0}\}$.

Da alle drei Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt sind, ist $\{\vec{0}\}$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

- (c) Die Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$U := \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Es handelt sich dabei um die Ebene in \mathbb{R}^3 , die in der (x_1, x_2) -Koordinatenebene liegt (und die somit durch den Nullpunkt $(0, 0, 0)$ geht).

Nachweis: Wir können U als

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\}$$

schreiben. Nun überprüfen wir die Eigenschaften eines Untervektorraums.

- (i) Der Nullvektor $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ erfüllt offensichtlich, dass die dritte Komponente 0 ist. Also gilt $\vec{0} \in U$.
- (ii) Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ in U . Dann gelten $x_3 = 0$ und $y_3 = 0$.

Also folgt für

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

und $x_3 + y_3 = 0 + 0 = 0$, d.h. $\vec{x} + \vec{y} \in U$.

(iii) Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ in U und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_3 = 0$. Also folgt für

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}$$

und $\lambda x_3 = \lambda \cdot 0 = 0$, d.h. $\lambda \vec{x} \in U$.

Da alle drei Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt sind, ist U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 .

(d) Die Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$V := \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Es handelt sich dabei um eine Ebene in \mathbb{R}^3 , die durch den Nullpunkt $(0, 0, 0)$ geht.

Nachweis: Wir überprüfen die Eigenschaften eines Untervektorraums.

(i) Der Nullvektor $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ erfüllt offensichtlich $0 + 0 + 0 = 0$,

also dass die Summe der Komponenten 0 ist. Also gilt $\vec{0} \in V$.

(ii) Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ in V .

Dann gelten $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Also folgt für

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned}(x_1 + y_2) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) &= \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{=0} \\ &= 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

d.h. $\vec{x} + \vec{y} \in V$.

(iii) Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ in V und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Also folgt für

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix},$$

dass

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

d.h. $\lambda \vec{x} \in V$.

Da alle drei Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt sind, ist V ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 .

(e) Die Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$W := \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 4 \right\}$$

ist **kein** Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Es handelt sich dabei um eine Ebene in \mathbb{R}^3 , die nicht durch den Nullpunkt $(0, 0, 0)$ geht.

Nachweis: Der Nullvektor $\vec{0}$ ist nicht in W , denn $0 + 0 + 0 = 0 \neq 4$. Also ist Eigenschaft (i) eines Untervektorraums verletzt.

(f) Die Teilmenge Die Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$K := \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \right\}$$

ist **kein** Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Es handelt sich dabei um die Kugeloberfläche der Kugel in \mathbb{R}^3 mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius 2.

Nachweis: Der Nullvektor $\vec{0}$ ist nicht in K , denn $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \neq 4$. Also ist Eigenschaft (i) eines Untervektorraums verletzt.

12.2 Linearkombinationen

Wir lernen nun Linearkombinationen von Vektoren in \mathbb{R}^n kennen. Der Begriff der Linearkombination zusammen mit dem Begriff der linearen Unabhängigkeit (siehe Teilkapitel 12.3) sind ganz zentral für die lineare Algebra.

Definition 12.5. (Linearkombination)

Sei $k \in \mathbb{N}$, und seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ heißt

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j$$

eine **Linearkombination (LK)** von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Wir halten noch zwei hilfreiche Beobachtungen über Linearkombinationen fest.

Bemerkung 12.6. (Linearkombination)

(1) Ist U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n und sind $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in U$, so gilt

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k \in U \quad \text{für alle } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Dieses folgt durch wiederholte Anwendung der Eigenschaften (ii) und (iii) in Definition 12.1.

(2) $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_k$, d.h. der Nullvektor $\vec{0}$ ist immer eine Linearkombination von beliebigen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Betrachten wir nun zwei Beispiele.

Beispiel 12.7. (Linearkombination)

(a) Wir betrachten drei Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ in \mathbb{R}^2 .

Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ eine Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$?

Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

d.h. wir suchen eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist lösbar, beispielsweise durch $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$ oder durch $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. Also ist die Antwort „ja“. Wir sehen auch, dass ein Vektor unter Umständen auf mehrere Weisen als Linearkombination von vorgegebenen Vektoren dargestellt werden kann.

(b) Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ in \mathbb{R}^3 .

Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ eine Linearkombination von \vec{v}_1, \vec{v}_2 ?

Die Antwort ist „nein“, denn man sieht direkt an

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 \\ 2\lambda_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dass $0 = 7$ nicht erfüllbar ist.

Methode 12.8. (Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eine LK der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$?)

Die *Linearkombination-Bedingung*

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k \stackrel{!}{=} \vec{x} \quad (12.1)$$

ist äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_k \end{bmatrix}}_{n \times k\text{-Matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}}_{=: \vec{\lambda}} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

wobei die j -te Spalte der Matrix gerade von dem Spaltenvektor \vec{v}_j gebildet wird. Schreiben wir dieses lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix, so finden wir

$$\left[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_k \mid \vec{x} \right].$$

Wenn dieses lineare Gleichungssystem lösbar ist, so liefern alle Lösungen $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]^T$ gültige Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ für (12.1).

Der nächste Hilfssatz untersucht die Natur der Menge aller Linearkombinationen von fest vorgegebenen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Hilfssatz 12.9. (Die lineare Hülle ist ein Untervektorraum.)

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$\text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) := \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

aller Linearkombinationen von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n und wird die **lineare Hülle** von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ genannt.

(Die lineare Hülle von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ wird in manchen Büchern auch als der **Span** von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ bezeichnet.)

Beweis von Hilfssatz 12.9: Wir überprüfen die drei Eigenschaften eines Untervektorraums:

(i) $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_k \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$.

(ii) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$, also

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k, \quad \vec{y} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_k \vec{v}_k.$$

Dann gilt nach den Distributivgesetzen

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k) + (\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \dots + \mu_k \vec{v}_k) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) \vec{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \vec{v}_2 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) \vec{v}_k \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k). \end{aligned}$$

(iii) Seien $\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach den Distributivgesetzen

$$\begin{aligned} \alpha \vec{x} &= \alpha(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k) \\ &= (\alpha \lambda_1) \vec{v}_1 + (\alpha \lambda_2) \vec{v}_2 + \dots + (\alpha \lambda_k) \vec{v}_k \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k). \end{aligned}$$

Also ist $\text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . □

Nun untersuchen wir die lineare Hülle für einige Beispiele.

Beispiel 12.10. (lineare Hülle)(a) In \mathbb{R}^n gilt $\text{LH}(\vec{\mathbf{0}}) = \{\vec{\mathbf{0}}\}$.(b) In \mathbb{R}^2 gilt

$$\text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2,$$

da sich jedes $\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ schreiben lässt. Das lineare Gleichungssystem (vgl. auch Beispiel 12.7 (a))

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 2 & x_2 \end{array} \right]$$

ist nämlich für jedes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ lösbar, z.B. durch $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2 - 2x_1$, $\lambda_3 = 0$.

(c) In \mathbb{R}^3 gilt

$$\text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

da das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \end{array} \right]$$

genau dann lösbar ist, wenn $x_2 = 0$ ist.

(d) Betrachten wir \mathbb{R}^n und die sogenannten **Standardbasisvektoren**

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\mathbf{e}}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $\text{LH}(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n) = \mathbb{R}^n$, denn für jedes $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{e}}_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{x}}.$$

Mit unserem neuen Verständnis von Linearkombinationen und der linearen Hülle können wir nun auch die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems als lineare Hülle geeigneter Vektoren schreiben. betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel 12.11. (Lösungsmenge eines hom. LGS als lineare Hülle)

Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right],$$

welches bereits in reduzierter Stufenform vorliegt. Wir setzen $x_2 = \lambda_1$ und $x_4 = \lambda_2$ und lesen ab

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 2x_4 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2, \\ x_2 &= \lambda_1, \\ x_3 &= x_4 = \lambda_2, \\ x_4 &= \lambda_2, \end{aligned}$$

d.h. die Lösungsmenge ist

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{[\mathbf{A}|\vec{0}]} &= \left\{ \begin{bmatrix} -3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Der nächste Satz liefert nützliche Informationen über die lineare Hülle.

Satz 12.12. (Invarianz der linearen Hülle)

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Die lineare Hülle $\text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ ändert sich nicht bei

- (1) dem Vertauschen zweier Vektoren,
- (2) der Multiplikation eines Vektors mit einem $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (3) der Addition des μ -fachen eines Vektors zu einem anderen Vektor (wobei $\mu \in \mathbb{R}$).

Beweis von Satz 12.12: Der Beweis ist eine freiwillige Übungsaufgabe. \square

Wir können diesen Satz nutzen, um die Darstellung der linearen Hülle zu vereinfachen. Dieses ist in dem nachfolgenden Beispiel demonstriert. Dabei verwenden wir eine **analoge Notation zu den elementaren Zeilenoperationen einer Matrix**: $v_i \leftrightarrow v_j$ deutet das Vertauschen der Vektoren v_i und v_j an, und $v_i \rightarrow \lambda v_i$ (mit $\lambda \neq 0$) bzw. $v_i \rightarrow v_i + \mu v_j$ bedeuten, dass v_i mit $\lambda \neq 0$ multipliziert wird bzw. dass zu v_i das μ -fache des Vektors v_j (mit $j \neq i$) addiert wird.

Beispiel 12.13. (Invarianz der linearen Hülle)

In \mathbb{R}^2 gilt:

$$\begin{aligned}
 & \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \quad \left(\text{wegen: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \left(\text{wegen: } \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \left(\text{doppelter Vektor wird weggelassen} \right) \\
 &= \mathbb{R}^2 \quad \left(\text{wegen Beispiel 12.10 (d)} \right).
 \end{aligned}$$

12.3 Lineare Unabhängigkeit

Wir beginnen mit der Definition des Begriffes „linear unabhängig“.

Definition 12.14. (linear unabhängig bzw. linear abhängig)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt: Die Gleichung

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad (12.2)$$

hat **nur die einzige Lösung** $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Andernfalls heißen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ **linear abhängig**.

In der nachfolgenden Bemerkung halten wir einige wichtige Beobachtungen fest.

Bemerkung 12.15. (linear unabhängig bzw. linear abhängig)

- (1) Ist mindestens einer der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ der Nullvektor $\vec{0}$, so sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ **linear abhängig**.

Erklärung: Sei z.B. $\vec{v}_1 = \vec{0}$. Dann gilt

$$1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_k = \vec{0},$$

d.h. (12.2) hat eine Lösung bei der nicht alle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gleich null sind. Falls statt \vec{v}_1 einer der anderen Vektoren der Nullvektor $\vec{0}$ ist, so kann man das Argument entsprechend anpassen.

- (2) **Sonderfall $k = 1$:** Ist ein einzelner Vektor $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ **linear abhängig**, so muss dieser Vektor der Nullvektor sein, also $\vec{v}_1 = \vec{0}$.

Erklärung: $\lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$ mit einem $\lambda_1 \neq 0$ kann nur gelten, wenn $\vec{v}_1 = \vec{0}$ ist.

- (3) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann **linear abhängig**, wenn gilt: Es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$, oder es existiert $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_2 = \mu \vec{v}_1$.

Erklärung: Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so gilt

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \tag{12.3}$$

und λ_1 oder λ_2 (oder beide) sind ungleich null wählbar.

Ist $\lambda_1 \neq 0$, so folgt aus (12.3)

$$\lambda_1 \vec{v}_1 = -\lambda_2 \vec{v}_2 \quad \Big| : \lambda_1 \neq 0 \quad \iff \quad \vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2.$$

Ist $\lambda_2 \neq 0$, so folgt aus (12.3)

$$\lambda_2 \vec{v}_2 = -\lambda_1 \vec{v}_1 \quad \Big| : \lambda_2 \neq 0 \quad \iff \quad \vec{v}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{v}_1.$$

- (4) Aus Definition 12.14 folgt direkt: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann **linear abhängig**, wenn es Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich null sind und

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

erfüllen.

- (5) Lässt sich für Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen, so sind die Vektoren **linear abhängig**.

Erklärung: Ist beispielsweise der Vektor \vec{v}_k eine Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}$, so gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \vec{v}_k &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \vec{v}_{k-1} \\ \iff \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \vec{v}_{k-1} + (-1) \cdot \vec{v}_k &= \vec{0}, \end{aligned}$$

und wir sehen, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k$ linear abhängig sind.

- (6) Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ **linear unabhängig** und gilt $\vec{x} \notin \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$, so sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}$ **linear unabhängig**.

Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\vec{x} \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$, so sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}$ **linear abhängig**. (Hierbei können $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig oder linear abhängig sein.)

Beweis: Die zweite Aussage folgt direkt aus (5). – Betrachten wir nun den Fall, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind und dass gilt $\vec{x} \notin \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$. Aus

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} \vec{x} = \vec{0} \quad (12.4)$$

folgt dann $\lambda_{k+1} = 0$, denn sonst wäre (durch Auflösen nach \vec{x}) nämlich $\vec{x} \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$. Damit reduziert sich (12.4) zu

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0},$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Also gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = 0$, d.h. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}$ sind linear unabhängig. \square

- (7) Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ **linear unabhängig**, so besteht jede Teilmenge dieser Vektoren ebenfalls aus **linear unabhängigen** Vektoren. – Fügt man dagegen zu linear unabhängigen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ weitere Vektoren hinzu, so kann das neue System aus Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sein.

Erklärung: Betrachten wir beispielsweise $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ mit $m < k$. Wenn $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ linear abhängig wären, würde die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

mit Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, die nicht alle gleich null sind, gelten. Dann würde aber mit dieser Wahl der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ und mit $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_k = 0$ auch

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

gelten. Dieses steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$. Also müssen auch $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ linear unabhängig sein.

- (8) Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ **linear abhängig** und fügt man weitere Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \in \mathbb{R}^n$ hinzu, so sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m$ ebenfalls **linear abhängig**.

Erklärung: Weil $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich null sind, mit

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Mit dieser Wahl von $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nicht alle gleich null und mit $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0$ gilt dann

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k + \mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2 + \dots + \mu_m \vec{w}_m = \vec{0}.$$

Also sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m$ linear abhängig.

Betrachten wir nun zwei einfache Beispiele.

Beispiel 12.16. (linear unabhängig bzw. linear abhängig)

- (a) Seien $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Sind \vec{v}_1, \vec{v}_2 linear unabhängig?

Antwort: Wir betrachten

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem ist

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\downarrow]{Z_2 \rightarrow -Z_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

welches nun in Stufenform ist, und wir lesen ab: $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = -2\lambda_2 = 0$. Also sind \vec{v}_1, \vec{v}_2 linear unabhängig.

(b) Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig oder linear abhängig?

Antwort: Wir betrachten

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 &= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}, \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[Z_2 \rightarrow \frac{1}{2}(Z_2 + Z_1)]{\downarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Dieses hat nur zwei nicht-triviale Gleichungen aber drei Unbekannte. Daher muss es unendlich viele Lösungen haben und insbesondere gibt es Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die nicht alle gleich null sind. Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear abhängig.

Alternative Antwort: Wir beobachten, dass gilt

$$1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + (-1) \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear abhängig.

Methode 12.17. (Vorgehensweise beim Untersuchen von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ in \mathbb{R}^n auf lineare Unabhängigkeit)

Beim Untersuchen von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ auf lineare Unabhängigkeit bzw. lineare Abhängigkeit überprüfen müssen wir die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad (12.5)$$

untersuchen und alle ihre Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ bestimmen.

- Finden wir nur die einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, so sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ **linear unabhängig**.
- Gibt es dagegen mindestens eine Lösung, bei der nicht alle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gleich null sind, so sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ **linear abhängig**.

Die Gleichung (12.5) ist ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix durch

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_k \ | \ \vec{0}]$$

gegeben ist. Dabei ist die erweiterte Koeffizientenmatrix so zu lesen, dass ihre Spaltenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ sind und $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ auf der rechten Seite steht.

Wir betrachten nun noch einige weitere Beispiele.

Beispiel 12.18. (linear unabhängig bzw. linear abhängig)

(a) Die Standardbasisvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

von \mathbb{R}^n sind linear unabhängig, denn

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} &\iff [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n \ | \ \vec{0}] \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & | & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

also $\lambda_n = 0, \lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.

(b) Die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in \mathbb{R}^4 sind linear unabhängig, denn kein Vektor ist ein Vielfaches des anderen (vgl. Bemerkung 12.15 (3)).

(c) Die Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sind linear unabhängig, denn:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 &= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{0} &\iff \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

12.4 Basis und Dimension

Aufbauend auf die wichtigen Begriffe der linearen Unabhängigkeit und der Dimension lernen wir nun die Begriffe einer Basis und der Dimension von \mathbb{R}^n bzw. eines Untervektorraums von \mathbb{R}^n kennen.

Definition 12.19. (Basis)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , der nicht nur aus $\vec{0}$ besteht. Ein System $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k)$ von Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \in U$ heißt eine **Basis von U** , wenn gilt:

- (i) $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k$ sind linear unabhängig, und
- (ii) $U = \text{LH}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k)$.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 12.20. (Basis)

(a) Sei $E := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ mit

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aus Beispiel 12.18 (a) wissen wir, dass $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ linear unabhängig sind, und aus Beispiel 12.10 (d) wissen wir, dass $\text{LH}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \mathbb{R}^n$. Also ist $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ eine Basis von \mathbb{R}^n . Wir nennen $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ die **Standardbasis von \mathbb{R}^n** .

(b) Seien $U = \mathbb{R}^2$ und $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ und $\tilde{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Aus dem vorigen Beispiel wissen wir bereits, dass B eine Basis für \mathbb{R}^2 ist.

Wir zeigen nun, dass auch \tilde{B} eine Basis für \mathbb{R}^2 ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \xLeftrightarrow[Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1] \downarrow & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xLeftrightarrow[Z_2 \rightarrow \frac{1}{2}Z_2] \downarrow & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xLeftrightarrow[Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2] \downarrow & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Also folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d.h. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig.

Mit einer analogen Rechnung folgt

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \end{array} \right] &\xLeftrightarrow[Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1] \downarrow \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \end{array} \right] \\ \xLeftrightarrow[Z_2 \rightarrow \frac{1}{2}Z_2] \downarrow & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \end{array} \right] \xLeftrightarrow[Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2] \downarrow & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \end{array} \right], \end{aligned}$$

d.h. $\lambda_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Also lässt sich jeder Vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

schreiben, d.h. $\text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$. Also ist \tilde{B} ebenfalls eine Basis von \mathbb{R}^2 .

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$. $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ ist **keine** Basis für \mathbb{R}^2 , denn:

Die Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ sind linear abhängig, da gilt

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Sei $U = \mathbb{R}^3$. $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ ist **keine** Basis für \mathbb{R}^3 , denn aus Beispiel

12.10 (c)

wissen wir, dass gilt

$$\text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \neq \mathbb{R}^3.$$

(e) Nach Beispiel 12.4 (d) ist Teilmenge

$$V = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Wir suchen eine Basis für V . Dazu setzen wir wegen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \iff \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

$x_2 := \alpha, x_3 := \beta$ und $x_1 = -x_2 - x_3 = -\alpha - \beta$ und können V damit als

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

schreiben. Da keiner der beiden Vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein Vielfaches des anderen ist, sind die beiden Vektoren linear unabhängig. Also ist

$$B = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

eine Basis von V .

An Beispiel 12.20 (b) sehen wir bereits, dass ein Vektorraum mehrere Basen haben kann.

Folgerung 12.21. (eindeutige Darstellung von Vektoren bzgl. Basis)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , der nicht nur aus $\vec{0}$ besteht. Sei $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine Basis von U . Dann hat jeder Vektor $\vec{\mathbf{x}} \in U$ eine Darstellung

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k c_j \vec{\mathbf{b}}_j = c_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + c_k \vec{\mathbf{b}}_k$$

mit *eindeutig bestimmten Koeffizienten* c_1, c_2, \dots, c_k .

Beweis von Folgerung 12.21: Weil $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine Basis ist, gilt (nach der Definition einer Basis) $\text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k) = U$, d.h. jedes $\vec{\mathbf{x}} \in U$ hat eine Darstellung der Form

$$\vec{\mathbf{x}} = c_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + c_k \vec{\mathbf{b}}_k. \quad (12.6)$$

Um zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist, nehmen wir an, das

$$\vec{\mathbf{x}} = d_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + d_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + d_k \vec{\mathbf{b}}_k.$$

eine weitere Darstellung dieser Form ist. Subtrahieren der beiden Gleichungen liefert

$$\vec{0} = (d_1 - c_1) \vec{\mathbf{b}}_1 + (d_2 - c_2) \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + (d_k - c_k) \vec{\mathbf{b}}_k. \quad (12.7)$$

Weil $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine Basis ist, sind die Vektoren $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k$ linear unabhängig. Also folgt aus (12.7), dass

$$d_1 - c_1 = 0, \quad d_2 - c_2 = 0, \quad \dots, \quad d_k - c_k = 0$$

$$\iff d_1 = c_1, \quad d_2 = c_2, \quad \dots, \quad d_k = c_k,$$

d.h. die Koeffizienten in (12.6) sind eindeutig bestimmt. \square

Der nächste Satz ist wichtig für unser Verständnis von Basen (Plural von „Basis“) eines Vektorraums.

Satz 12.22. (mehr Vektoren als in einer Basis sind linear abhängig)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , der nicht nur aus $\vec{0}$ besteht. Seien $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine Basis von U , und seien $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N$ $N > k$ Vektoren aus U . Dann sind $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N$ linear abhängig.

Beweis von Satz 12.22: Da $V = \text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ gilt und $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N \in U$ sind, gibt es Koeffizienten $\alpha_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, N$, mit

$$\vec{\mathbf{v}}_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{i,j} \vec{\mathbf{b}}_i, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (12.8)$$

Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \dots + \lambda_N \vec{\mathbf{v}}_N = \vec{0}. \quad (12.9)$$

Wir setzen nun (12.8) in (12.9) ein:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \lambda_1 \sum_{i=1}^k \alpha_{i,1} \vec{\mathbf{b}}_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^k \alpha_{i,2} \vec{\mathbf{b}}_i + \dots + \lambda_N \sum_{i=1}^k \alpha_{i,N} \vec{\mathbf{b}}_i \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_{i,1} \lambda_1 + \alpha_{i,2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{i,N} \lambda_N) \vec{\mathbf{b}}_i. \end{aligned}$$

Da $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k$ als Vektoren einer Basis linear unabhängig sind, folgt daraus

$$\alpha_{i,1} \lambda_1 + \alpha_{i,2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{i,N} \lambda_N = 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, k.$$

Dieses ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit k Gleichungen und den N Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Da $N > k$, hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, d.h. die Gleichung (12.9) hat unendlich viele Lösungen. Es folgt, dass $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N$ linear abhängig sind. \square

Aus den vorhergegangenen Sätzen ziehen wir zwei wichtige Folgerungen.

Folgerung 12.23. (Dimension)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , der nicht nur aus $\vec{0}$ besteht. Es seien $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k)$ und $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)$ Basen von U . Dann gilt $k = m$. k heißt die **Dimension von U** , und wie schreiben $\dim(U) := k$.

Beweis von Folgerung 12.23: Wir nehmen an, dass gelte $m > k$ und führen dieses zu einem Widerspruch: Ist $m > k$, so sind nach Satz 12.22 die m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ linear abhängig. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)$ eine Basis von V ist. Analog führt man die Annahme $m < k$ zu einem Widerspruch. Also muss gelten $m = k$. \square

Bemerkung 12.24. (Dimension)

(1) Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, definieren wir zusätzlich $\dim(\{\vec{0}\}) := 0$ für den Fall $V = \{\vec{0}\}$.

(2) An Beispiel 12.20 (a) sehen wir, dass $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, weil die Standardbasis $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ von \mathbb{R}^n aus n Vektoren besteht.

Da in \mathbb{R}^n nach Satz 12.22 nie mehr als n Vektoren linear unabhängig sein können, folgt, dass jeder Untervektorraum U von \mathbb{R}^n eine Dimension $\dim(U) \leq n$ hat.

(3) Gilt für einen Untervektorraum U von \mathbb{R}^n , dass $\dim(U) = k$ ist, so nennen wir U **k -dimensional**. Insbesondere ist \mathbb{R}^n n -dimensional.

Folgerung 12.25. ($\dim(U) = k \Rightarrow k$ linear unabhängige Vektoren bilden Basis von U)

(1) Jede n linear unabhängigen Vektoren in \mathbb{R}^n bilden stets **eine Basis von \mathbb{R}^n** .

(2) Ist U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n mit $\dim(U) = k$, so bilden k **linear unabhängige Vektoren aus U immer eine Basis von U** .

Beweis von Folgerung 12.25: Da $U = \mathbb{R}^n$ auch ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist erhalten wir Aussage (1) als Sonderfall von Aussage (2). Es reicht also Aussage (2) zu beweisen.

Sei also U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n mit der Dimension $\dim(U) = k$, und seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ nun k beliebige linear unabhängige Vektoren in U . Angenom-

men $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ wäre keine Basis von U . Dann gäbe es einen Vektor \vec{w} in U , der nicht als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ darstellbar ist. Damit hätten wir $k+1$ linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}$ in einem k -dimensionalen Untervektorraum. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 12.22. Also war die Annahme falsch, und $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ muss eine Basis von U sein. \square

Betrachten wir nun einige Beispiele zur Anwendung unseres neuen Wissens über das Konzept Dimension.

Beispiel 12.26. (Basis und Dimension)

(a) Das System $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ ist eine Basis für \mathbb{R}^3 , denn:

Nach Beispiel 12.18 (c) sind die Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig.

Da es sich um drei linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^3 mit $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ handelt, bilden diese nach Folgerung 12.25 (1) eine Basis von \mathbb{R}^3 .

(b) Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

können keine Basis von \mathbb{R}^5 bilden, weil es nur vier Vektoren sind. Eine Basis von \mathbb{R}^5 besteht aber aus $5 = \dim(\mathbb{R}^5)$ linear unabhängigen Vektoren.

(c) Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

können keine Basis von \mathbb{R}^4 bilden, weil es fünf Vektoren sind. Eine Basis von \mathbb{R}^4 besteht aber wegen $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ aus vier linear unabhängigen Vektoren.

(Aus der Tatsache, dass fünf Vektoren in \mathbb{R}^4 vorliegen können wir nach Satz 12.22 weiter schließen, dass diese linear abhängig sind, weil $5 > 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.)

(d) Zeigen Sie, dass

$$U := \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^4 ist, und geben Sie eine Basis von U an und bestimmen Sie die Dimension von U .

Lösung: Wir überprüfen die Untervektoreigenschaft:

(i) Es gilt $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$, weil $0 + 0 = 0$ und $0 - 0 = 0$ sind.

(ii) Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ in U .

Dann gelten $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 - x_4 = 0$ und $y_1 + y_3 = 0$, $y_2 - y_4 = 0$.
Daraus folgen für

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix},$$

dass

$$(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) = \underbrace{(x_1 + x_3)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_3)}_{=0} = 0 + 0 = 0,$$

$$(x_2 + y_2) - (x_4 + y_4) = \underbrace{(x_2 - x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_2 - y_4)}_{=0} = 0 + 0 = 0,$$

d.h. $\vec{x} + \vec{y} \in U$.

(iii) Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ in U und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gelten $x_1 + x_3 = 0$ und $x_2 - x_4 = 0$. Daraus folgt für

$$\lambda \vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{bmatrix},$$

dass

$$\lambda x_1 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1 + x_3)}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda x_2 - \lambda x_4 = \lambda \underbrace{(x_2 - x_4)}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

d.h. $\lambda \vec{x}$ ist auch in U .

Da alle drei Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt sind, handelt es sich um einen Untervektorraum von \mathbb{R}^4 .

Wir setzen nun $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ und erhalten damit $x_1 = -x_3 = -\alpha$ und $x_2 = x_4 = \beta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Da keiner der beiden Vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein Vielfaches des anderen ist,

sind die beiden Vektoren linear unabhängig. Also ist

$$B := \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

eine Basis von U und $\dim(U) = 2$.

Als Letztes lernen wir noch den plausiblen Basisergänzungssatz kennen.

Satz 12.27. (Basisergänzungssatz)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , der nicht nur aus dem Nullvektor $\vec{0}$ besteht. Sind $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k \in U$ **linear unabhängig**, so lässt sich $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ zu einer Basis $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_\ell)$ von U ergänzen, wobei $\ell = \dim(U)$.

Beweis von Satz 12.27: Seien $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k \in U$ linear unabhängig. Wir betrachten zwei Fälle:

- *Fall 1:* Gilt $\text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k) = U$, so ist $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine Basis von U und die Folgerung ist wahr mit $k = \ell = \dim(U)$.
- *Fall 2:* Es gelte $\text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k) \neq U$.

Dann gibt es einen Vektor $\vec{\mathbf{b}}_{k+1} \in U$ (genauer $\vec{\mathbf{b}}_{k+1} \in U \setminus \text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$), so dass die Vektoren $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1}$ linear unabhängig sind. Gilt dann $\text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1}) = U$, so ist $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1})$ eine Basis von U .

Ist $\text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1}) \neq U$, so gibt es einen Vektor $\vec{\mathbf{b}}_{k+2} \in U$ (genauer $\vec{\mathbf{b}}_{k+2} \in U \setminus \text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1})$), so dass $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1}, \vec{\mathbf{b}}_{k+2}$ linear unabhängig sind. Ist $\text{LH}(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1}, \vec{\mathbf{b}}_{k+2}) = U$, so ist dann $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k, \vec{\mathbf{b}}_{k+1}, \vec{\mathbf{b}}_{k+2})$ eine Basis von U .

Andernfalls setzen wir den Prozess fort. Der Prozess bricht nach endlich vielen Schritten ab, da es in U nicht mehr als $\ell = \dim(U) \leq n$ linear unabhängige Vektoren geben kann. \square

12.5 Orthogonalität*

Aus Teilkapitel 10.6 kennen wir bereits das Skalarprodukt für \mathbb{R}^n , welches wir mit den beiden Formeln (siehe Definition 10.30)

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = |\vec{\mathbf{x}}| \cdot |\vec{\mathbf{y}}| \cos(\alpha), \quad (12.10)$$

*Dieses Teilkapitel ist nicht klausurrelevant.

wobei $\alpha := \angle(\vec{x}, \vec{y})$, sowie (siehe Satz 10.35)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad \text{für} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

berechnen können. Wollen wir das Skalarprodukt als Matrix-Matrix-Multiplikation auffassen, so müssen wir $\vec{x}^T \cdot \vec{y}$ schreiben, denn wir fassen, den Vektor \vec{x} dann als ein Zeilenvektor $\vec{x}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ auf.

Es sei auch an Hilfssatz 10.34 mit dem Eigenschaften des Skalarprodukts erinnert.

Gilt $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, also wenn \vec{x} und \vec{y} **aufeinander senkrecht stehen**, so folgt aus (12.10), dass $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ist. Umgekehrt folgt aus $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ für zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren \vec{x} und \vec{y} auch, dass $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ gelten muss, also dass \vec{x} und \vec{y} **aufeinander senkrecht stehen**. Wir haben hierfür in Definition 10.32 den Begriff orthogonal kennengelernt:

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal** (in Zeichen $\vec{x} \perp \vec{y}$), falls gilt $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Beispiel 12.28. (orthogonale Vektoren)

Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind orthogonal, denn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = -2 + 0 + 2 = 0.$$

Wir betrachten nun Teilmengen von Vektorräumen, die aus sogenannten „paarweise orthogonalen“ Vektoren bestehen.

Definition 12.29. (Orthonormalsystem)

Ein System $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Orthonormalsystem (ONS)** in \mathbb{R}^n , falls

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k, \\ 0, & \text{wenn } j \neq k. \end{cases}$$

Wir sagen dann, die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ sind **paarweise orthogonal** (da $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$ wenn $j \neq k$) und **normiert** (da $|\vec{v}_j| = \sqrt{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j} = 1$ für alle $j = 1, 2, \dots, m$).

Beispiel 12.30. (Orthonormalsysteme)

(a) Die Standardbasis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ mit

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist ein Orthonormalsystem in \mathbb{R}^n .

(b) Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bilden ein Orthonormalsystem in \mathbb{R}^3 , denn:

Die Vektoren sind paarweise orthogonal, da

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0.$$

Die Vektoren sind auch normiert denn

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1.$$

Der nächste Satz stellt einen Zusammenhang von Orthogonalität mit linearer Unabhängigkeit her.

Satz 12.31. (Orthonormalsystem und lineare Unabhängigkeit)

Ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ ein *Orthonormalsystem* in \mathbb{R}^n , so sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ *linear unabhängig*.

Beweis von Satz 12.31: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}.$$

Für jedes $j = 1, 2, \dots, m$ nehmen wir auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit \vec{v}_j , also

$$\vec{v}_j \cdot (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m) = \vec{v}_j \cdot \vec{0} = 0.$$

Nach dem Rechengesetzen für das Skalarprodukt (siehe Hilfssatz 10.34) gilt

$$\lambda_1 \underbrace{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_1}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_2}_{=0} + \dots + \lambda_j \underbrace{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j}_{=1} + \dots + \lambda_m \underbrace{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_m}_{=0} = 0,$$

also $\lambda_j = 0$.

Indem wir $j = 1, 2, \dots, m$ betrachten, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, und wir haben gezeigt, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ linear unabhängig sind. \square

Folgerung 12.32. (Orthonormalbasis)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . Ist $\dim(U) = k$ und ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ ein Orthonormalsystem in U , so ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ eine Basis von U . Wir nennen eine solche Basis eine *Orthonormalbasis (ONB)* von U .

Betrachten wir ein Beispiel für eine Orthonormalbasis.

Beispiel 12.33. (Orthonormalbasis)

Die Standardbasis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ von \mathbb{R}^n ist eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .

Bemerkung 12.34. (Finden einer Orthonormalbasis)

Mit Hilfe des „**Orthogonalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt**“ kann man aus jeder gegebenen Basis von \mathbb{R}^n (oder von einem Untervektorraum von \mathbb{R}^n) eine Orthonormalbasis machen.

Als Letztes lernen wir, wie sich Vektoren als Linearkombination bzgl. einer Orthonormalbasis besonders elegant darstellen lassen.

Satz 12.35. (Darstellung von Vektoren bzgl. einer ONB)

Sei $U = \mathbb{R}^n$, oder sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . Sei $B = (\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine **Orthonormalbasis** von U . Seien $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in U$. Dann gelten:

$$(1) \quad \vec{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_j$$

$$(2) \quad \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^k (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}) \cdot (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{y}})$$

$$(3) \quad |\vec{\mathbf{x}}|^2 = \sum_{j=1}^k (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}})^2$$

Schauen wir uns die Aussagen in Satz 12.35 genauer an, um diesen wichtigen Satz zu verstehen:

Satz 12.35 (1) gibt Informationen über die Darstellung von Vektoren bzgl. der Orthonormalbasis $B = (\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$. Genauer gilt für $\vec{\mathbf{x}} \in U$

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_j \tag{12.12}$$

d.h. die reellen Zahlen $\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}$, $j = 1, 2, \dots, k$, sind gerade die Koeffizienten vom Vektor $\vec{\mathbf{x}}$, wenn man diesen als Linearkombination der Vektoren $\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k$ der Orthonormalbasis $B = (\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ darstellt. Satz 12.35 (2) und Satz 12.35 (3) geben dann jeweils eine Formel an, mit der man das Skalarprodukt bzw. die Länge mittels dieser Koeffizienten berechnen kann.

Achtung: Es ist ganz wichtig, zu beachten, dass die einfachen Formeln in Satz 12.35 **nur gelten**, wenn $B = (\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine **Orthonormalbasis** ist!

Beweis von Satz 12.35:

- (1) Da $B = (\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ eine Basis von U ist, hat $\vec{\mathbf{x}}$ eine eindeutige Darstellung

$$\vec{\mathbf{x}} = c_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + c_k \vec{\mathbf{b}}_k \quad (12.13)$$

mit eindeutig bestimmten $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Da $(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2, \dots, \vec{\mathbf{b}}_k)$ ein Orthonormalsystem ist, können wir c_k direkt berechnen, indem wir in (12.13) auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $\vec{\mathbf{b}}_j$ bilden:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}} &= \vec{\mathbf{b}}_j \cdot (c_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + c_k \vec{\mathbf{b}}_j + \dots + c_n \vec{\mathbf{b}}_k) && \iff \\ \vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}} &= c_1 \underbrace{\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{b}}_1}_{=0} + c_2 \underbrace{\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{b}}_2}_{=0} + \dots + c_j \underbrace{\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{b}}_j}_{=1} + \dots + c_k \underbrace{\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{b}}_k}_{=0} = c_j, \end{aligned}$$

weil $\vec{\mathbf{b}}_i \cdot \vec{\mathbf{b}}_j = 1$ wenn $i = j$ und $\vec{\mathbf{b}}_i \cdot \vec{\mathbf{b}}_j = 0$ wenn $i \neq j$. Also gilt $c_j = \vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}$ für $j = 1, 2, \dots, k$.

- (2) Wir nutzen Satz 12.35 (1) und die Eigenschaften des Skalarprodukts: Für $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}} &= (\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_1 + (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_k \quad \implies \\ \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} &= \left[(\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_1 + (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_2 + \dots + (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{b}}_k \right] \cdot \vec{\mathbf{y}} \\ &= (\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{y}}) + (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{y}}) + \dots + (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{y}}) \\ &= \sum_{j=1}^n (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

- (3) Wir nutzen Satz 12.35 (2):

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 &= (\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}) + (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}) + \dots + (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{x}}) (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{x}}) \\ &= (\vec{\mathbf{b}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}})^2 + (\vec{\mathbf{b}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}})^2 + \dots + (\vec{\mathbf{b}}_k \cdot \vec{\mathbf{x}})^2 = \sum_{j=1}^k (\vec{\mathbf{b}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}})^2 \quad \square \end{aligned}$$

Betrachten wir zwei Beispiele zu Satz 12.35.

Beispiel 12.36. (Darstellung von Vektoren bzgl. Orthonormalbasis)

- (a) Sei $U = \mathbb{R}^n$, und seien

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\mathbf{e}}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

die Vektoren der Standardbasis. Die Standardbasis $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ ist eine Orthonormalbasis in \mathbb{R}^n . Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$$

und mit

$$\vec{e}_k = 0 \cdot \vec{e}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_{k-1} + 1 \cdot \vec{e}_k + 0 \cdot \vec{e}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

haben wir in der Tat

$$x_k = \vec{e}_k \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} + 1 \cdot x_k + 0 \cdot x_{k+1} + \dots + 0 \cdot x_n = x_k$$

für $k = 1, 2, \dots, n$.

(b) In \mathbb{R}^3 ist das System

$$B = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis, denn:

Es handelt sich um $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ Vektoren, und

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1,$$

d.h. die Vektoren von B sind normiert, und

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \end{aligned}$$

d.h. die Vektoren von B sind paarweise orthogonal.

Die Darstellung des Vektors

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

als Linearkombination bzgl. der Orthonormalbasis B berechnet sich mit

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{2},$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3(1 - \sqrt{2})}{2}$$

als

$$\frac{3(1 + \sqrt{2})}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3(1 - \sqrt{2})}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Quadratische Matrizen

In diesem Kapitel betrachten wir ausschließlich quadratische Matrizen (also Matrizen mit gleich vielen Zeilen wie Spalten) und lernen diverse Konzepte kennen, die nur für quadratische Matrizen definiert werden können: die inverse Matrix (siehe Teilkapitel 13.2) und die Determinante (siehe Teilkapitel 13.3, 13.4 und 13.5). In Teilkapitel 13.6 lernen wir dann die neuen Begriffe des Eigenwertes und Eigenvektors einer symmetrischen quadratischen Matrix kennen.

13.1 Einführung zu quadratischen Matrizen

Wie beginnen mit der Definition einer quadratischen Matrix.

Definition 13.1. (quadratische Matrix)

Gilt bei einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dass $m = n$ ist, also wenn die Matrix genauso viele Zeilen wie Spalten hat, dann nennen wir die Matrix eine quadratische Matrix.

Von jetzt an betrachten wir in diesem Kapitel nur noch quadratische Matrizen.

Definition 13.2. (Diagonalmatrix, Einheitsmatrix und untere bzw. obere Dreiecksmatrix)

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

(1) $\mathbf{A} = [a_{i,k}]$ heißt eine **Diagonalmatrix**, wenn $a_{i,k} = 0$ für $i \neq k$, also wenn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

(2) $\mathbf{A} = [a_{i,k}]$ heißt die **Einheitsmatrix** (von $\mathbb{R}^{n \times n}$), wenn \mathbf{A} eine Diagonalmatrix ist mit $a_{1,1} = a_{2,2} = \dots = a_{n,n} = 1$, also wenn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} =: \mathbf{E}_n.$$

(3) $\mathbf{A} = [a_{i,k}]$ heißt eine **untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{i,k} = 0$ für $i < k$, also wenn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

(4) $\mathbf{A} = [a_{i,k}]$ heißt eine **obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{i,k} = 0$ für $i > k$, also wenn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Beispiel 13.3. (Diagonalmatrix, Einheitsmatrix und untere bzw. obere Dreiecksmatrix)

(a) Hier sind einige Diagonalmatrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist **keine** Diagonalmatrix, denn:

Die Diagonale einer Matrix verläuft **von links oben nach rechts unten!**

(b) Die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bzw. in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist jeweils

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dann sind \mathbf{A} und \mathbf{B} obere Dreiecksmatrizen, und \mathbf{C} und \mathbf{D} sind untere Dreiecksmatrizen.

Jede Diagonalmatrix ist sowohl eine untere Dreiecksmatrix als auch eine obere Dreiecksmatrix.

Die Einheitsmatrix spielt bei der Multiplikation von Matrizen die Rolle der Zahl 1 bei der Multiplikation von reellen Zahlen.

Hilfssatz 13.4. (Multiplikation mit der Einheitsmatrix)

Sei \mathbf{E}_n die Einheitsmatrix von $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und

$$\mathbf{E}_n \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} \quad \text{für alle } \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis von Hilfssatz 13.4: Dieses ist eine Übungsaufgabe. □

13.2 Invertierbare Matrizen

Als Vorbereitung für die Definition der **inversen Matrix** starten wir mit einem Hilfssatz, der uns schon bekanntes Wissen neu zusammenstellt.

Hilfssatz 13.5. (äquivalente Aussagen über quadratische Matrizen)

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und sei $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n)$ die Standardbasis von \mathbb{R}^n . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ **eindeutig lösbar**.
- (ii) Die n linearen Gleichungssysteme $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_2$, \dots , $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_n$ sind **eindeutig lösbar**.
- (iii) Es existiert **genau ein** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$.
- (iv) Die Spaltenvektoren von \mathbf{A} sind **linear unabhängig**.

Beweis von Hilfssatz 13.5: Wir zeigen (i) \Leftrightarrow (ii), (ii) \Leftrightarrow (iii) und (i) \Leftrightarrow (iv). Durch Verkettung dieser Äquivalenzen folgen daraus dann auch (i) \Leftrightarrow (iii), (ii) \Leftrightarrow (iv), und (iii) \Leftrightarrow (iv).

- *Beweis von (i) \Rightarrow (ii):* Ist $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, so gilt dieses insbesondere für $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{e}}_2$, \dots , bzw. $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{e}}_n$.
- *Beweis von (ii) \Rightarrow (i):* Es seien $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_2$, \dots , $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_n$ eindeutig lösbar, und wir bezeichnen deren Lösungen als $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n$, also $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{e}}_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

Jeder Vektor $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ hat die eindeutige Darstellung

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

bzgl. der Standardbasis $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n)$ von \mathbb{R}^n . Wir zeigen nun, dass

$$\vec{\mathbf{x}} := \sum_{i=1}^n b_i \vec{\mathbf{x}}_i$$

eine Lösung von $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist: In der Tat

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^n b_i \vec{\mathbf{x}}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A} b_i \vec{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^n b_i \underbrace{\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_i}_{=\vec{\mathbf{e}}_i} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{b}}.$$

Dass wir die Matrix in die Summe schieben dürfen, liegt an dem Distributivgesetz für die Matrizenrechnung.

Wir müssen uns noch überlegen, warum $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{\mathbf{x}}_i$ die einzige Lösung von $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass die Vektoren $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n$ linear unabhängig sind und somit eine Basis von \mathbb{R}^n bilden: Sei also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{0}} &\implies \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{\mathbf{x}}_i \right) = \mathbf{A} \vec{\mathbf{0}} \\ \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_i}_{=\vec{\mathbf{e}}_i} = \vec{\mathbf{0}} &\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{0}}, \end{aligned}$$

und es folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, d.h. $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n$ sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von \mathbb{R}^n .

Wir nehmen nun an, es gebe eine weitere Lösung $\vec{\mathbf{y}}$ mit $\mathbf{A} \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{b}}$. Dann hat $\vec{\mathbf{y}}$ eine eindeutige Darstellung $\vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\mathbf{x}}_i$ bzgl. der Basis $(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n)$ von \mathbb{R}^n . Es folgt

$$\sum_{i=1}^n b_i \vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{A} \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^n c_i \vec{\mathbf{x}}_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_i}_{=\vec{\mathbf{e}}_i} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\mathbf{e}}_i,$$

und da $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n)$ eine Basis von \mathbb{R}^n ist folgt $c_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, d.h. $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}$. Also ist die Lösung von $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ eindeutig bestimmt.

- *Beweis von (ii) \Leftrightarrow (iii):* Es gilt $\mathbf{E}_n = [\vec{\mathbf{e}}_1 \ \vec{\mathbf{e}}_2 \ \dots \ \vec{\mathbf{e}}_n]$. Es sei \mathbf{X} die Matrix, deren Spaltenvektoren die Lösungsvektoren $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n$ von $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2$, \dots , $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_n = \vec{\mathbf{e}}_n$ sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n &\iff \mathbf{A} [\vec{\mathbf{x}}_1 \ \vec{\mathbf{x}}_2 \ \dots \ \vec{\mathbf{x}}_n] = [\vec{\mathbf{e}}_1 \ \vec{\mathbf{e}}_2 \ \dots \ \vec{\mathbf{e}}_n] \\ &\iff \left(\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_n = \vec{\mathbf{e}}_n \right) \end{aligned}$$

Daran sehen wir direkt, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ genau dann in $\mathbb{R}^{n \times n}$ eindeutig lösbar ist, wenn $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_2$, \dots , $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_n$ jeweils in \mathbb{R}^n eindeutig lösbar sind.

- *Beweis von (i) \Leftrightarrow (iv):* Vorüberlegung: Bezeichnen wir mit $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbb{R}^n$ die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{A} , so gilt

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{b}}.$$

In Worten: $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist genau dann lösbar, wenn $\vec{\mathbf{b}} \in \text{LH}(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$.

- *Beweis von (i) \Rightarrow (iv):* Es sei $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Dann hat insbesondere (für $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$)

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{0}}.$$

genau eine Lösung, nämlich nur $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, und $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$ sind somit linear unabhängig.

- *Beweis von (iv) \Rightarrow (i):* Es seien $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$ linear unabhängig. Da es sich um $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^n handelt, bilden diese eine Basis von \mathbb{R}^n . Also gilt

$$\text{LH}(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n) = \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt nach unsere Vorüberlegung, dass

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{b}}$$

für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ lösbar ist. Weil $(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$ eine Basis für \mathbb{R}^n ist, sind die Koeffizienten x_1, x_2, \dots, x_n in der Linearkombination

$$x_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{b}}$$

eindeutig bestimmt. Also ist $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. \square

Wir interessieren uns nun für die Matrix \mathbf{X} in Hilfssatz 13.5 (iii), falls diese existiert. Diese werden wir weiter unten als die **inverse Matrix zu \mathbf{A}** einführen.

Zunächst einmal wollen wir uns noch überlegen, dass, falls ein $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ existiert, die Matrix \mathbf{X} **eindeutig bestimmt** ist und auch

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$$

erfüllt. (Da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, ist dieses nicht selbstverständlich!)

Es existiere also $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$.

- Wir zeigen zunächst, dass \mathbf{X} dann eindeutig bestimmt ist, und dass die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear unabhängig sind.

Da $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ existiert, ist nach Hilfssatz 13.5 das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ lösbar. (Da wir die Eindeutigkeit von \mathbf{X} nicht verlangen, verlieren wir auch in Hilfssatz 13.5 (i) und (ii) die Eindeutigkeit. Man macht sich dieses klar, wenn man den Beweis des Satzes noch einmal durchgeht.)

Dann gilt für die Spaltenvektoren $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbb{R}^n$ von \mathbf{A} , dass

$$\text{LH}(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n) = \mathbb{R}^n, \quad (13.1)$$

weil

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \quad \iff \quad x_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{b}}. \quad (13.2)$$

Es folgt aus (13.1), dass $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$ linear unabhängig sein müssen. (Erklärung: Wären die Vektoren $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$ nicht linear unabhängig, so wäre $\text{LH}(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$ ein höchstens $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n im Widerspruch zu (13.1).) Damit folgt, dass $(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$ eine Basis von \mathbb{R}^n ist, und somit sind die Koeffizienten in der Linearkombination in (13.2) eindeutig bestimmt. Also ist $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, und nach Hilfssatz 13.5 ist somit $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ eindeutig bestimmt.

- Wir zeigen nun, dass es eine Matrix $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, die $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{E}_n$ erfüllt. Bezeichnen wir die Spaltenvektoren von \mathbf{Y} mit $\vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{y}}_2, \dots, \vec{\mathbf{y}}_n \in \mathbb{R}^n$, so können wir $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{E}_n$ auch als die n linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{y}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{y}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{y}}_n = \vec{\mathbf{e}}_n \\ \iff \quad [\mathbf{A}^T \mid \vec{\mathbf{e}}_1], \quad [\mathbf{A}^T \mid \vec{\mathbf{e}}_2], \quad \dots, \quad [\mathbf{A}^T \mid \vec{\mathbf{e}}_n] \end{aligned}$$

schreiben. Kompakter können wir diese als $[\mathbf{A}^T \mid \mathbf{E}_n]$ notieren.

Durch elementare Zeilenumformungen an diesen n linearen Gleichungssystemen bildet man Linearkombinationen der Zeilenvektoren. Die n Zeilenvektoren von \mathbf{A}^T sind die n Spaltenvektoren von \mathbf{A} , und diese sind linear unabhängig. Wegen $\text{LH}(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n) = \mathbb{R}^n$ ist es klar, dass man mit elementaren Zeilenumformungen \mathbf{A}^T in \mathbf{E}_n überführen kann. Also kann man $[\mathbf{A}^T \mid \mathbf{E}_n]$ mit elementaren Zeilenumformungen in $[\mathbf{E}_n \mid \mathbf{Z}]$ umformen mit einer Matrix \mathbf{Z} , die sich durch die elementaren Zeilenumformungen ergibt. $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ ist dann die Lösung von $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{E}_n$.

- Wir zeigen nun, dass gilt $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Sei $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix aus dem vorigen Schritt, die $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{E}_n$ erfüllt. Durch Transponieren finden wir

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y})^T = \mathbf{E}_n^T \iff \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n, \quad (13.3)$$

und Multiplikation mit \mathbf{X} von rechts liefert

$$\mathbf{Y}^T \cdot \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}}_{=\mathbf{E}_n} = \underbrace{\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{X}}_{=\mathbf{X}}, \iff \mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{X}.$$

Aus (13.3) folgt wegen $\mathbf{Y}^T = \mathbf{X}$, dass $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ auch $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ erfüllt.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir die inverse Matrix ein.

Definition 13.6. (invertierbar; inverse Matrix)

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls eine Matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n.$$

(Es gilt dann auch $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$. Die Matrix \mathbf{X} ist *eindeutig bestimmt*.) In diesem Fall heißt \mathbf{X} die *zu \mathbf{A} inverse Matrix*. Sie wird mit \mathbf{A}^{-1} bezeichnet. (Man sagt auch, \mathbf{A}^{-1} ist die *inverse Matrix von/zu \mathbf{A}* .)

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 13.7. (invertierbar; inverse Matrix)

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar mit $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, denn

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2.$$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar mit $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, denn

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2.$$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn für jedes $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

gilt

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2.$$

Wir kommen nun noch einmal auf Hilfssatz 13.5 zurück, denn dieser liefert uns den folgenden wichtigen Satz.

Satz 13.8. (äquivalente Aussagen für invertierbare Matrizen)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) \mathbf{A} invertierbar.
- (ii) $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ **eindeutig lösbar**. (Es gilt dann $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}$.)
- (iii) Die n linearen Gleichungssysteme $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{e}_1$, $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{e}_2$, \dots , $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{e}_n$ sind **eindeutig lösbar**.
- (iv) $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ hat **nur die Lösung** $\vec{x} = \vec{0}$.
- (v) Die Spaltenvektoren von \mathbf{A} sind **linear unabhängig**.

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so folgt:

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b} \iff \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b} \iff \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b} \quad (\text{weil } \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}_n)$$

Beweis von Satz 13.8: Betrachten wir zunächst Hilfssatz 13.5. Aussage (iii) in Hilfssatz 13.5 besagt nach Definition 13.6 gerade, dass \mathbf{A} invertierbar ist. Also sind nach Hilfssatz 13.5 Aussagen (i), (ii), (iii) und (v) äquivalent. Der Satz ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, dass (iv) zu einer der anderen Aussagen äquivalent ist. Wir zeigen $(ii) \Leftrightarrow (iv)$.

- *Beweis von (ii) \Rightarrow (iv):* Wenn $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, dann ist insbesondere $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ eindeutig lösbar. $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ hat immer die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, und dieses muss wegen der eindeutigen Lösbarkeit also die einzige Lösung sein.
- *Beweis von (iv) \Rightarrow (ii):* Das LGS $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ habe nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Bezeichnen wir mit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{A} , so gilt

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0} \iff x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

und diese Gleichung hat nur die Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Also sind die $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ von \mathbf{A} linear unabhängig

und bilden somit eine Basis von \mathbb{R}^n . Dann lässt sich jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination von $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n$ schreiben, also

$$x_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{a}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{0}} \quad \iff \quad \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten x_1, x_2, \dots, x_n . Also ist $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. \square

Was ist, wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht invertierbar ist? Mittels Kontraposition (vgl. Hilfssatz D.24 in Anhang D.2) erhält man, dass die Verneinungen der Aussagen in Satz 13.8 äquivalent sind.

Folgerung 13.9. (äquivalente Aussagen für nicht invertierbare Matrizen)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) \mathbf{A} ist *nicht invertierbar*.
- (ii) $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ist nicht für jedes $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar (d.h. es gibt mindestens ein $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ für das $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar ist).
- (iii) Nicht alle der n linearen Gleichungssysteme $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_1, \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_2, \dots, \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_n$ sind eindeutig lösbar (d.h. mindestens eines dieser LGSe hat keine Lösung oder hat mehr als eine Lösung).
- (iv) $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ hat weitere Lösungen außer $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- (v) Die Spaltenvektoren von \mathbf{A} sind *linear abhängig*.

Aus Satz 13.8 ergibt sich ein nützliches **Verfahren zur Berechnung der Inversen \mathbf{A}^{-1} einer invertierbaren Matrix \mathbf{A}** : Wir suchen eine Matrix \mathbf{X} mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$. Dieses können wir auch als die **Lösung der folgenden n linearen Gleichungssysteme**

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}_n = \vec{\mathbf{e}}_n,$$

für die Spaltenvektoren $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n$ von \mathbf{X} auffassen, denn

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n \quad \iff \quad \mathbf{A} \cdot [\vec{\mathbf{x}}_1 \ \vec{\mathbf{x}}_2 \ \dots \ \vec{\mathbf{x}}_n] = [\vec{\mathbf{e}}_1 \ \vec{\mathbf{e}}_2 \ \dots \ \vec{\mathbf{e}}_n].$$

Wir behandeln alle n linearen Gleichungssysteme gemeinsam und schreiben dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n]$. Wenn wir diese erweiterte Koeffizientenmatrix mit elementaren Zeilenoperationen in eine Form bringen, bei der links

\mathbf{E}_n steht, also $[\mathbf{E}_n | \mathbf{X}]$, so können wir die Inverse $\mathbf{A}^{-1} := \mathbf{X}$ ablesen. Wir halten diese Vorgehensweise als Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix fest.

Methode 13.10. (Gauß-Jordan-Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix)

Falls $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *invertierbar* ist, so lässt sich $[\mathbf{A} | \mathbf{E}_n]$ mit elementaren Zeilenoperationen in die Form $[\mathbf{E}_n | \mathbf{X}]$ bringen. Die *inverse Matrix* von \mathbf{A} ist dann $\mathbf{A}^{-1} := \mathbf{X}$.

(Falls \mathbf{A} nicht invertierbar ist, so ist es *nicht möglich*, $[\mathbf{A} | \mathbf{E}_n]$ mit elementaren Zeilenoperationen in die Form $[\mathbf{E}_n | \mathbf{X}]$ zu bringen.)

Wir üben die Berechnung der inversen Matrix an mehreren Beispielen.

Beispiel 13.11. (Berechnung der Inversen mit Gauß-Jordan-Verfahren)

(a) Sei $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Da keiner der beiden Spaltenvektoren von \mathbf{A} ein Vielfaches des anderen ist, sind die beiden Spaltenvektoren linear unabhängig. Nach Satz 13.8 ist \mathbf{A} somit invertierbar. Wir berechnen nun \mathbf{A}^{-1} mit den Gauß-Jordan-Verfahren:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[Z_2 \rightarrow Z_2 - 3Z_1]{\downarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[Z_2 \rightarrow -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Also gilt $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) Sei $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Man kann sehen, dass die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear unabhängig sind (und dieses rechnet man auch leicht nach), und somit ist \mathbf{A} nach Satz 13.8 invertierbar. Wir berechnen nun \mathbf{A}^{-1} mit den Gauß-Jordan-Verfahren:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[Z_3 \rightarrow \frac{1}{3}Z_3]{Z_2 \rightarrow \frac{1}{3}Z_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$= \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{A}^{-1}}_{= \mathbf{A}^{-1}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$$

Also ist gilt in der Tat $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

- (3) Es sei \mathbf{A} invertierbar. Dann gilt für \mathbf{A} und seine Inverse \mathbf{A}^{-1} , dass $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ ist. Wir vertauschen die beiden Seiten der Gleichung und transponieren:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^{-1})^T,$$

wobei wir $\mathbf{E}_n^T = \mathbf{E}_n$ (weil \mathbf{E}_n eine Diagonalmatrix ist) und im letzten Schritt Hilfssatz 11.18 (3) genutzt haben. Aus der Gleichung $\mathbf{E}_n = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^{-1})^T$ folgt aber direkt, dass $(\mathbf{A}^{-1})^T$ die Inverse zu \mathbf{A}^T ist, also $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$. \square

13.3 Die Determinante

In diesem Teilkapitel lernen wir die **Determinante** für beliebige quadratische Matrizen \mathbf{A} in $\mathbb{R}^{n \times n}$ kennen. Diese ordnet einer quadratischen Matrix eine reelle Zahl zu. Wir werden sehen, dass wir mit Hilfe der Determinante sehr leicht überprüfen können, ob eine Matrix invertierbar ist.

Wir führen die Determinante zunächst für den Sonderfall von 2×2 -Matrizen und 3×3 -Matrizen ein.

Definition 13.13. (Determinante einer 2×2 -Matrix)

Die Determinante der 2×2 -Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ ist definiert durch

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}. \quad (13.4)$$

Beispiel 13.14. (Determinante einer 2×2 -Matrix)

Die Determinanten der 2×2 -Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

sind

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2,$$

$$\det(\mathbf{B}) = (-7) \cdot 3 - (-3) \cdot 7 = -21 + 21 = 0.$$

Definition 13.15. (Determinante einer 3×3 -Matrix)

Die Determinante der 3×3 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

ist definiert durch die „**Regel von Sarrus**“:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \right) \\ &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Bemerkung 13.16. (Merkhilfe zur Regel von Sarrus)

Wir schreiben die ersten beiden Spalten der Matrix \mathbf{A} nochmals rechts neben die Matrix. Dann bilden wir die Produkte entlang der Diagonalen von links oben nach rechts unten und versehen diese mit dem Vorzeichen „+“ und bilden die Produkte entlang der Diagonalen von rechts oben nach links unten und versehen diese mit dem Vorzeichen „-“ (siehe (13.6)):

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} & \\ & \diagup & \diagdown & \diagdown & \diagup & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} & \\ - & - & - & + & + & + \end{array} \quad (13.6)$$

Aufaddieren liefert die Determinante $\det(\mathbf{A})$.

Beispiel 13.17. (Determinante einer 3×3 -Matrix)Die Determinanten der 3×3 -Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2. \end{aligned}$$

Nun definieren wir $\det(\mathbf{A})$ auch für $n \times n$ -Matrizen \mathbf{A} mit beliebigen $n \geq 2$.**Definition 13.18. (Determinante – Laplacescher Entwicklungssatz)**

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$. Dann definieren wir die Determinante $\det(\mathbf{A})$ „rekursiv“ durch **Entwickeln nach einer beliebigen Zeile**: Durch **Entwicklung nach der i -ten Zeile** erhalten wir

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(\mathbf{A}_{\widehat{i,k}}). \quad (13.7)$$

Alternativ können wir die Determinante $\det(\mathbf{A})$ „rekursiv“ durch **Entwickeln nach einer beliebigen Spalte** definieren: Durch **Entwicklung nach der k -ten Spalte** erhalten wir

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(\mathbf{A}_{\widehat{i,k}}). \quad (13.8)$$

Sowohl in (13.7) als auch in (13.8) ist $\mathbf{A}_{\widehat{i,k}}$ diejenige Matrix in $\mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, die aus \mathbf{A} durch Streichen der i -ten Zeile und k -ten Spalte entsteht, also

$$\mathbf{A}_{\widehat{i,k}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 13.19. (Laplacescher Entwicklungssatz)

- (1) Mit der „rekursiven“ **Berechnung** ist Folgendes gemeint: Indem wir die Formel (13.7) bzw. (13.8) erneut anwenden, können wir dann ebenfalls $\det(\widehat{\mathbf{A}}_{i,k})$ berechnen. Wir wiederholen diesen Prozess solange, bis wir irgendwann nach Streichen von Zeilen und Spalten Matrizen in $\mathbb{R}^{m \times m}$ mit $m = 3$ oder $m = 2$ erhalten, deren Determinante wir bereits mit (13.5) bzw. (13.4) berechnen können.
- (2) Wichtig ist die (nicht offensichtliche) Information, dass die Formeln (13.7) und (13.8) für jedes i bzw. k den **gleichen Wert** für die Determinante $\det(\mathbf{A})$ liefern.
- (3) Mit der Definition $\det(\mathbf{A}) := a_{1,1}$ für die Determinante einer 1×1 -Matrix $\mathbf{A} = [a_{1,1}]$ gilt der Laplacesche Entwicklungssatz auch für $n = 2$.
- (4) Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ liefert der Laplacesche Entwicklungssatz jeweils die gleiche Formel wie (13.4) bzw. (13.5) (siehe auch Spezialfall 13.21 bzw. Spezialfall 13.22).
- (5) In der Mathematik wird die Determinante eigentlich anders über Permutationen eingeführt. Die Formeln (13.7) und (13.8) treten dann als Satz, der sogenannte Laplacesche Entwicklungssatz, auf. Für Anwender ist es aber sinnvoll, die Determinante mit der Formel aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz zu definieren.

Beispiel 13.20. (Determinante)

- (a) Wir wollen die Determinante der Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen.

Wir entwickeln nach der ersten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \right) + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \right) \\
 &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right) \\
 &= (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\
 &= (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) \\
 &= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.
 \end{aligned}$$

(b) Wir wollen die Determinante der Matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ mit

dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen.

Wir dürfen uns dabei aussuchen, nach welcher Spalte oder Zeile wir entwickeln. Da in der dritten Zeile zwei Einträge null sind, ist die Entwicklung nach der dritten Zeile vom Rechenaufwand her besonders günstig!

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + 0 + 0 + (-1)^{3+4} \cdot 3 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Mit der Regel von Sarrus erhalten wir

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right) &= 4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= 8 - 2 + 2 - 2 - 8 + 2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) &= (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) \\ &\quad - 2 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= -2 - 24 - 4 - 6 + 2 - 16 = -50. \end{aligned}$$

Also finden wir

$$\det(\mathbf{B}) = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot 0 + (-1)^{3+4} \cdot 3 \cdot (-50) = 0 + (-3) \cdot (-50) = 150.$$

(c) Wir wollen die Determinante der Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

berechnen und entwickeln dazu nach der dritten Spalte:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{C}) &= (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &\quad + (-1)^{3+3} \cdot 0 + (-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= 1 \cdot (0 + 0 + 16 + 6 - 2 - 0) + 1 \cdot (0 - 1 + 32 + 12 - 4 - 0) \\
 &\quad + 0 + (-3) \cdot (0 + 8 + 12 - 0 - 12 - 1) = 20 + 39 - 21 = 38.
 \end{aligned}$$

(d) Die Determinante der Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

berechnet man am einfachsten durch Entwicklung nach der zweiten Spalte (oder der zweiten Zeile):

$$\det(\mathbf{D}) = (-1)^{2+2} \cdot 3 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) = 3 \cdot \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Als weiteres Beispiel und als Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes wollen wir die Formeln für die Determinante einer 2×2 -Matrix und einer 3×3 -Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz herleiten. Daran sehen wir, dass (13.4) und (13.5) nur Sonderfälle der allgemeinen Definition 13.18 sind.

Beispiel 13.21. (Determinante einer 2×2 -Matrix)

Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz finden wir für die Determinante der beliebigen 2×2 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

bei Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,1}}) + (-1)^{1+2} a_{1,2} \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,2}})$$

$$= a_{1,1} \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,1}}) - a_{1,2} \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,2}}). \quad (13.9)$$

Die beiden Matrizen $\mathbf{A}_{\widehat{1,1}}$ und $\mathbf{A}_{\widehat{1,2}}$ erhält man jeweils durch das Streichen der ersten Zeile und der ersten bzw. zweiten Spalte; also gilt

$$\mathbf{A}_{\widehat{1,1}} = [a_{2,2}] \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{\widehat{1,2}} = [a_{2,1}].$$

Definieren wir nun die Determinante einer 1×1 -Matrix, also einer reellen oder komplexen Zahl, als diese Zahl selber (vgl. auch Bemerkung 13.19 (3)), so haben wir

$$\det(\mathbf{A}_{\widehat{1,1}}) = a_{2,2} \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,2}}) = a_{2,1}.$$

Einsetzen in (13.9) liefert

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1},$$

und dieses ist gerade die Formel (13.4).

Beispiel 13.22. (Determinante einer 3×3 -Matrix)

Wir wollen nun die Regel von Sarrus (13.5) mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes herleiten. Für eine beliebige 3×3 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

finden wir durch Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \right) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det \left(\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + (-1)^{1+2} a_{1,2} \det \left(\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \right) + (-1)^{1+3} a_{1,3} \det \left(\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \right) \\ &= a_{1,1} (a_{2,2} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,2}) - a_{1,2} (a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) \\ &\quad + a_{1,3} (a_{2,1} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,1}) \\ &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} \\ &\quad + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3}, \end{aligned}$$

und wir erhalten in der Tat die Regel von Sarrus (13.5).

Als Letztes untersuchen wir den Fall von unteren bzw. oberen Dreiecksmatrizen.

Hilfssatz 13.23. (Determinante von unteren bzw. oberen Dreiecksmatrizen)

Sei $A = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$ eine **untere Dreiecksmatrix** bzw. eine **obere Dreiecksmatrix**, also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}, \quad (13.10)$$

d.h. die Determinante ist das **Produkt der Einträge auf der Diagonalen** (von links oben nach rechts unten) der unteren bzw. oberen Dreiecksmatrix.

Betrachten wir einige Beispiele für die Anwendung von Hilfssatz 13.23.

Beispiel 13.24. (Determinante von unteren/oberen Dreiecksmatrizen)

Betrachten wir die Matrizen

$$\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \\ 13 & -19 & 4 & 0 \\ -7 & 1017 & 23 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 9 \\ 0 & 100 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{E}_n sind untere Dreiecksmatrizen, und die Matrix \mathbf{B} ist eine obere Dreiecksmatrix. Also können wir Hilfssatz 13.23 anwenden und finden

$$\det(\mathbf{E}_n) = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n\text{-mal}} = 1,$$

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot (-5) \cdot 4 \cdot 1 = -40,$$

$$\det(\mathbf{B}) = (-1) \cdot 100 \cdot 3 \cdot 5 = -1500.$$

Nun beweisen wir Hilfssatz 13.23 mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

Beweis von Hilfssatz 13.23: Sei \mathbf{A} eine obere Dreiecksmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$, also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Dann entwickeln wir die Determinante von \mathbf{A} nach der ersten Spalte und erhalten

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} a_{1,1} \cdot \det \left(\underbrace{\begin{bmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{n \times n\text{-Matrix}} \right). \quad (13.11)$$

Wir entwickeln die Determinante der verbleibenden Matrix wieder nach der ersten Spalte:

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \right) = (-1)^{1+1} a_{2,2} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} a_{3,3} & \cdots & \cdots & a_{3,n} \\ 0 & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \right)$$

Einsetzen in (13.11) liefert nun

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} a_{3,3} & \cdots & \cdots & a_{3,n} \\ 0 & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \right).$$

Wiederholtes Entwickeln der Determinante der Restmatrix liefert schließlich

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot \dots \cdot a_{n,n}. \quad \square$$

13.4 Rechenregeln für Determinanten

In diesem Teilkapitel lernen wir wichtige Rechenregeln für Determinanten kennen.

Satz 13.25. (Rechenregeln für Determinanten – Teil I)

$$(1) \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \quad \text{für alle } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

(2) Falls \mathbf{A} invertierbar ist, gelten $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

(3) $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$ für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Beweis von Satz 13.25:

- (1) Diese Formel werden wir nicht beweisen.
 (2) Ist \mathbf{A} invertierbar, so gilt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$ und nach Rechenregel (1) folgt

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1}).$$

Daraus folgt insbesondere, dass $\det(\mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A}^{-1})$ beide ungleich Null sein müssen (sonst wäre die rechte Seite gleich Null), also $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\det(\mathbf{A}^{-1}) \neq 0$. Division durch $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ liefert nun die gesuchte Formel.

- (3) Diese Formel kann man beweisen, indem man $\det(\mathbf{A})$ nach der ersten Zeile entwickelt und $\det(\mathbf{A}^T)$ nach der ersten Spalte entwickelt. \square

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 13.26. (Rechenregeln für Determinanten – Teil I)

- (a) In Beispiel 13.20 (a) haben wir berechnet, dass für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$. Nach Satz 13.25 (3) folgt nun für die zu \mathbf{A} transponierte Matrix

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

dass gilt $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) = 0$.

- (b) Wir wollen die Determinante der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

berechnen. Nach Beispiel 13.11 (b) wissen wir, dass \mathbf{B} die inverse Matrix der Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ist. Deren Determinante haben wir bereits in Beispiel 13.20 (d) berechnet und fanden $\det(\mathbf{D}) = 6$. Also gilt nach Satz 13.25 (2) wegen $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}$ und $(\mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{B}$

$$\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{\det(\mathbf{B}^{-1})} = \frac{1}{\det(\mathbf{D})} = \frac{1}{6}.$$

(c) Die Determinante der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{7}{2} \\ 3 & \frac{8}{3} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

ist nach Satz 13.25 (1) und Beispielen (a) und (b)

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{7}{2} \\ 3 & \frac{8}{3} & 5 \end{bmatrix} \right) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \underbrace{\det(\mathbf{A})}_{=0} \cdot \det(\mathbf{B}) = 0 \cdot \frac{1}{6} = 0.$$

Zur Motivation des nächsten Satzes überprüfen wir einige wichtige Eigenschaften der Determinante für den Fall $n = 2$. In Folgenden sei also $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ immer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

- Vertauscht man zwei Zeilen (oder Spalten) von A , so ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} \right) = a_{2,1} a_{1,2} - a_{2,2} a_{1,1} = -[a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}] = -\det(\mathbf{A}).$$

- Einen gemeinsamen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ einer Zeile (oder Spalte) darf man aus $\det(\mathbf{A})$ herausziehen:

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) &= \lambda a_{1,1} a_{2,2} - \lambda a_{1,2} a_{2,1} \\ &= \lambda (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) = \lambda \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^2 \det(\mathbf{A})$.

- Wird zu einer Zeile (oder Spalte) von \mathbf{A} ein Zeilenvektor $\vec{\mathbf{b}}^T = [b_1 \ b_2]$ (bzw. ein Spaltenvektor $\vec{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$) addiert, so gilt

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_1 & a_{1,2} + b_2 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) &= (a_{1,1} + b_1) a_{2,2} - (a_{1,2} + b_2) a_{2,1} \\ &= (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) + (b_1 a_{2,2} - b_2 a_{2,1}) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} + b_1 & a_{2,2} + b_2 \end{bmatrix} \right) &= a_{1,1} (a_{2,2} + b_2) - a_{1,2} (a_{2,1} + b_1) \\ &= (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) + (a_{1,1} b_2 - a_{1,2} b_1) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

und analog für den Fall mit Spalten statt Zeilen.

- Addiert man das μ -fache einer Zeile zu einer **anderen** Zeile, so ändert sich die Determinante nicht:

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} + \mu a_{1,1} & a_{2,2} + \mu a_{1,2} \end{bmatrix} \right) &= a_{1,1} (a_{2,2} + \mu a_{1,2}) - a_{1,2} (a_{2,1} + \mu a_{1,1}) \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} = \det(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} + \mu a_{2,1} & a_{1,2} + \mu a_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) &= (a_{1,1} + \mu a_{2,1}) a_{2,2} - (a_{1,2} + \mu a_{2,2}) a_{2,1} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} = \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Analoges gilt für Spalten: Addiert man das μ -fache einer Spalte zu einer **anderen** Spalte, so ändert sich die Determinante nicht.

Die Rechenregeln, die wir oben für die Determinante einer 2×2 -Matrix überprüft haben, gelten auch für Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit beliebigem $n \geq 2$.

Satz 13.27. (Rechenregeln für Determinanten – Teil II)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zur Formulierung der nachfolgenden Rechenregeln für die Determinante schreiben wir \mathbf{A} auch als

$$\mathbf{A} = [\vec{s}_1 \quad \vec{s}_2 \quad \cdots \quad \vec{s}_n] = \begin{bmatrix} \vec{z}_1^T \\ \vec{z}_2^T \\ \vdots \\ \vec{z}_n^T \end{bmatrix}$$

mit den n Spaltenvektoren $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n$ bzw. den n Zeilenvektoren $\vec{z}_1^T, \vec{z}_2^T, \dots, \vec{z}_n^T$ von \mathbf{A} . Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

- (4) Beim Austausch zweier Zeilen bzw. Spalten von \mathbf{A} wechselt $\det(\mathbf{A})$ das Vorzeichen.
- (5) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{z}_1^T \\ \vdots \\ \vec{z}_{i-1}^T \\ \lambda \cdot \vec{z}_i^T \\ \vec{z}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \vec{z}_n^T \end{array} \right] \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{z}_1^T \\ \vdots \\ \vec{z}_{i-1}^T \\ \vec{z}_i^T \\ \vec{z}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \vec{z}_n^T \end{array} \right] \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det(\mathbf{A}),$$

$$\det([\vec{s}_1 \quad \cdots \quad \vec{s}_{k-1} \quad \lambda \cdot \vec{s}_k \quad \vec{s}_{k+1} \quad \cdots \quad \vec{s}_n]) \\ = \lambda \cdot \det([\vec{s}_1 \quad \cdots \quad \vec{s}_{k-1} \quad \vec{s}_k \quad \vec{s}_{k+1} \quad \cdots \quad \vec{s}_n]) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A}).$$

In Worten: Einen gemeinsamen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ einer Zeile (oder Spalte) darf man aus der Determinante herausziehen.

- (6) Sei $\mu \in \mathbb{R}$. Die Addition des μ -fachen der i -ten Zeile (oder Spalte) von \mathbf{A} zur k -ten Zeile (oder Spalte) von \mathbf{A} ändert den Wert von $\det(\mathbf{A})$ nicht, wenn $i \neq k$ ist.
- (7) Sei $\vec{b}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ein Zeilenvektor und $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Dann gilt für jedes $i = 1, 2, \dots, n$

$$\det \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{z}_1^T \\ \vdots \\ \vec{z}_{i-1}^T \\ \vec{z}_i^T + \vec{b}^T \\ \vec{z}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \vec{z}_n^T \end{array} \right] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{z}_1^T \\ \vdots \\ \vec{z}_{i-1}^T \\ \vec{z}_i^T \\ \vec{z}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \vec{z}_n^T \end{array} \right] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \vec{z}_1^T \\ \vdots \\ \vec{z}_{i-1}^T \\ \vec{b}^T \\ \vec{z}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \vec{z}_n^T \end{array} \right] \end{pmatrix},$$

und für jedes $k = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned} & \det([\vec{s}_1 \ \cdots \ \vec{s}_{k-1} \ \vec{s}_k + \vec{c} \ \vec{s}_{k+1} \ \cdots \ \vec{s}_n]) \\ &= \det([\vec{s}_1 \ \cdots \ \vec{s}_{k-1} \ \vec{s}_k \ \vec{s}_{k+1} \ \cdots \ \vec{s}_n]) \\ & \quad + \det([\vec{s}_1 \ \cdots \ \vec{s}_{k-1} \ \vec{c} \ \vec{s}_{k+1} \ \cdots \ \vec{s}_n]). \end{aligned}$$

(8) Sind zwei Zeilenvektoren bzw. zwei Spaltenvektoren von \mathbf{A} **linear abhängig**, so gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$. Insbesondere: Wenn eine Zeile (oder Spalte) von \mathbf{A} der Nullvektor ist, so gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Die Regeln (4) bis (8) aus Satz 13.27 kann man benutzen, um die Determinante einer Matrix konkret zu berechnen: Bei (4), (5) und (6) handelt es sich um **elementare Zeilenoperationen** bzw. um **elementare Spaltenoperationen**, mit Hilfe derer man die Matrix, deren Determinante berechnet werden soll, vereinfachen kann. Um elementare Zeilenoperationen oder elementare Spaltenoperationen an der Matrix anzugeben, nutzen wir wieder die in Teilkapitel 11.3 eingeführte Notation. Die Spalten der Matrix bezeichnen wir dabei mit S_1, S_2, \dots, S_n und notieren elementare Spaltenoperationen analog zu den elementaren Zeilenoperationen.

Natürlich kann man die Regeln (4), (5) und (6) aus Satz 13.27 auch zusammen mit dem Entwicklungssatz von Laplace verwenden, indem man die Matrix zunächst geeignet mit den Regeln (4), (5) und (6) vereinfacht und danach nach einer geeigneten Zeile oder Spalte entwickelt.

Wir üben dieses an einigen Beispielen.

Beispiel 13.28. (Berechnung der Determinante)

- (a) Wir verwenden elementare Zeilenoperationen (d.h. die Regeln (4), (5) und (6) aus Satz 13.27), um die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

auf obere Dreiecksgestalt zu bringen und anschließend ihre Determinante

leicht mit Hilfssatz 13.23 berechnen zu können.

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} Z_1 \rightarrow Z_1 - 2Z_2 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 4Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 + Z_2 \\ \Downarrow \\ \end{array} \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) \\
 &\stackrel{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{Z_4 \rightarrow \frac{1}{2}Z_4} \Downarrow -2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_4 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 3Z_4 \\ \Downarrow \\ \end{array} -2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &\stackrel{Z_2 \leftrightarrow Z_4}{\Downarrow} 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} Z_4 \rightarrow Z_4 - 2Z_3 \\ \Downarrow \\ \end{array} 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} \right) \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 19 = 38,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Hilfssatz 13.23 benutzt haben.

Wir hätten die Determinante auch wie folgt berechnen können

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} Z_1 \rightarrow Z_1 - 2Z_2 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 4Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 + Z_2 \\ \Downarrow \\ \end{array} \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) \\
 &\stackrel{\text{Entwicklung}}{\text{nach der}} \downarrow \text{1. Spalte} \Downarrow 0 + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) + 0 + 0 \\
 &\stackrel{Z_3 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3}{\Downarrow} -2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = -2 \cdot (4 - 21 + 0 - 0 + 7 - 9) = 38.
 \end{aligned}$$

- (b) Wir verwenden elementare Spalten- und Zeilenoperationen (d.h. die Regeln (4), (5) und (6) aus Satz 13.27) und gegebenenfalls den Laplaceschen Ent-

wicklungssatz, um die Determinante der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

zu berechnen. Wir gehen wie folgt vor (es gibt viele andere Varianten die zum Ziel führen):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right) \stackrel{S_3 \rightarrow \frac{1}{2} S_3}{\cong} 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\stackrel{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_3}{\cong} 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\stackrel{\text{Entwicklung nach der 1. Zeile}}{\cong} 0 + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) + 0 \\ &= -6 \cdot (0 + 3 + 24 - 9 - 18 - 0) - 2 \cdot (0 + 21 - 12 - 0 + 9 - 0) \\ &= 0 - 2 \cdot 18 = -36. \end{aligned}$$

(c) Wir wollen die Determinante der Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 1 & 1 \\ -10 & 14 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

berechnen:

$$\det(\mathbf{C})$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 1 & 1 \\ -10 & 14 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1} \\ \xrightarrow{Z_4 \rightarrow Z_4 + 2Z_3} \\ \Downarrow \\ \cong \end{array} \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

wobei die Determinante der neuen Matrix nach Regel (8) in Satz 13.27 null ist, da der zweite und vierte Zeilenvektor linear abhängig sind.

13.5 Einige Anwendungen von Determinanten

Als Erstes halten wir in einem Satz fest, was wir nun über die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen mit n Gleichungen und n Unbekannten wissen.

Satz 13.29. (äquiv. Charakterisierungen invertierbarer Matrizen)

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen *äquivalent*:

- (i) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- (ii) \mathbf{A} ist *invertierbar*.
- (iii) Die Spaltenvektoren von \mathbf{A} sind *linear unabhängig*.
- (iv) Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ *eindeutig lösbar*.
- (v) $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

Mittels Kontraposition (vgl. Hilfssatz D.24 in Anhang D.2) folgt, dass die Verneinungen der Aussagen aus Satz 13.29 äquivalent sind.

Folgerung 13.30. (aus Satz 13.29)

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen *äquivalent*:

- (i) $\det(\mathbf{A}) = 0$
- (ii) \mathbf{A} ist *nicht invertierbar*.
- (iii) Die Spaltenvektoren von \mathbf{A} sind *linear abhängig*.
- (iv) Es gibt mindestens ein $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, für das das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$ *nicht lösbar* ist oder *nicht eindeutig lösbar* ist.
- (v) $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ hat weitere Lösungen außer $\vec{x} = \vec{0}$.

Beweis von Satz 13.29: Aus Satz 13.8 erhalten wir, dass Aussagen (ii) bis (v) äquivalent sind. Wir zeigen nun noch (i) \Leftrightarrow (iii).

- *Beweis von (iii) \Rightarrow (i):* Sind die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear unabhängig, so ist das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$ eindeutig lösbar und wir können die Matrix mit elementaren Zeilenumformungen in die reduzierte Stufenform bringen. Die Determinante der reduzierten Stufenform ist 1, und nach Satz 13.27 ist $\det(\mathbf{A})$ ein Vielfaches (mit Faktor $\neq 0$) der Determinante der Matrix in reduzierter Stufenform. Somit gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
- *Beweis von (i) \Rightarrow (iii):* Statt „ $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \implies$ Die Spalten von \mathbf{A} sind linear unabhängig.“ zeigen wir die äquivalente Aussage „Die Spalten von \mathbf{A} sind linear abhängig. $\implies \det(\mathbf{A}) = 0$ “. Seien also die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear abhängig. Dann können wir durch elementare Spaltenumformungen eine Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ erzeugen mit einer Spalte, die der Nullvektor ist. Nach Satz 13.27 (8) gilt dann $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$ und nach Satz 13.27 $\det(\mathbf{A}) = \mu \det(\tilde{\mathbf{A}}) = \mu \cdot 0 = 0$ mit einem $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \square

Der vorige Satz liefert viele wichtige Anwendungen. Betrachten einige dieser Anwendungen mit zugehörigen Beispielen.

Anwendung 13.31. (Bilden n Vektoren in \mathbb{R}^n eine Basis von \mathbb{R}^n ?)

Aufgabenstellung: Gegeben seien $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ in \mathbb{R}^n . Ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ eine Basis des \mathbb{R}^n ?

Lösungsansatz: Wir schreiben $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ als Spalten in eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} und berechnen die Determinante.

- Ist $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, so sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ nach Satz 13.29 linear unabhängig und bilden somit eine Basis von \mathbb{R}^n .
- Ist $\det(\mathbf{A}) = 0$, so sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ nach Folgerung 13.30 linear abhängig und bilden somit keine Basis von \mathbb{R}^n .

Beispiel 13.32. (Sind 3 gegebene Vektoren in \mathbb{R}^3 eine Basis von \mathbb{R}^3 ?)

Ist $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right)$ eine Basis von \mathbb{R}^3 ?

Aus Beispiel 13.26 (a) wissen wir, dass gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 0$.

Also sind die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ nach Folgerung 13.30 linear abhängig,

und somit ist $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right)$ keine Basis von \mathbb{R}^3 .

Anwendung 13.33. (Ist eine Matrix invertierbar?)

Aufgabenstellung: Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist \mathbf{A} invertierbar?

Lösungsansatz: Wir berechnen $\det(\mathbf{A})$.

- Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, so ist \mathbf{A} nach Satz 13.29 invertierbar.
- Gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$, so ist \mathbf{A} nach Folgerung 13.30 nicht invertierbar.

Beispiel 13.34. (Ist eine Matrix invertierbar?)

Ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ invertierbar?

Aus Beispiel 13.26 (a) wissen wir, dass gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 0$.

Somit ist die Matrix \mathbf{A} nach Folgerung 13.30 nicht invertierbar.

Wir lernen noch zwei neue Sätze kennen, die Anwendungen der Determinante sind. Diese werden in der Vorlesung nicht besprochen und sind auch nicht klausurrelevant. Falls Sie diese beherrschen, dürfen Sie diese aber natürlich auch in der Klausur anwenden.

Satz 13.35. (Formel zur Berechnung der inversen Matrix)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, d.h. \mathbf{A} ist invertierbar. Sei $\mathbf{C} = [c_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

gegeben durch

$$c_{i,k} := (-1)^{i+k} \cdot \det(\mathbf{A}_{\widehat{i,k}}).$$

Dann gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{C}^T.$$

Für den Spezialfall $n = 2$ erhalten wir die folgende Formel:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (13.12)$$

Betrachten wir zwei Beispiele

Beispiel 13.36. (Berechnung der Inversen mit Satz 13.35)

(a) Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0,$$

und somit ist \mathbf{A} invertierbar. Mit (13.12) finden wir die Inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 - 1 - 4 + 8 + 0 - 2 = 1 \neq 0,$$

und somit ist \mathbf{B} invertierbar. Mit Satz 13.35 finden wir die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,1}}) & -\det(\mathbf{A}_{\widehat{1,2}}) & \det(\mathbf{A}_{\widehat{1,3}}) \\ -\det(\mathbf{A}_{\widehat{2,1}}) & \det(\mathbf{A}_{\widehat{2,2}}) & -\det(\mathbf{A}_{\widehat{2,3}}) \\ \det(\mathbf{A}_{\widehat{3,1}}) & -\det(\mathbf{A}_{\widehat{3,2}}) & \det(\mathbf{A}_{\widehat{3,3}}) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

wobei wir die $\det(\mathbf{A}_{i,\widehat{k}})$ mit der folgenden Nebenrechnung bestimmt haben:

$$\det(\mathbf{A}_{1,1}) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 4 + 1 = 5,$$

$$\det(\mathbf{A}_{1,2}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 + 1 = 3,$$

$$\det(\mathbf{A}_{1,3}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 - 2 = -1,$$

$$\det(\mathbf{A}_{2,1}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 + 4 = 6,$$

$$\det(\mathbf{A}_{2,2}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 + 4 = 4,$$

$$\det(\mathbf{A}_{2,3}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 - 1 = -1,$$

$$\det(\mathbf{A}_{3,1}) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) = -1 + 8 = 7,$$

$$\det(\mathbf{A}_{3,2}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = 0 + 4 = 4,$$

$$\det(\mathbf{A}_{3,3}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 - 1 = -1.$$

Als Letztes lernen wir die **Cramersche Regel** kennen.

Satz 13.37. (Cramersche Regel)

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ eindeutig lösbar. Die Lösung $\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ lässt

sich wie folgt berechnen: Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ die Spaltenvektoren von \mathbf{A} , so gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det([\vec{b} \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \cdots \ \vec{a}_n])}{\det(\mathbf{A})}, \\ x_2 &= \frac{\det([\vec{a}_1 \ \vec{b} \ \vec{a}_3 \ \cdots \ \vec{a}_n])}{\det(\mathbf{A})}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{\det([\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_{n-1} \ \vec{b}])}{\det(\mathbf{A})}. \end{aligned}$$

Beispiel 13.38. (Lösen eines LGS mit der Cramerschen Regel)

(a) Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{bmatrix} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}=[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=\vec{b}}$$

finden wir

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -6 + 1 = -5 \neq 0,$$

d.h. die Cramersche Regel für $n = 2$ kann angewendet werden. Mit der Cramerschen Regel für $n = 2$ finden wir

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det([\vec{b} \ \vec{a}_2])}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{-5} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{-5} (2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1)) = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{\det([\vec{a}_1 \ \vec{b}])}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{-5} \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{-5} (3 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

Also ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

(b) Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -2 \\ & x_2 + 3x_3 & = & 4 \end{bmatrix} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A} = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{= \vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{= \vec{b}}$$

gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\quad - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Also sind die Voraussetzungen für die Cramersche Regel für $n = 3$ erfüllt. Nach der Cramerschen Regel für $n = 3$ gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det([\vec{b} \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3])}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{2} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (12 - 4 + 0 - 0 - 2 - 6) = \frac{0}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\det([\vec{a}_1 \ \vec{b} \ \vec{a}_3])}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{2} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-6 + 0 + 0 - 0 - 4 + 6) = \frac{-4}{2} = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{\det([\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{b}])}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{2} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (8 + 0 - 2 - 0 + 2 - 4) = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Wir finden also die eindeutige Lösung

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

13.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Teilkapitel lernen wir die neuen Begriffe des Eigenwertes und Eigenvektors einer quadratischen Matrix kennen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall von symmetrischen Matrizen.

Definition 13.39. (symmetrische Matrix)

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ gilt.

Also: Eine Matrix ist symmetrisch, wenn sie quadratisch ist und bei Spiegelung an der Diagonalen (von links oben nach rechts unten) wieder sich selbst ergibt.

Betrachten wir einige Beispiele für symmetrische Matrizen.

Beispiel 13.40. (symmetrische Matrix)

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ist symmetrisch, da $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ist nicht symmetrisch, da $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{B}$.

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ ist symmetrisch, da $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$.

(d) Jede Diagonalmatrix ist symmetrisch.

Nun können wir reelle Eigenwerte und reelle Eigenvektoren definieren.

Definition 13.41. (Eigenwert und Eigenvektor)

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt ein (*reeller*) **Eigenwert (EW)** von \mathbf{A} , falls $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ existiert mit

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \lambda \vec{\mathbf{x}}. \quad (13.13)$$

Ein Vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$, der (13.13) erfüllt, heißt ein **Eigenvektor (EV)** zum Eigenwert λ .

Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 13.42. (Eigenwert und Eigenvektor)

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ist symmetrisch. Sie hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -4$, denn

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Also ist $\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$, und $\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist ein

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -4$.

Auch $7\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$, denn

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir sehen, dass weiter auch $\vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ ist,

denn

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ein weiterer Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$ ist

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\vec{\mathbf{x}}_1 + 5\vec{\mathbf{x}}_3,$$

denn

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Am vorigen Beispiel sehen wir, dass eine Matrix mehr als einen Eigenwert haben kann, und dass zu einem Eigenwert mehrere Eigenvektoren existieren können. Für $\lambda_1 = 3$ haben wir sogar zwei linear unabhängige Eigenvektoren \vec{x}_1 und \vec{x}_3 gefunden. Aufgrund unseres Beispiels vermuten wir:

- Vielfache $\alpha \vec{x}$ mit $\alpha \neq 0$ von einem Eigenvektor \vec{x} zu einem Eigenwert λ sind ebenfalls Eigenvektoren zu demselben Eigenwert λ . In der Tat gilt

$$\mathbf{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha (\mathbf{A} \vec{x}) = \alpha (\lambda \vec{x}) = \lambda (\alpha \vec{x}).$$

- Nicht-triviale Linearkombinationen $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \neq \vec{0}$ von Eigenvektoren \vec{x} und \vec{y} zu demselben Eigenwert λ liefern wieder einen Eigenvektor zu diesem Eigenwert. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \mathbf{A} \alpha \vec{x} + \mathbf{A} \beta \vec{y} = \alpha \mathbf{A} \vec{x} + \beta \mathbf{A} \vec{y} \\ &= \alpha \lambda \vec{x} + \beta \lambda \vec{y} = \lambda (\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}). \end{aligned}$$

Unsere Untersuchungen im Rahmen des vorigen Beispiels führen uns zu dem Begriff des Eigenraums eines Eigenwertes.

Definition 13.43. (Eigenraum eines Eigenwertes)

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von \mathbf{A} . Die Menge

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x} \}$$

heißt der **Eigenraum** zum Eigenwert λ . $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$ enthält alle Eigenvektoren zu λ und den Nullvektor $\vec{0}$. Wegen

$$\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x} \iff \mathbf{A} \vec{x} - \lambda \mathbf{E}_n \vec{x} = \vec{0} \iff (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}$$

ist $E_{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathbb{L}_{[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n | \vec{0}]}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}$ und somit ein **Untervektorraum** von \mathbb{R}^n .

Wir kennen nun zwar Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume aber noch wissen wir nicht, wie man diese berechnet. Dieses wollen wir jetzt untersuchen:

Ist λ ein Eigenwert einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so hat die Gleichung $\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wir schreiben diese Gleichung wie folgt um:

$$\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad \iff \quad \mathbf{A} \vec{x} - \lambda \mathbf{E}_n \vec{x} = \vec{0} \quad \iff \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}$$

Die Gleichung $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}$ hat immer die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Sie hat **genau dann weitere Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$, wenn $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$** ist. Also gilt:

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert der symmetrischen Matrix } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \iff \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0.$$

Wir halten diese Erkenntnis zusammen mit weiteren Informationen als Satz fest.

Satz 13.44. (Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenvektoren)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Die Eigenwerte λ von \mathbf{A} sind genau die Lösungen der **charakteristischen Gleichung**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0. \quad (13.14)$$

$p_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n)$ ist eine reelle Polynomfunktion n -ten Grades, und man nennt $p_{\mathbf{A}}$ das **charakteristische Polynom** von \mathbf{A} .

- (1) Das charakteristische Polynom $p_{\mathbf{A}}$ hat **genau n (nicht notwendigerweise verschiedene) reelle Nullstellen**.
- (2) Eigenvektoren zu **verschiedenen** Eigenwerten sind **orthogonal** und damit linear unabhängig.
- (3) Hat ein Eigenwert λ von \mathbf{A} die **Vielfachheit** k (d.h. er tritt unter den n nicht notwendigerweise verschiedenen Nullstellen von $p_{\mathbf{A}}$ genau k -mal auf), so ist die **Dimension des Eigenraumes** $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$ **gleich k** .
- (4) \mathbb{R}^n besitzt eine **Basis** (genauer eine Orthonormalbasis) **aus Eigenvektoren** von \mathbf{A} .

Es ist nicht selbstverständlich, dass das charakteristische Polynom $p_{\mathbf{A}}$ genau n nicht notwendigerweise verschiedene **reelle** Nullstellen hat. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 3.20) wissen wir nur, dass $p_{\mathbf{A}}$ genau n nicht notwendigerweise verschiedene **komplexe** Nullstellen hat. Dass diese n komplexen Nullstellen alle reell sind, liegt an der Symmetrie der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Wir halten nun fest, wie wir die Eigenwerte, zugehörigen Eigenvektoren und Eigenräume einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ praktisch berechnen.

Methode 13.45. (Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume)

Zur Bestimmung der Eigenwerte, der zugehörigen Eigenvektoren und der Eigenräume einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gehen wir wie folgt vor:

(1) Da alle Eigenwerte Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0.$$

sind, bestimmen wir die Lösungen dieser Gleichung. Dieses liefert uns n nicht notwendigerweise verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(2) Für jeden Eigenwert λ_i bestimmen wir anschließend alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}, \quad (13.15)$$

denn $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0} \iff \mathbf{A} \vec{x} = \lambda_i \vec{x}$. Die Menge der Lösungen von (13.15) bildet den Eigenraum $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$, und alle nicht-trivialen Lösungen von (13.15) sind Eigenvektoren von \mathbf{A} zum Eigenwert λ_i .

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 13.46. (Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume)

(a) Berechnen wir die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der symmetrischen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 13.42 nun systematisch.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) &= \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (3 - \lambda)(-4 - \lambda)(3 - \lambda) = (3 - \lambda)^2(-4 - \lambda), \end{aligned}$$

und wir lesen die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ (mit der Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = -4$ ab.

Für $\lambda_1 = 3$ finden wir

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) \vec{x} = \vec{0} &\iff \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \vec{x} = \vec{0} \\
 &\iff \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & -4-3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0},
 \end{aligned}$$

und wir haben nur eine nicht-triviale Gleichung $-7x_2 = 0$, also $x_2 = 0$. Wir setzen $x_1 = \alpha$ und $x_3 = \beta$ und erhalten somit den Eigenraum von $\lambda_1 = 3$, also

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbf{A}}(3) &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Für $\lambda_2 = -4$ finden wir

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - (-4)\mathbf{E}_3) \vec{x} = \vec{0} &\iff \begin{bmatrix} 3 - (-4) & 0 & 0 \\ 0 & -4 - (-4) & 0 \\ 0 & 0 & 3 - (-4) \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \\
 &\iff \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 7 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\downarrow]{\begin{array}{l} Z_1 \rightarrow \frac{1}{7} Z_1 \\ Z_3 \rightarrow \frac{1}{7} Z_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

und es gilt $x_1 = x_3 = 0$. Somit ist der Eigenraum von $\lambda_2 = -4$

$$E_{\mathbf{A}}(-4) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Eine Orthonormalbasis (d.h. eine Basis aus normierten und paarweise orthogonalen Vektoren) aus Eigenvektoren ist hier die Standardbasis von \mathbb{R}^n

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(b) Gesucht sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der symmetrischen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (2 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) + 0 + 0 - 0 - (2 - \lambda) - (2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)^2(1 - \lambda) - 2(2 - \lambda) = (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 2] \\ &= (2 - \lambda)[\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2] = (2 - \lambda)\lambda(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$.

Wir berechnen nun die zugehörigen Eigenräume:

Für $\lambda_1 = 0$ finden wir

$$(\mathbf{A} - 0 \mathbf{E}_3) \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 2 - 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 - 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 - 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} Z_2 \rightarrow Z_2 - \frac{1}{2} Z_1 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} & Z_3 \rightarrow Z_3 - 2 Z_2 \\ \iff \downarrow & & \iff \downarrow \\ & & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Z_2 \rightarrow 2 Z_2 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} & Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2 \\ \iff \downarrow & & \iff \downarrow \\ & & \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Z_1 \rightarrow \frac{1}{2} Z_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} & \implies \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \text{ beliebig.} \end{cases} \\ \iff \downarrow & & \end{array}$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$

$$E_{\mathbf{A}}(0) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Für $\lambda_2 = 2$ finden wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) \vec{x} = \vec{0} &\iff \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \\ &\iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_1} \\ \xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1} \\ \iff \end{array} \\ &\iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \\ \iff \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ beliebig.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

$$E_{\mathbf{A}}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Für $\lambda_3 = 3$ finden wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) \vec{x} = \vec{0} &\iff \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 0 & 1 & 2-3 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \\ &\iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1} \\ \iff \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2} \\ \iff \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_1 \rightarrow -Z_1} \\ \xrightarrow{Z_2 \rightarrow -Z_2} \\ \iff \end{array} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_2} \\ \iff \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \text{ beliebig.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$

$$E_{\mathbf{A}}(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Indem man die Eigenvektoren, als deren lineare Hülle die eindimensionalen Eigenräume dargestellt sind, noch normiert erhält man eine Orthonormalbasis (d.h. eine Basis aus normierten und paarweise orthogonalen Vektoren) aus Eigenvektoren von \mathbb{R}^3 :

$$B = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right)$$

(c) Gesucht sind die Eigenwerte und die Eigenräume der symmetrischen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^2 (1 - \lambda) - (1 - \lambda) = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(1 - \lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1), \end{aligned}$$

d.h. wir finden die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ (mit der Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = -1$.

Wir berechnen die zugehörigen Eigenräume:

Für $\lambda_1 = 1$ finden wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 1 \mathbf{E}_3) \vec{x} &= \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 0 - 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 - 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 - 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \\ \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} &= \vec{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_1 \\ Z_1 \rightarrow -Z_1 \\ \downarrow \\ \iff \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \implies \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 \text{ beliebig,} \\ x_3 \text{ beliebig.} \end{cases}$$

Also ist der Eigenraum von $\lambda_1 = 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(1) &= \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Basis des Eigenraums gerade so gewählt haben, dass die beiden Vektoren orthogonal und normiert sind.

Für $\lambda_2 = -1$ finden wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - (-1)\mathbf{E}_3)\vec{x} &= \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 0+1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ -1 & 0 & 0+1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \\ \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} &\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1 \\ \iff \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Z_2 \rightarrow \frac{1}{2} Z_2 \\ \iff \end{array} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 \text{ beliebig.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Eigenraum von $\lambda_2 = -1$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(-1) &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{LH} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{LH} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

wobei wir die Basis des Eigenraums gerade so gewählt haben, dass der einzige Basisvektor normiert ist.

$$B = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)$$

ist eine Orthonormalbasis (d.h. eine Basis aus normierten und paarweise orthogonalen Vektoren) von \mathbb{R}^3 , die aus Eigenvektoren von \mathbf{A} besteht.

Zuletzt beweisen wir noch Aussagen (1) und (2) aus Satz 13.44.

Beweis von Satz 13.44 (1) und (2): In diesem Beweis benötigen wir Vektoren mit komplexen Einträgen: Sei

$$\mathbb{C}^n := \left\{ \vec{\mathbf{z}} := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} : z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Für \mathbb{C}^n ist (ebenso wie für Vektoren in \mathbb{R}^n) eine komponentenweise Addition

$$\vec{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}^n,$$

und eine skalare Multiplikation mit komplexen Zahlen erklärt

$$\mu \vec{\mathbf{z}} = \mu \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mu z_1 \\ \mu z_2 \\ \vdots \\ \mu z_n \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^n, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\langle \vec{\mathbf{x}} | \vec{\mathbf{y}} \rangle := \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n.$$

(Gegenüber dem Skalarprodukt von \mathbb{R}^n haben wir noch die komplexe Konjugation in der ersten Komponente.) Die Länge von $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ ist durch

$$|\vec{\mathbf{x}}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i} = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{x}} | \vec{\mathbf{x}} \rangle}$$

definiert.

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, dann gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$

$$\langle \mathbf{A} \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \mathbf{A} \vec{y} \rangle, \quad (13.16)$$

denn: Das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ können wir mit der Matrizenmultiplikation auch schreiben als

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{\bar{x}}^T \cdot \vec{y}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \vec{x} | \vec{y} \rangle &= (\overline{\mathbf{A} \vec{x}})^T \cdot \vec{y} = (\overline{\mathbf{A}} \vec{\bar{x}})^T \cdot \vec{y} = \vec{\bar{x}}^T \cdot \overline{\mathbf{A}}^T \cdot \vec{y} \\ &= \vec{\bar{x}}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{y}) = \langle \vec{x} | \mathbf{A} \vec{y} \rangle, \end{aligned}$$

wobei wir im vierten Schritt $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ (weil \mathbf{A} nur reelle Einträge hat) und damit $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (weil $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist) genutzt haben.

- (1) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 3.20) hat $p_{\mathbf{A}}$ genau n nicht notwendigerweise verschiedene komplexe Nullstellen. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine ein solche Nullstelle. Weil für diese $p_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$ ist, hat das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}$$

eine nichttriviale Lösung in \mathbb{C}^n . Umstellen liefert, dass es diese nichttriviale Lösung $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ die Gleichung $\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ erfüllt. Wegen (13.16) gilt

$$\langle \mathbf{A} \vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | \mathbf{A} \vec{x} \rangle. \quad (13.17)$$

Wegen $\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \vec{x} | \vec{x} \rangle &= \langle \lambda \vec{x} | \vec{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \bar{\lambda} |\vec{x}|^2, \\ \langle \vec{x} | \mathbf{A} \vec{x} \rangle &= \langle \vec{x} | \lambda \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \lambda |\vec{x}|^2. \end{aligned}$$

Einsetzen in (13.17) liefert

$$\bar{\lambda} |\vec{x}|^2 = \lambda |\vec{x}|^2.$$

Da $\vec{x} \neq \vec{0}$ und damit $|\vec{x}| \neq 0$ ist, folgt $\lambda = \bar{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. Weil $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, folgt dass der Lösungsraum in \mathbb{R}^n von

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \vec{x} = \vec{0}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n mit Dimension ≥ 1 ist. Also gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$, d.h. λ ist ein (reeller) Eigenwert von \mathbf{A} . (Wir nutzen hier, dass das $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n$ wegen $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine reelle Matrix ist.)

- (2) Die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ habe (mindestens) zwei verschiedene (reelle) Eigenwerte λ, μ mit $\lambda \neq \mu$. Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein Eigenvektor zu λ , und sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein Eigenvektor zu μ . Dann gilt nach (13.16)

$$\langle \mathbf{A} \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \mathbf{A} \vec{y} \rangle, \quad (13.18)$$

und wir finden

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \vec{x} | \vec{y} \rangle &= \langle \lambda \vec{x} | \vec{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle, \\ \langle \vec{x} | \mathbf{A} \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x} | \mu \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Einsetzen in (13.18) liefert

$$\lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \quad \iff \quad (\lambda - \mu) \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0.$$

Da $\lambda \neq \mu$ gilt, folgt $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, d.h. \vec{x} und \vec{y} sind orthogonal. \square

Teil V

Anhänge

Anwendungsbeispiele aus Chemie und Physik

In diesem Anhang sind verschiedene Beispiele zum Einsatz der in dieser Vorlesung besprochenen mathematischen Methoden der Chemie zusammengestellt. Die Anwendungsbeispiele wurden aus dem Skript „Mathematik für Chemiker“ von Dieter Bothe, Hermann Hembd und Norbert Köckler übernommen. Selbstverständlich sind die hier vorgestellten Anwendungen von Mathematik innerhalb der Chemie nur eine kleine Auswahl zur Motivation.

A.1 Gleitkommadarstellung bei chemischen Berechnungen

Chemische Anwendung A.1. (Anzahl Sauerstoffatome in Luftvolumen)

Wie viele Sauerstoffatome sind in 10 m^3 Luft bei Normalbedingungen (also 0°C und $10132,5\text{ Pa}$) enthalten?

Informationen zur Lösung: Um diese Frage zu beantworten brauchen wir folgende weiteren physikalischen Daten:

- Luft enthält 20,8 Volumenprozent Sauerstoff, d.h. 20,8% eines Luftvolumens sind Sauerstoff.
- 1 mol Gasteilchen beanspruchen bei Normalbedingungen ein Volumen von 22,41 (Molvolumen; A. Avogadro (1776-1856)).

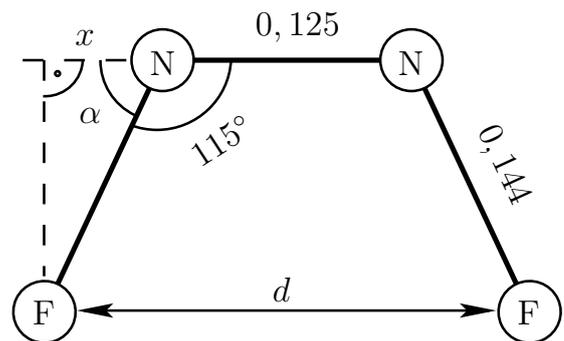
Bei beiden Isomeren beträgt der N-N-Abstand 0,125 nm, der N-F-Abstand 0,144 nm, und die F-N-N-Winkel betragen 115° . Welchen Abstand haben die Fluoratome?

Im Cis-Isomer gilt (siehe Skizze weiter unten):

$$d = 2x + 0,125, \quad \alpha = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ, \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{0,144}.$$

Daraus folgt durch Auflösen der letzten Gleichung nach x und anschließendes Auflösen der ersten Gleichung nach d :

$$\begin{aligned} x &= 0,144 \text{ nm} \cdot \cos(\alpha) \\ &= 0,144 \text{ nm} \cdot \cos(65^\circ), \\ d &= 0,125 \text{ nm} + 2x \\ &= 0,125 \text{ nm} + 2 \cdot 0,144 \text{ nm} \cdot \cos(65^\circ) \\ &\approx 0,247 \text{ nm}. \end{aligned}$$



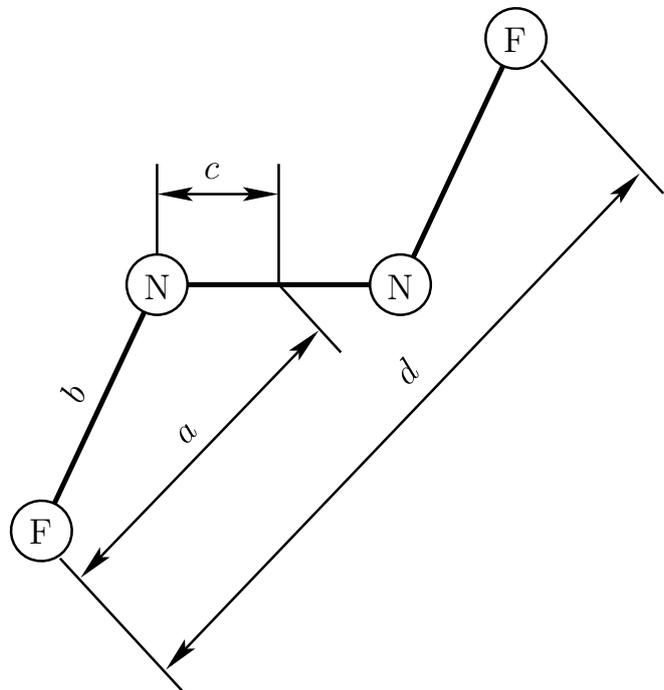
Also haben die Fluoratome im Cis-Isomer einen Abstand von $d \approx 0,247$ nm.

Im Trans-Isomer gilt (siehe Skizze):

$$b = 0,144, \quad c = \frac{0,125}{2}, \quad d = 2a.$$

Nach dem Cosinussatz gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(115^\circ) \\ \Rightarrow a^2 &\approx 0,0322 \text{ nm}^2 \\ \Rightarrow a &\approx 0,180 \text{ nm} \\ \Rightarrow d &\approx 2a = 0,360 \text{ nm}. \end{aligned}$$



Also beträgt der Abstand der Fluoratome im Trans-Isomer $d \approx 0,360$ nm.

Chemische Anwendung A.3. (Berechnung des Tetraederwinkels)

Gewisse Kristalle bzw. Moleküle, etwa Methan (CH_4) aber auch Wasser (verzerrter Tetraederwinkel $104,5^\circ$), haben räumlich eine Tetraeder-Struktur, wobei die Atome in den Ecken und im Zentrum des Tetraeders angeordnet sind (gekennzeichnet durch die Punkte in der Skizze des Tetraeders). Wir wollen den Winkel ϕ berechnen (siehe Skizze).

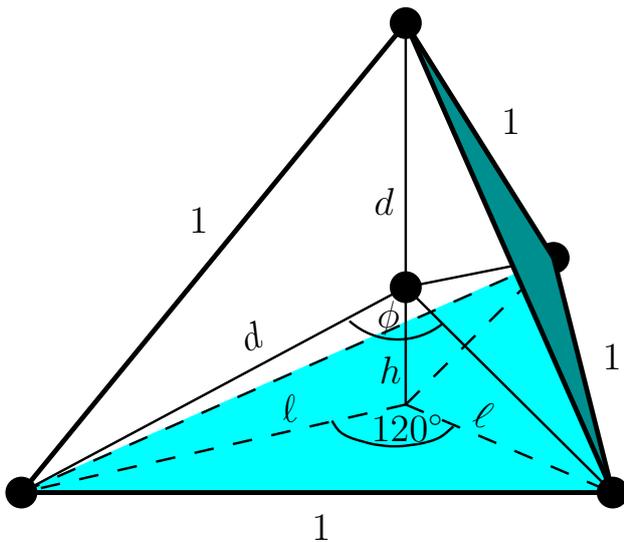
Die Gesamthöhe des Tetraeders ist $H = d + h$ (siehe Skizze).

Der Winkel ϕ lässt sich aus d mit dem Cosinussatz berechnen:

$$1 = 2d^2 - 2d^2 \cos(\phi). \quad (\text{A.1})$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $d^2 = \ell^2 + h^2$.

Wir eliminieren nun h mit Hilfe von $H = d + h$:



$$\begin{aligned} d^2 - h^2 &= \ell^2 \\ \implies (d - h)(d + h) &= \ell^2 \\ \implies (d - h)H &= \ell^2 \\ \implies d - h &= \frac{\ell^2}{H} \\ \implies 2d - (d + h) &= \frac{\ell^2}{H} \\ \implies 2d - H &= \frac{\ell^2}{H} \\ \implies d &= \frac{1}{2} \left(H + \frac{\ell^2}{H} \right). \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun ℓ mit dem Cosinussatz:

$$1 = 2\ell^2 - 2\ell^2 \cos(120^\circ).$$

Mit $\cos(120^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$1 = 2\ell - 2\ell \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 3\ell \quad \implies \quad \ell^2 = \frac{1}{3}.$$

Nun berechnen wir H : Mit $\ell^2 = \frac{1}{3}$ folgt

$$\ell^2 + H^2 = 1 \quad \implies \quad H^2 = 1 - \ell^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \implies \quad H = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Damit erhalten wir mittels (A.2), $\ell^2 + H^2 = 1$ und $H = \sqrt{2/3}$

$$d = \frac{1}{2} \left(H + \frac{\ell^2}{H} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2 + \ell^2}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2/3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Nun berechnen wir

$$2d^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4},$$

formen (A.1) wie folgt um und setzen anschließend $2d^2 = 3/4$ ein

$$1 = 2d^2 - 2d^2 \cos(\phi) = 2d^2 [1 - \cos(\phi)] \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos(\phi) = \frac{1}{2d^2} = \frac{4}{3}.$$

Damit folgt für den Tetraederwinkel

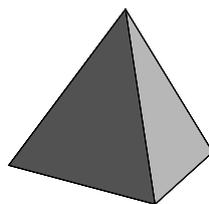
$$\cos(\phi) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \phi \approx 109,5^\circ.$$

Auch sonst spielen das Tetraeder und andere „regelmäßige Vielecke“ in der Chemie eine Rolle.

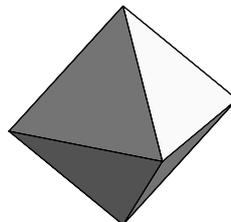
Chemische Anwendung A.4. (Platonische Körper als Modelle)

Das Tetraeder ist der einfachste Körper, dessen Oberfläche durch gleich große regelmäßige n -Ecke (hier $n = 3$ für die Dreiecke beim Tetraeder) begrenzt wird. Solche Körper heißen **reguläre Polyeder**. Es gibt genau fünf verschiedene **reguläre Polyeder**, die sogenannten **Platonischen Körper**:

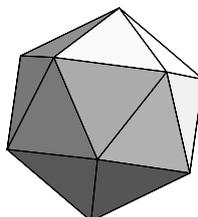
Tetraeder: 4 Dreiecke



Oktaeder: 8 Dreiecke



Ikosaeder: 20 Dreiecke



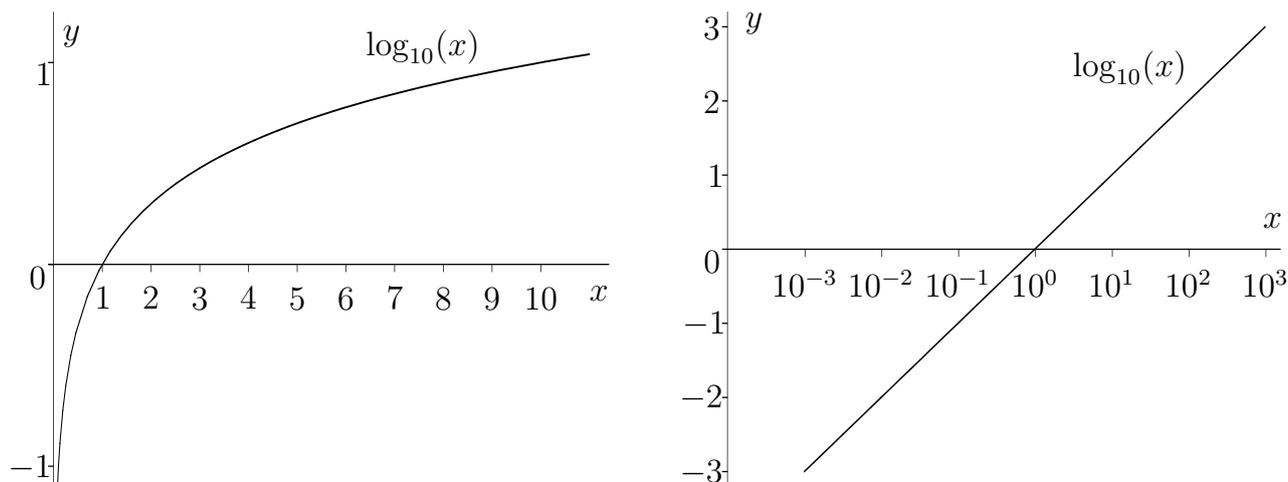
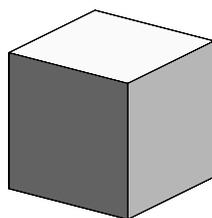
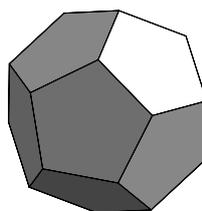


Abb. A.1: Der Zehner-Logarithmus $f(x) = \log_{10}(x)$ links im „normalen“ kartesischen Koordinatensystem und rechts im „halb-logarithmischen“ Koordinatensystem, bei dem auf der x -Achse als Skala die Zehnerpotenzen gewählt worden sind.

Würfel: 6 Quadrate



Dodekaeder: 12 Fünfecke



Diese regulären Polyeder spielen in der Chemie eine wichtige Rolle, da Kristalle und Moleküle möglichst regelmäßige Konfigurationen bilden.

A.3 Logarithmische Skala zur Linearisierung

Betrachten wir zunächst den Zehner-Logarithmus $f(x) = \log_{10}(x)$, der im linken Bild in Abbildung A.1 im üblichen kartesischen Koordinatensystem gezeichnet wurde.

Wählen wir dagegen für die x -Achse eine neue Skalierung, bei der die Zehnerpotenzen 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 in gleichem Abstand abgetragen wurden,

so finden wir wegen $\log_{10}(10^x) = x$ eine **Gerade**, die die x -Achse in $x = 1 = 10^0$ (wegen $\log_{10}(1) = 0$) schneidet (siehe das rechte Bild in Abbildung A.1). Wir bezeichnen solch ein Diagramm als „**halb-logarithmisch**“.

Nun betrachten wir noch ein chemisches Beispiel für eine „Linearisierung“ mit dem Logarithmus.

Chemische Anwendung A.5. (Arrhenius-Gleichung)

Die Arrhenius-Gleichung zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeitskonstante k sagt aus, dass die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante k wie folgt von der Temperatur abhängt:

$$k = k(T) = A \cdot e^{-E_A/(R \cdot T)}$$

mit A = Frequenzfaktor, E_A = Aktivierungsenergie in $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$, T = absolute thermodynamische Temperatur (in K) und der universellen Gaskonstante $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Um die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeitskonstante $k(T)$ von der absoluten Temperatur T leichter darstellen zu können, linearisieren wir, d.h. wir nehmen auf beiden Seiten der Gleichung den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(k(T)) = \ln\left(A \cdot e^{-E_A/(R \cdot T)}\right) = \ln(A) + \ln\left(e^{-E_A/(R \cdot T)}\right) = \ln(A) - \frac{E_A}{R \cdot T},$$

wobei wir die Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus angewendet haben.

A.4 Differentialgleichungen zur Modellierung chemischer Reaktionen

Wir beginnen mit einem Anwendungsbeispiel für Populationswachstum, in dem die Differentialgleichung aus physikalischen Überlegungen hergeleitet wird. Bei der Population (Bevölkerung) kann es sich dabei ebenso um eine große Anzahl Personen wie um Moleküle einer chemischen Substanz handeln.

Anwendung A.6. (Wachstum einer Population)

Eine Population (Bevölkerung) bestehe zur Zeit t aus $N(t)$ Individuen. Die Population habe eine konstante Geburtsrate und eine konstante Sterberate:

- β = Anzahl der Geburten pro Individuum und Zeiteinheit (Geburtenrate),
- δ = Anzahl der Todesfälle pro Individuum und Zeiteinheit (Sterberate).

Also finden wir für ein Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ der Länge Δt :

- die Anzahl der Geburten = $\beta \cdot N(t) \cdot \Delta t = \beta N(t) \Delta t$,
- die Anzahl der Todesfälle = $\delta \cdot N(t) \cdot \Delta t = \delta N(t) \Delta t$.

Damit folgt für die Anzahl $N(t + \Delta t)$ der Individuen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\begin{aligned}
 N(t + \Delta t) &= N(t) + \beta \cdot N(t) \cdot \Delta t - \delta \cdot N(t) \cdot \Delta t \\
 \iff N(t + \Delta t) - N(t) &= (\beta - \delta) \cdot N(t) \cdot \Delta t \\
 \iff \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= (\beta - \delta) N(t). \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

Der Differenzenquotient auf der linken Seite von (A.3) beschreibt eine Näherung für die **Wachstumsrate der Population pro Zeit**, also die **Änderung der Anzahl der Individuen in dem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ pro Zeit Δt** .

Die Gleichung (A.3) ist nur näherungsweise gültig, weil bei der Berechnung der Anzahl von Geburten bzw. Todesfällen im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ für die Anzahl N der Individuen der konstante Wert $N(t)$ zum (festen) Zeitpunkt t verwendet wurde. Tatsächlich wird N im Intervall $[t, t + \Delta t]$ variieren. Die Näherung wird umso genauer, je kleiner Δt ist. Wir lassen deshalb Δt gegen Null gehen, und aus dem Differenzenquotienten auf der linken Seite von (A.3) wird der Differentialquotient und wir erhalten die Ableitung von N :

$$N'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (\beta - \delta) N(t).$$

Dabei ist $N'(t)$ die **Wachstumsrate der Population (pro Zeit)**.

Anforderung: Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $N(t)$. Um den Grenzwertprozess $\Delta t \rightarrow 0$ durchführen zu können, muss die Funktion $N(t)$ differenzierbar, also insbesondere stetig sein.

Dies erscheint zunächst eine unrealistische Idealisierung zu sein, da die Anzahl der Individuen $N(t)$ nur diskrete Werte aus \mathbb{N}_0 annimmt und somit unstetig ist (außer im uninteressanten Fall $N(t) = \text{Konstante}$). Dennoch ist diese Idealisierung sinnvoll, wenn die Population aus sehr vielen Individuen besteht. In diesem Fall entspricht eine Änderung der Anzahl um Eins einer sehr kleinen relativen Änderung von $N(t)$. Betrachtet man z.B. die Population einer gewissen chemischen Spezies (Molekülsorte), so wird $N(t)$ typischerweise im Bereich 10^{20} bis 10^{24} liegen. Die geringe relative Änderung, wenn ein Molekül entsteht oder abreagiert, wird durch die molare Konzentration deutlich: diese ändert sich dann (in einem Liter) um etwa $1,6 \cdot 10^{-24}$ mol/L.

Fazit: Für große Populationen kann die Anzahl der Individuen mit kleinem (relativen) Fehler durch eine stetige Funktion $N(t)$ beschrieben werden.

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die **Anzahl der Individuen** $N(t)$ **in der Population auch nach der Zeit t differenzierbar ist**, ergibt sich also das folgende **mathematische Modell für die Wachstumsrate $N'(t)$ dieser Population**:

$$N'(t) = (\beta - \delta) N(t). \quad (\text{A.4})$$

Dabei sind β und δ die **Geburten- bzw. Sterberate**.

Lösung der Differentialgleichung (A.4): Aufgrund der Form der Differentialgleichung (A.4) vermuten wir, dass ihre Lösungen von der Form $c e^{\lambda t}$ (mit geeigneten Konstanten c und λ) sind, und man überzeugt sich durch Einsetzen und Nachrechnen leicht, dass

$$N(t) = c \cdot e^{(\beta - \delta)t} \quad (\text{A.5})$$

eine Lösung ist. In der Tat gilt

$$N'(t) = \frac{d}{dt} \left(c \cdot e^{(\beta - \delta)t} \right) = c (\beta - \delta) e^{(\beta - \delta)t} = (\beta - \delta) N(t).$$

Bei der Lösung (A.5) handelt es sich um die sogenannte **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (A.4); sie hängt noch von einer Konstanten c ab. Dieses ist nicht überraschend, denn um konkrete Zahlenwerte für $N(t)$ zu bekommen müssen wir einen **Anfangswert**, also die Anzahl der Population zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ vorgeben. Geben wir z.B. den Wert $N(0) = N_0$ vor (d.h. die Bevölkerung hat zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ genau N_0 Individuen), so finden wir aus der **Anfangsbedingung**

$$N_0 = N(0) = c \cdot \underbrace{e^{(\beta - \delta)0}}_{= 1} = c,$$

dass die Konstante der Wert $c = N_0$ hat. Also ist die Lösung des **Anfangswertproblems**

$$N'(t) = (\beta - \delta) N(t), \quad N(0) = N_0,$$

die Funktion

$$N(t) = N_0 \cdot e^{(\beta - \delta)t}.$$

In (A.4) in unserer Anwendung A.6 haben wir also

$$N'(t) = (\beta - \delta) N(t) \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{N'(t) - (\beta - \delta) N(t)}_{= F(t, N(t), N'(t))} = 0,$$

d.h. die Funktion F ist als $F(t, N, N') = N' - (\beta - \delta) N$ definiert.

Nun betrachten wir einige Anwendungen zur Modellierung chemischer Reaktionen.

Chemische Anwendung A.7. (DGLen der Reaktionskinetik)

Wir betrachten hier einige **typische Differentialgleichungen der Reaktionskinetik**. Zur Modellierung verwenden wir das **Massenwirkungsgesetz**:

Seien $c_A(t), c_B(t), c_C(t), c_P(t), \dots$ die Konzentrationen der an einer chemischen Reaktion beteiligten Substanzen A, B, C, P, \dots . Bei konstantem Druck, konstantem Volumen und konstanter Temperatur ist sind die **Reaktionsgeschwindigkeiten** $c'_A(t), c'_B(t), c'_C(t), c'_P(t), \dots$ (also die zeitlichen Änderungen der Konzentrationen der Substanzen) proportional zu der Wahrscheinlichkeit, dass die Moleküle der entsprechenden Reaktion aufeinandertreffen, also **proportional zu dem Produkt der Konzentrationen der beteiligten Substanzen**. Die Proportionalitätskonstante ist die **Reaktionsrate** $k > 0$.

- (a) **Chemische Reaktion 1. Ordnung:** $c'_A(t) = -k c_A(t)$ mit $k > 0$

Diese Differentialgleichung beschreibt z.B. den Konzentrationsverlauf bei einer Zerfallsreaktion $A \xrightarrow{k} B + C$ oder einer Isomerisierung $A \xrightarrow{k} B$. Wir haben in der Differentialgleichung die Proportionalitätskonstante $-k$, weil die Konzentration $c_A(t)$ der Substanz A bei chemischen Reaktionen $A \xrightarrow{k} B + C$ bzw. $A \xrightarrow{k} B$ zeitlich abnimmt.

- (b) **Chemische Reaktion 2. Ordnung:** $c'_A(t) = -k (c_A(t))^2$ mit $k > 0$

Diese Differentialgleichung tritt z.B. bei elementaren (also nicht aus weiteren Einzelreaktionen zusammengesetzten) Reaktionen der Form $2A \xrightarrow{k_1} B + C$ auf. In diesem Fall ist $k = 2k_1$, da in jedem Reaktionsschritt 2 Moleküle A abrea-gieren (und sich damit die Reaktionsrate verdoppelt). Wir im ersten Beispiel haben wir die Proportionalitätskonstante $-k = -2k_1$, weil die Konzentration $c_A(t)$ der Substanz A abnimmt. Auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung taucht $(c_A(t))^2$ auf, weil wir in der Reaktion zwei Moleküle der Substanz A brauchen: Nach dem Massenwirkungsgesetz müssen wir daher auf der rechten Seite das Produkt der Konzentration von A mit sich selbst, also $(c_A(t))^2$, verwenden.

- (c) **Reaktion mit mehreren chemischen Substanzen:** Oft hängt die Änderungsrate einer Konzentration auch von den Konzentrationen anderer beteiligter Spezies ab, so dass mehrere gekoppelte Differentialgleichungen auftreten. Beispielsweise ergibt sich für die Elementarreaktion $A + B \xrightarrow{k} P$ nach dem Massenwirkungsgesetz das **(nichtlineare) Differentialgleichungssystem**:

$$\begin{aligned}c'_A(t) &= -k c_A(t) c_B(t), \\c'_B(t) &= -k c_A(t) c_B(t), \\c'_P(t) &= k c_A(t) c_B(t).\end{aligned}$$

- (d) **Folgereaktion:** Für eine Folgereaktion $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} P$ erhält man das **System von Differentialgleichungen**

$$\begin{aligned}c'_A(t) &= -k_1 c_A(t), \\c'_B(t) &= k_1 c_A(t) - k_2 c_B(t), \\c'_P(t) &= k_2 c_B(t).\end{aligned}$$

Dies ist ein sogenanntes **lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung**. Wir können das obige Differentialgleichungssystem lösen, indem wir nacheinander erst durch Lösen der ersten Gleichung $c_A(t)$ berechnen, und dann nach Einsetzen von $c_A(t)$ in die zweite Gleichung die zweite Gleichung lösen, um $c_B(t)$ zu berechnen. Nachdem wir $c_B(t)$ in die letzte Gleichung eingesetzt haben, können wir durch Integrieren $c_P(t)$ berechnen.

Chemische Anwendung A.8. (Reaktionsgleichungen: DGL-System mit getrennten Variablen)

Betrachten wir die Elementarreaktion $A + B \rightarrow P$, für welche wir bereits in Anwendung A.7 (c) das System von Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt hatten. Für Anwendungen typische Anfangswerte sind $c_A(0) = a$, $c_B(0) = b$ und $c_P(0) = 0$, d.h. zu Beginn der Reaktion liegt noch keine Substanz P vor, weil A und B noch nicht miteinander reagiert haben. Damit eine Reaktion stattfindet muss $a, b > 0$ gelten. Gesucht ist die Produktkonzentration $c_P(t)$ für jedem Zeitpunkt $t > 0$.

Das gesamte Differentialgleichungssystem mit diesen Anfangswerten lautet also (vgl. Anwendung A.7 (c))

$$c'_A(t) = -k c_A(t) c_B(t), \quad c_A(0) = a, \quad (\text{A.6})$$

$$c'_B(t) = -k c_A(t) c_B(t), \quad c_B(0) = b, \quad (\text{A.7})$$

$$c'_P(t) = k c_A(t) c_B(t), \quad c_P(0) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Direkt lässt sich das volle System nicht lösen. **Andererseits wäre es ausreichend, die letzte Gleichung zu lösen.** Dies ist getrennt nur dann möglich, wenn man $c_A(t)$ und $c_B(t)$ durch $c_P(t)$ ausdrücken kann. Hier hilft uns die Anschauung: **Wenn (zur Zeit $t \geq 0$) N Moleküle P entstanden sind, so sind dafür jeweils N Moleküle von A und jeweils N Moleküle von B verbraucht worden.** Für die Konzentrationen $c_A(t)$ und $c_B(t)$ sollte also gelten:

$$c_A(t) = a - c_P(t), \quad c_B(t) = b - c_P(t) \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\iff c_A(t) + c_P(t) = a, \quad c_B(t) + c_P(t) = b \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

Dass diese Vermutung richtig ist, sieht man wie folgt:

$$(c_A(t) + c_P(t))' = c'_A(t) + c'_P(t) = -k c_A(t) c_B(t) + k c_A(t) c_B(t) = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$(c_B(t) + c_P(t))' = c_B'(t) + c_P'(t) = -k c_A(t) c_B(t) + k c_A(t) c_B(t) = 0, \quad (\text{A.12})$$

wobei wir im zweiten Schritt die Differentialgleichungen (A.6) und (A.8) bzw. (A.7) und (A.8) eingesetzt haben. Aus (A.11) bzw. (A.12) folgt, dass die Funktion $c_A(t) + c_P(t)$ bzw. $c_B(t) + c_P(t)$ jeweils konstant ist, also $c_A(t) + c_P(t) = d_1$ und $c_B(t) + c_P(t) = d_2$ mit Konstanten $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Da aber auch für $t = 0$ die Gleichungen $c_A(t) + c_P(t) = d_1$ und $c_B(t) + c_P(t) = d_2$ gelten müssen, folgt aus den Anfangswerten

$$d_1 = \underbrace{c_A(0)}_{=a} + \underbrace{c_P(0)}_{=0} = a \quad \text{und} \quad d_2 = \underbrace{c_B(0)}_{=b} + \underbrace{c_P(0)}_{=0} = b.$$

Also gilt $d_1 = a$ und $d_2 = b$, und wir haben bewiesen, dass (A.10) und damit (A.9) gilt.

Durch Einsetzen von (A.9) in die dritte Differentialgleichung (A.6) folgt

$$c_P'(t) = k (a - c_P(t)) (b - c_P(t)).$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir teilen auf beiden Seiten durch $(a - c_P(t)) (b - c_P(t))$ und erhalten

$$\frac{c_P'(t)}{(a - c_P(t)) (b - c_P(t))} = k$$

und integrieren anschließend über t von $t = 0$ bis $t = s$

$$\int_0^{c_P(s)} \frac{dc_P}{(a - c_P)(b - c_P)} = \int_0^s \frac{c_P'(t)}{(a - c_P(t)) (b - c_P(t))} dt = \int_0^s k dt = k s, \quad (\text{A.13})$$

wobei wir $c_P(0) = 0$ für die untere Grenze im linken Integral verwendet haben.

Um die linke Seite zu integrieren müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $a = b$ und $a \neq b$.

Betrachten wir zuerst den **einfacheren Fall** $a = b$. Dann gilt

$$\int_0^{c_P(s)} \frac{dc_P}{(a - c_P)(b - c_P)} = \int_0^{c_P(s)} \frac{dc_P}{(a - c_P)^2} = \left[\frac{1}{a - c_P} \right]_0^{c_P(s)} = \frac{1}{a - c_P(s)} - \frac{1}{a}. \quad (\text{A.14})$$

Einsetzen von (A.14) in (A.13) und Auflösen nach $c_P(s)$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{a - c_P(s)} - \frac{1}{a} = k s & \iff \frac{1}{a - c_P(s)} = k s + \frac{1}{a} \\ \iff \frac{1}{k s + 1/a} = a - c_P(s) & \iff c_P(s) = a - \frac{1}{k s + 1/a}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den (**realistischeren**) **Fall** $a \neq b$. Dann berechnet man das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$$

mittels Partialbruchzerlegung (vgl. Teilkapitel 7.6): Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right)$$

erhält man für $x = c_P$

$$\begin{aligned} \int_0^{c_P(s)} \frac{dc_P}{(a-c_P)(b-c_P)} &= \int_0^{c_P(s)} \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a-c_P} - \frac{1}{b-c_P} \right) dc_P \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\int_0^{c_P(s)} \frac{dc_P}{a-c_P} - \int_0^{c_P(s)} \frac{dc_P}{b-c_P} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\left[-\ln(|a-c_P|) \right] \Big|_0^{c_P(s)} - \left[-\ln(|b-c_P|) \right] \Big|_0^{c_P(s)} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\ln(|b-c_P|) - \ln(|a-c_P|) \right] \Big|_0^{c_P(s)} \\ &= \left[\frac{1}{b-a} \ln \left(\left| \frac{b-c_P}{a-c_P} \right| \right) \right] \Big|_0^{c_P(s)} \\ &= \frac{1}{b-a} \ln \left(\left| \frac{b-c_P(s)}{a-c_P(s)} \right| \right) - \frac{1}{b-a} \ln \left(\left| \frac{b}{a} \right| \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Einsetzen von (A.15) in (A.13) liefert

$$\frac{1}{b-a} \ln \left(\left| \frac{b-c_P(s)}{a-c_P(s)} \right| \right) - \frac{1}{b-a} \ln \left(\left| \frac{b}{a} \right| \right) = k s.$$

Wir multiplizieren zunächst auf beiden Seiten mit $(b-a)$ und nutzen $-\ln(x) = \ln(1/x)$ für $-\ln(|b/a|)$ aus

$$\ln \left(\left| \frac{b-c_P(s)}{a-c_P(s)} \right| \right) + \ln \left(\left| \frac{a}{b} \right| \right) = k(b-a)s.$$

Dann nehmen wir die (natürliche) Exponentialfunktion auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} \underbrace{\exp \left(\ln \left(\left| \frac{b-c_P(s)}{a-c_P(s)} \right| \right) + \ln \left(\left| \frac{a}{b} \right| \right) \right)} &= \left| \frac{b-c_P(s)}{a-c_P(s)} \right| \cdot \left| \frac{a}{b} \right| = e^{k(b-a)s}, \\ = \exp \left(\ln \left(\left| \frac{b-c_P(s)}{a-c_P(s)} \right| \right) \right) \cdot \exp \left(\ln \left(\left| \frac{a}{b} \right| \right) \right) & \end{aligned}$$

wobei wir das Gesetz $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ für die Exponentialfunktion benutzt haben. Nun nutzen wir, dass nach Voraussetzung $a > 0$ und $b > 0$ gilt, d.h. wir können die Betragsstriche bei $|a/b|$ weglassen. Wir multiplizieren mit b/a und erhalten

$$\left| \frac{b - c_P(s)}{a - c_P(s)} \right| = \frac{b}{a} \cdot e^{k(b-a)s}. \quad (\text{A.16})$$

Solange $c_P(s) \leq a$ und $c_P(s) \leq b$, also $c_P(s) \leq \min\{a, b\}$, für alle $s \geq 0$ gilt, können die Beträge entfallen. Anschaulich sollte dies für alle Zeiten $s \geq 0$ gelten, denn erst beim vollständigen Umsatz einer der in die Reaktion eingehenden Substanzen sollte $c_P(s) = \min\{a, b\}$ gelten. Für eine mathematisch korrekte Lösung muss diese Annahme im Nachhinein geprüft werden, was wir am Ende machen werden! – Wir nehmen also zunächst an, dass

$$\begin{aligned} & \left(c_P(s) \leq a \quad \text{und} \quad c_P(s) \leq b \quad \text{für alle } s \geq 0 \right) \\ & \iff \left(c_P(s) \leq \min\{a, b\} \quad \text{für alle } s \geq 0 \right) \end{aligned}$$

gilt, d.h.

$$a - c_P(s) \geq 0 \quad \text{und} \quad b - c_P(s) \geq 0 \quad \text{für alle } s \geq 0.$$

Daher lassen wir also die Betragsstriche in (A.16) weg und lösen nach $c_P(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{b - c_P(s)}{a - c_P(s)} = \frac{b}{a} \cdot e^{k(b-a)s} & \implies b - c_P(s) = (a - c_P(s)) \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{k(b-a)s} \\ \implies b - c_P(s) & = b \cdot e^{k(b-a)s} - c_P(s) \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{k(b-a)s} \\ \implies c_P(s) \left(\frac{b}{a} \cdot e^{k(b-a)s} - 1 \right) & = b \cdot e^{k(b-a)s} - b \\ \implies c_P(s) \cdot \frac{-1}{a} \left(a - b e^{k(b-a)s} \right) & = -b (1 - e^{k(b-a)s}) \\ \implies c_P(s) = a b \cdot \frac{1 - e^{k(b-a)s}}{a - b e^{k(b-a)s}}. \end{aligned}$$

Also finden wir **für** $a \neq b$ unter der Annahme $c_P(t) \leq \min\{a, b\}$ für alle $t \geq 0$ die **folgende Lösung**

$$c_P(t) = a b \cdot \frac{1 - e^{k(b-a)t}}{a - b e^{k(b-a)t}}. \quad (\text{A.17})$$

Zuletzt **müssen wir noch unsere Annahme** $c_P(t) \leq \min\{a, b\}$ **für alle** $t \geq 0$ **für die Lösung (A.17) überprüfen.** Dazu zeigen wir zunächst, dass

c_P monoton wachsend ist. Wenn wir dies nachgewiesen haben, dann wissen wir, dass $0 \leq c_P(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} c_P(t)$. Wenn wir anschließend zeigen können, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} c_P(t) \leq \min\{a, b\}$ gilt, dann haben wir unsere Annahme nachgewiesen. Ableiten von (A.17) liefert

$$\begin{aligned}
& c'_P(t) \\
&= ab \cdot \frac{-k(b-a)e^{k(b-a)t}(a - be^{k(b-a)t}) - (1 - e^{k(b-a)t})(-1)k(b-a)be^{k(b-a)t}}{(a - be^{k(b-a)t})^2} \\
&= abk(b-a)e^{k(b-a)t} \cdot \frac{-(a - be^{k(b-a)t}) + b(1 - e^{k(b-a)t})}{(a - be^{k(b-a)t})^2} \\
&= abk(b-a)e^{k(b-a)t} \cdot \frac{-a + be^{k(b-a)t} + b - be^{k(b-a)t}}{(a - be^{k(b-a)t})^2} \\
&= abk(b-a)e^{k(b-a)t} \cdot \frac{b-a}{(a - be^{k(b-a)t})^2} \\
&= abke^{k(b-a)t} \cdot \frac{(b-a)^2}{(a - be^{k(b-a)t})^2}.
\end{aligned}$$

Wegen $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ finden wir also $c'_P(t) > 0$, d.h. c_P ist streng monoton wachsend für alle t .

Betrachten wir nun $c_P(t)$ für $t \rightarrow \infty$, so müssen wir die beiden Fälle $b < a$ und $b > a$ unterscheiden.

- Für $b < a$ ist $b - a < 0$ und $b = \min\{a, b\}$, und daher gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{k(b-a)t} = 0.$$

Also finden wir

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} c_P(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(ab \cdot \frac{1 - e^{k(b-a)t}}{a - be^{k(b-a)t}} \right) = ab \cdot \frac{1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{k(b-a)t}}{a - b \lim_{t \rightarrow \infty} e^{k(b-a)t}} \\
&= ab \frac{1}{a} = b = \min\{a, b\}.
\end{aligned}$$

- Für $b > a$ ist $b - a > 0$ und $a = \min\{a, b\}$, und daher gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k(b-a)t} = 0.$$

Also erweitern wir den Bruch in $c_P(t)$ erst mit $e^{-k(b-a)t}$ und erhalten

$$c_P(t) = ab \cdot \frac{1 - e^{k(b-a)t}}{a - be^{k(b-a)t}} = ab \cdot \frac{e^{-k(b-a)t} - 1}{a e^{-k(b-a)t} - b}.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} c_P(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a b \cdot \frac{e^{-k(b-a)t} - 1}{a e^{-k(b-a)t} - b} \right) = a b \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k(b-a)t} - 1}{a \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k(b-a)t} - b} \\ &= a b \cdot \frac{0 - 1}{a \cdot 0 - b} = a b \cdot \frac{-1}{-b} = a = \min\{a, b\}.\end{aligned}$$

Wegen $c'_P(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ folgt $c_P(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} c_P(t) = \min\{a, b\}$, und die Annahme $c_P(t) \leq \min\{a, b\}$ für alle $t \geq 0$ ist gerechtfertigt.

Chemische Anwendung A.9. (Folgereaktion in der Chemie)

Betrachten wir die Folgereaktion $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} P$. Zur Zeit $t = 0$ seien die Konzentrationen $c_A(t)$, $c_B(t)$ und $c_P(t)$ der Substanzen A , B und P gegeben durch $c_A(0) = a$, $c_B(0) = 0$, $c_P(0) = 0$, d.h. wenn die chemische Reaktion startet liegt nur die Substanz A vor (also nur die Substanz A hat eine Konzentration $c_A(0) = a$ größer als Null).

Wir wollen die Frage beantworten, **wie sich die Konzentration von P zeitlich verändert?**

Zunächst stellen wir das System der Differentialgleichungen auf (vgl. auch Anwendung A.7 (d)):

$$c'_A(t) = -k_1 c_A(t), \quad c_A(0) = a, \quad (\text{A.18})$$

$$c'_B(t) = k_1 c_A(t) - k_2 c_B(t), \quad c_B(0) = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$c'_P(t) = k_2 c_B(t), \quad c_P(0) = 0. \quad (\text{A.20})$$

1. Schritt: Zunächst lösen wir die erste Gleichung: Diese ist eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$c'_A(t) + k_1 c_A(t) = 0 \quad (\text{A.21})$$

in Standardform mit $a(t) = k_1$. Also finden wir die allgemeine Lösung

$$c_A(t) = C \exp\left(-\int a(t) dt\right) = C \exp\left(-\int k_1 dt\right) = C \exp(-k_1 t) = C e^{-k_1 t}. \quad (\text{A.22})$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $a = c_A(t) = C e^{-k_1 \cdot 0} = C$, also $C = a$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems (A.18)

$$c_A(t) = a e^{-k_1 t}. \quad (\text{A.23})$$

2. Schritt: Wir setzen nun (A.23) in (A.19) ein und erhalten

$$c'_B(t) + k_2 c_B(t) = k_1 a e^{-k_1 t}, \quad c_B(0) = 0. \quad (\text{A.24})$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung in Standardform mit einem Anfangswert und mit $a(t) = k_2$. Wir finden für die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$c'_B(t) + k_2 c_B(t) = 0 \quad (\text{A.25})$$

die allgemeine Lösung

$$c_{B,h}(t) = C \exp(-k_2 t) = C e^{-k_2 t}.$$

Hier haben wir benutzt, dass (A.25) gerade die Differentialgleichung (A.21) wird, wenn wir c_B durch c_A und k_2 durch k_1 ersetzen. Daher erhalten wir aus (A.22) gerade die allgemeine Lösung von (A.25), indem wir c_A durch c_B und k_1 durch k_2 ersetzen. Mit dem Ansatz der „Variation der Konstanten“ $c_{B,s}(t) = u(t) c_{B,h}(t)$ (mit $C = 1$ in $c_{B,h}$) berechnen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Dabei ist die Formel für $u = u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= \int \frac{k_1 a e^{-k_1 t}}{c_{B,h}(t)} dt = \int \frac{k_1 a e^{-k_1 t}}{e^{-k_2 t}} dt = k_1 a \int e^{(k_2 - k_1)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} e^{(k_2 - k_1)t} & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ a k_1 t & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Also finden wir als eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (A.24)

$$c_{B,s}(t) = u(t) e^{-k_2 t} = \begin{cases} \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} e^{(k_2 - k_1)t} e^{-k_2 t} = \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ a k_1 t e^{-k_2 t} = a k_1 t e^{-k_1 t} & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Also finden wir für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (A.24)

$$c_B(t) = c_{B,h}(t) + c_{B,s}(t) = \begin{cases} C e^{-k_2 t} + \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ C e^{-k_1 t} + a k_1 t e^{-k_1 t} & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung $c_B(0) = 0$ liefert

$$0 = c_B(0) = \begin{cases} C e^{-k_2 \cdot 0} + \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} e^{-k_1 \cdot 0} = C + \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ C e^{-k_1 \cdot 0} + a k_1 \cdot 0 e^{-k_1 \cdot 0} = C & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Also erhalten wir

$$C = \begin{cases} -\frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ 0 & \text{für } k_1 = k_2, \end{cases}$$

und die Lösung des Anfangswertsproblems (A.19) ist

$$c_B(t) = \begin{cases} \frac{a k_1}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ a k_1 t e^{-k_1 t} & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Schritt 3: Wir setzen (A.26) in (A.20) ein und erhalten die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$c'_P(t) = k_2 c_B(t) = \begin{cases} \frac{a k_1 k_2}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ a k_1^2 t e^{-k_1 t} & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Durch „direkte“ Integration erhalten wir

$$c_P(t) = \begin{cases} \int \frac{a k_1 k_2}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) dt & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ \int a k_1^2 t e^{-k_1 t} dt & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Wir berechnen die beiden Integrale separat: Für den Fall $k_1 \neq k_2$ finden wir

$$\begin{aligned} \int \frac{a k_1 k_2}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) dt &= \frac{a k_1 k_2}{(k_2 - k_1)} \left(\frac{1}{(-k_1)} e^{-k_1 t} - \frac{1}{(-k_2)} e^{-k_2 t} \right) + C \\ &= \frac{a}{(k_2 - k_1)} (k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}) + C, \end{aligned}$$

und für den Fall $k_1 = k_2$ finden wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int a k_1^2 t e^{-k_1 t} dt &= a k_1^2 t \frac{1}{(-k_1)} e^{-k_1 t} - \int a k_1^2 \frac{1}{(-k_1)} e^{-k_1 t} dt \\ &= -a k_1 t e^{-k_1 t} + a k_1 \frac{1}{(-k_1)} e^{-k_1 t} = -a k_1 t e^{-k_1 t} - a e^{-k_1 t} + C. \end{aligned}$$

Also finden wir für die allgemeine Lösung von $c'_P(t) = k_2 c_B(t)$

$$c_P(t) = \begin{cases} \frac{a}{(k_2 - k_1)} (k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}) + C & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ -a k_1 t e^{-k_1 t} - a e^{-k_1 t} + C & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Mit der Anfangsbedingung $c_P(0) = 0$ erhalten wir somit

$$0 = c_P(0) = \begin{cases} \frac{a}{(k_2 - k_1)} (k_1 e^{-k_2 \cdot 0} - k_2 e^{-k_1 \cdot 0}) + C = \frac{a(k_1 - k_2)}{(k_2 - k_1)} + C = -a + C & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ -a k_1 \cdot 0 e^{-k_1 \cdot 0} - a e^{-k_1 \cdot 0} + C = -a + C & \text{für } k_1 = k_2, \end{cases}$$

d.h. in beiden Fällen erhalten wir $0 = -a + C$, also $C = a$. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems (A.20)

$$c_P(t) = \begin{cases} a \left(1 + \frac{1}{(k_2 - k_1)} (k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}) \right) & \text{für } k_1 \neq k_2, \\ -a k_1 t e^{-k_1 t} - a e^{-k_1 t} + a = a (1 - (k_1 t + 1) e^{-k_1 t}) & \text{für } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Grundlagen aus der Mittel- und Oberstufe

B.1 Rechnen mit reellen Zahlen

In diesem Teilkapitel seien a, b, c reelle Zahlen.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für die **Addition** reeller Zahlen:

- (1) **Assoziativgesetz:** $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (2) **Kommutativgesetz:** $a + b = b + a$

Wegen des Assoziativgesetzes der Addition spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir die Additionen ausführen. Wir dürfen daher die Klammern auch einfach weglassen, also:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln für die **Multiplikation** reeller Zahlen:

- (1) **Assoziativgesetz:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (2) **Kommutativgesetz:** $a \cdot b = b \cdot a$

Wegen des Assoziativgesetzes der Multiplikation spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir die Multiplikationen ausführen. Wir dürfen daher die Klammern auch einfach weglassen, also:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Weiter gelten die beiden **Distributivgesetze**:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Generell gilt „**Punkt(rechnung) vor Strich(rechnung)**“, d.h. ist ein Ausdruck mit Multiplikationen oder Divisionen (also Punktrechnungen) und Additionen oder Subtraktionen (also Strichrechnungen) gegeben, so müssen die Punktrechnungen zuerst ausgeführt werden, wenn es nicht durch Klammersetzung anders vorgegeben ist.

Beispiel B.1. („Punkt vor Strich“, Klammersetzung)

$$13 + 2 \cdot 4 + 7 = 13 + 8 + 7 = 28,$$

$$(13 + 2) \cdot 4 + 7 = 15 \cdot 4 + 7 = 60 + 7 = 67.$$

Wie sehen an dem obigen Beispiel, dass die Klammersetzung eine entscheidende Rolle spielt.

Auch wenn man nur Additionen und Subtraktionen hat, spielt die Klammersetzung eine Rolle, denn es gelten:

$$a - (b + c) = a - b - c,$$

$$a - (b - c) = a - b + c,$$

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Dieses folgt aus den obigen Gesetzen, indem man die Subtraktion mittels

$$a - b = a + (-1) \cdot b$$

als Addition auffasst:

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-1) \cdot (b + c) = a + ((-b) + (-c)) \\ &= a + (-b) + (-c) = a - b - c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - (b - c) &= a + (-1) \cdot (b + (-c)) = a + ((-b) + c) \\ &= a + (-b) + c = a - b + c, \end{aligned}$$

$$a + (b - c) = a + ((b + (-c))) = a + b + (-c) = a + b - c.$$

B.2 Bruchrechnung

In der Unter- und Mittelstufe lernt man die rationalen Zahlen \mathbb{Q} , also die Menge aller Zahlen der Form

$$\frac{m}{n} \quad \text{mit} \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{wobei} \quad n \neq 0,$$

kennen. Solche Zahlen nennen wir **Brüche**. Später werden in der Schule auch „Brüche“ betrachtet, deren Zähler und Nenner nicht mehr in \mathbb{Z} sondern beliebige reelle Zahlen sind, wobei der Nenner natürlich nach wie vor ungleich Null sein muss, also z.B.

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{\sqrt{7}}.$$

Für das Rechnen mit Brüchen gelten die Rechenregeln aus dem nachfolgenden Hilfssatz.

Hilfssatz B.2. (Rechenregeln der Bruchrechnung)

Folgende Rechenregeln gelten für reelle Zahlen a, b, c und d :

(i) *Erweitern und Kürzen:* $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

(ii) *Addition von Brüchen mit gleichem Nenner:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$

(iii) *Addition allgemeiner Brüche:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

(iv.a) *Multiplikation von Brüchen:* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

(iv.b) *Multiplikation mit $a \in \mathbb{R}$:* $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} = \frac{a \cdot b}{c}$

(v) *Kehrwert:* $\frac{1}{\frac{c}{d}} = 1 : \frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$

(vi) *Doppelbruch:* $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

*Dabei gilt: **Kein Nenner darf dabei gleich Null sein!** Bei Doppelbrüchen setzt man den Hauptbruchstrich auf Höhe des Gleichheitszeichens.*

Betrachten wir einige Zahlenbeispiele für die Rechenregeln aus Hilfssatz B.2.

Beispiel B.3. (Rechenregeln der Bruchrechnung)

$$(a) \frac{28}{32} = \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

$$(b) \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$(c) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$(d) \frac{33}{28} \cdot \frac{4}{11} = \frac{33 \cdot 4}{28 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 4}{7 \cdot 4 \cdot 11} = \frac{3}{7}$$

$$(e) 3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 7}{9} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7}{3}$$

$$(f) \frac{1}{\frac{8}{33}} = \frac{33}{8}$$

$$(g) \frac{\frac{2}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{21} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{21 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Wichtig ist zu beachten, dass die folgenden **falschen** Regeln **nicht** gelten:

$$\frac{a+b}{a} \neq \frac{1+b}{a}, \quad \text{sondern korrekt ist} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{a+b} \neq \frac{1}{1+b},$$

$$\frac{a+b}{c+d} \neq \frac{a}{c} + \frac{b}{d}.$$

B.3 Potenzen und Wurzeln

Wir wiederholen nun, wie eine Potenz a^r mit **Basis** $a \in]0, \infty[$ und **Exponent** $r \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Danach erlauben wir auch $r \in \mathbb{Q}$ und betrachten dabei den Begriff der n -ten Wurzel.

Definition B.4. (Potenzen mit ganzzahligem Exponenten)

Wir definieren

$$a^0 := 1 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

und für **positive ganze Zahlen**, also $n \in \mathbb{N}$, ist a^n definiert durch

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Ist n eine **negative ganze Zahl**, also $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, so ist $n = -m$ mit $m \in \mathbb{N}$, und wir definieren

$$a^n = a^{-m} := \frac{1}{a^m} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Insbesondere gilt

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Beispiel B.5. (Potenzen reeller Zahlen mit Exponenten in \mathbb{Z})

(a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(b) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

(c) $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$

(d) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = 0,01$

(e) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{27}$

(f) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

(g) $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{(-4) \cdot (-4)} = \frac{1}{16} = 0,0625$

Hilfssatz B.6. (Regeln für das Rechnen Exponenten in \mathbb{Z})

Seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und seien n und m in \mathbb{Z} . Dann gelten

$$a^{n \cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n \quad (\text{B.1})$$

und

$$a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{und} \quad a^{n-m} = a^n a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}. \quad (\text{B.2})$$

Weiter gelten

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (\text{B.3})$$

Beispiel B.7. (Regeln für das Rechnen mit Exponenten in \mathbb{Z})

$$(a) \quad (10^4)^2 = 10^{4 \cdot 2} = 10^8 = 100.000.000$$

$$(b) \quad 2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024$$

$$(c) \quad 17^{-5} \cdot 17^4 = 17^{-5+4} = 17^{-1} = \frac{1}{17} \approx 0,05882$$

$$(d) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot 2^{13} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^{13} = 1^{13} = 1$$

$$(e) \quad 2^{-3} \cdot 3^{-3} = (2 \cdot 3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0,0046296$$

Wir beweisen nun Hilfssatz B.6 teilweise, weil dieses unser Verständnis der Rechenregeln erhöht.

Beweis von Hilfssatz B.6: Wir geben den Beweis nur für den Fall $n > 0$ und $m > 0$. Die Fälle $n < 0$ oder $m < 0$ können analog bewiesen werden, aber sie sind etwas aufwendiger.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n \cdot m)\text{-mal}} = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n\text{-mal}} = (a^m)^n$$

und

$$a^{n+m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n+m)\text{-mal}} = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}\right) = a^n \cdot a^m,$$

$$a^{n-m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n-m)\text{-mal}} = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}\right) \cdot \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}} = a^n \cdot a^{-m}.$$

Damit haben wir die Gleichungen (B.1) und (B.2) für $m > 0$ und $n > 0$ bewiesen.

Weiter gilt für $n > 0$

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n\text{-mal}} = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{-mal}} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{jeweils } n\text{-mal}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{\text{jeweils } n\text{-mal}}} = \frac{a^n}{b^n},$$

und wir haben (B.3) für $n > 0$ ebenfalls bewiesen. \square

Als Nächstes wollen wir Potenzen mit rationalem Exponenten definieren. Dazu benötigen wir als Vorbereitung die n -te Wurzel.

Definition B.8. (n -te Wurzel einer nicht-negativen Zahl)

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine **nicht-negative** reelle Zahl, und sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann ist die n -te **Wurzel** $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ als die **nicht-negative** Zahl b definiert, für die gilt $b^n = a$.

Wir bemerken, dass wir für $n = 2$ insbesondere die „übliche“ **Quadratwurzel** erhalten:

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ ist \sqrt{a} die nicht-negative reelle Zahl, für die gilt $(\sqrt{a})^2 = a$.

Beispiel B.9. (n -te Wurzeln von $a > 0$)

- (a) $1000^{1/3} = 10$, weil $10^3 = 1000$
- (b) $2^{1/2} = \sqrt{2}$, da $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$
- (c) $81^{1/4} = 3$, weil $3^4 = 81$
- (d) $8^{1/3} = 2$, denn $2^3 = 8$
- (e) $a^{1/2} = \sqrt{a}$, weil $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$
- (f) $0^{1/7} = 0$, da $0^7 = 0$.

Analog zu (B.1) und (B.3) in Hilfssatz B.6 können wir auch Regeln für das Rechnen mit n -ten Wurzeln herleiten.

Hilfssatz B.10. (Rechenregeln für n -te Wurzeln)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ nicht-negative reelle Zahlen und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gelten

$$a^{1/(n \cdot m)} = (a^{1/n})^{1/m} = (a^{1/m})^{1/n},$$

und

$$(a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}.$$

Man kann Hilfssatz B.10 mit Hilfe der Definition der n -ten Wurzel und unter Ausnutzung von Rechenregeln B.1 und B.3 beweisen. Hilfssatz B.10 ist nützlich, um n -te Wurzeln zu berechnen und zu vereinfachen. Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel B.11. (Rechenregeln für n -te Wurzeln)

(a) $8^{1/6} = 8^{1/(2 \cdot 3)} = (8^{1/3})^{1/2}$, und wegen $2^3 = 8$ gilt

$$8^{1/6} = (8^{1/3})^{1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}.$$

(b) $6561^{1/8} = 6561^{1/(2 \cdot 4)} = (6561^{1/2})^{1/4}$, und wegen $81^2 = 6561$ gilt

$$6561^{1/8} = (6561^{1/2})^{1/4} = 81^{1/4} = (81^{1/2})^{1/2} = 9^{1/2} = 3,$$

wobei wir $9^2 = 81$ und $3^2 = 9$ verwendet haben.

(c) $24^{1/3} = (3 \cdot 8)^{1/3} = 3^{1/3} 8^{1/3} = 3^{1/3} \cdot 2 = 2 \cdot 3^{1/3}$, wobei wir $2^3 = 8$ ausgenutzt haben.

Mit Hilfe der Potenzen mit ganzzahligem Exponenten und mit der n -ten Wurzel können wir nun Potenzen mit rationalem Exponenten einführen.

Definition B.12. (Potenzen mit rationalem Exponenten)

Sie a eine positive reelle Zahl, und seien $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^{m/n}$ definiert durch

$$a^{m/n} := \left(a^{1/n}\right)^m = (a^m)^{1/n}.$$

Beispiel B.13. (Potenzen mit rationalem Exponenten)

(a) $2^{-1/2} = (2^{1/2})^{-1} = (\sqrt{2})^{-1} = 1/\sqrt{2}$.

(b) $9^{3/2} = (9^{1/2})^3 = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$, wobei wir $3^2 = 9$ verwendet haben.

(c) $1000^{-4/3} = (1000^{1/3})^{-4} = 10^{-4} = 1/10^4 = 0,0001$, wobei wir $10^3 = 1000$ benutzt haben.

(d) $(\sqrt{8})^{-2/3} = ((\sqrt{8})^{-2})^{1/3} = ((8^{1/2})^{-2})^{1/3} = (8^{-1})^{1/3} = (8^{1/3})^{-1} = 2^{-1} = 1/2$, wobei wir $2^3 = 8$ ausgenutzt haben.

Aus Hilfssätzen B.6 und B.10 kann man den folgenden Hilfssatz herleiten.

Hilfssatz B.14. (Rechnen mit Potenzen mit Exponenten in \mathbb{Q})

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ positive reelle Zahlen, und seien $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n, \ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a^{\frac{mk}{n\ell}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{\ell}} = (a^{m/n})^{k/\ell} = (a^{k/\ell})^{m/n}.$$

Weiter gelten

$$a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{\ell}} = a^{m/n} a^{k/\ell} \quad \text{und} \quad a^{\frac{m}{n} - \frac{k}{\ell}} = a^{m/n} a^{-k/\ell} = \frac{a^{m/n}}{a^{k/\ell}}$$

und

$$(a \cdot b)^{m/n} = a^{m/n} b^{m/n} \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} = \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}}.$$

Beispiel B.15. (Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten)

In diesem Beispiel wollen wir die Rechenregeln aus Hilfssatz B.14 anwenden, um zu vereinfachen:

(a) $2^{1/3} \cdot 2^{2/3} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 2^1 = 2.$

(b) $50^{3/2} = (2 \cdot 25)^{3/2} = 2^{3/2} \cdot 25^{3/2} = 2^{1+1/2} \cdot (25^{1/2})^3 = 2 \cdot 2^{1/2} \cdot 5^3 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 125 = 250 \cdot \sqrt{2}$, wobei wir $5^2 = 25$ benutzt haben.

(c) $8^{5/6} = 8^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 8^{1/2} \cdot 8^{1/3} = (4 \cdot 2)^{1/2} \cdot 2 = 4^{1/2} \cdot 2^{1/2} \cdot 2 = 2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2 = 4 \cdot \sqrt{2}$, wobei wir $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$ ausgenutzt haben.

B.4 Rechnen mit der Gleitkommadarstellung

Wir beginnen mit der Definition der Gleitkommadarstellung die Sie von Taschenrechner her kennen.

Definition B.16. (Gleitkommadarstellung im Dezimalsystem)

(1) Die **normalisierte Gleitkommadarstellung** (oder **exponentielle Standardform**) einer reellen Zahl $x \neq 0$ ist definiert als:

$$x = v \cdot a \cdot 10^b \tag{B.4}$$

mit dem **Vorzeichen** $v \in \{-1, +1\}$, der **Basis** 10, dem ganzzahligen

Exponenten $b \in \mathbb{Z}$ und der **Mantisse**

$$a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_k \cdot 10^{-k}, \quad (\text{B.5})$$

wobei $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ und $a_0 \neq 0$ gelten. Die Zahl $k + 1$ mit k aus (B.5) nennt man die **Mantissenlänge**. Da $a_0 \neq 0$ ist, gilt

$$1 \leq a < 10.$$

Die Darstellung (B.4) von x heißt dann **k -stellige normalisierte Gleitkommadarstellung zur Basis 10**.

(2) Haben wir eine Zahl nur in der Form

$$x = v \cdot c \cdot 10^d \quad (\text{B.6})$$

mit dem Vorzeichen $v \in \{-1, +1\}$, dem ganzzahligen **Exponenten** $d \in \mathbb{Z}$ und

$$c = c_1 \cdot 10^m + c_2 \cdot 10^{m-1} + \cdots + c_{m+k+1} \cdot 10^{-k}, \quad (\text{B.7})$$

wobei $c_1 \neq 0$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $-k \leq m$, und $c_1, c_2, \dots, c_{m+k+1} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ vorliegen, so sprechen wir auch von einer **nicht-normalisierten Gleitkommadarstellung** (oder **exponentiellen Darstellung**).

Beispiel B.17. (Gleitkommadarstellung im Dezimalsystem)

Die Zahl $x = -5678,3421$ hat im Dezimalsystem die normalisierte Gleitkommadarstellung

$$x = -5,6783421 \cdot 10^3,$$

d.h. wir haben das Vorzeichen $v = -1$, den Exponenten $b = 3$ und die Mantisse

$$a = 5,6783421$$

$$= 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-7}$$

mit der Mantissenlänge $k + 1 = 8$.

Natürlich gelten für Zahlen in normalisierter (oder nicht-normalisierter) Gleitkommadarstellung die üblichen Rechenregeln für die reellen Zahlen, aber trotzdem muss man beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren eine gewisse Vorsicht anwenden, wie das nächste Beispiel zeigt. Insbesondere lassen

sich zwei Zahlen in normalisierter Gleitkommadarstellung selten ohne vorherige Umformungen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, und das Ergebnis tritt nicht notwendigerweise in normalisierter Gleitkommadarstellung auf.

Beispiel B.18. (Rechnen mit Zahlen in Gleitkommadarstellung)

(a) Addieren und Subtrahieren von Zahlen in Gleitkommadarstellung:

Liegt der gleiche Exponent vor, so ist die Rechnung unkompliziert:

$$7,4 \cdot 10^{-3} + 4,2 \cdot 10^{-3} = (7,4 + 4,2) \cdot 10^{-3} = 11,6 \cdot 10^{-3} = 1,16 \cdot 10^{-2}.$$

Haben zwei Zahlen in Gleitpunktdarstellung verschiedene Exponenten, so müssen die Zahlen erst umgeformt werden: Klammern wir die Potenz 10^3 aus, so finden wir

$$\begin{aligned} 6,04 \cdot 10^4 + 3,6 \cdot 10^3 &= 60,4 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3 \\ &= (60,4 + 3,6) \cdot 10^3 = 64 \cdot 10^3 = 6,4 \cdot 10^4, \end{aligned}$$

und klammern wir die Potenz 10^4 aus, so finden wir

$$6,04 \cdot 10^4 + 3,6 \cdot 10^3 = 6,04 \cdot 10^4 + 0,36 \cdot 10^4 = (6,04 + 0,36) \cdot 10^4 = 6,4 \cdot 10^4.$$

Das Ergebnis ist also (wie erwartet) dasselbe, aber im zweiten Fall erhalten wir das Ergebnis direkt in normalisierter Gleitpunktdarstellung.

Klammern wir 10^{-4} aus, so finden wir

$$\begin{aligned} 9,82 \cdot 10^{-4} - 7,1 \cdot 10^{-5} &= 9,82 \cdot 10^{-4} - 0,71 \cdot 10^{-4} \\ &= (9,82 - 0,71) \cdot 10^{-4} = 9,11 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

(b) Multiplizieren von Zahlen in Gleitkommadarstellung:

$$(7,2 \cdot 10^4) \cdot (2,1 \cdot 10^{-2}) = (7,2 \cdot 2,1) \cdot 10^{4-2} = 15,12 \cdot 10^2 = +1,512 \cdot 10^3.$$

(c) Dividieren von Zahlen in Gleitkommadarstellung:

$$\frac{9,6 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-2}} = \frac{9,6}{1,6} \cdot 10^4 \cdot 10^{-(-2)} = \frac{9,6 \cdot 10}{1,6 \cdot 10} \cdot 10^{4+2} = \frac{96}{16} \cdot 10^6 = +6 \cdot 10^6.$$

(d) Potenzen von Zahlen in Gleitkommadarstellung:

$$(4,2 \cdot 10^3)^2 = 4,2^2 \cdot 10^{2 \cdot 3} = 17,64 \cdot 10^6 = 1,764 \cdot 10^7 = +1,764 \cdot 10^7.$$

(e) Wurzel ziehen von Zahlen in Gleitkommadarstellung:

$$\sqrt{4 \cdot 10^6} = (4 \cdot 10^6)^{1/2} = 4^{1/2} \cdot (10^6)^{1/2} = 2 \cdot 10^{6 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot 10^3 = +2 \cdot 10^3.$$

Für $\sqrt{4,2 \cdot 10^5}$ finden wir analog

$$\sqrt{4,2 \cdot 10^5} = \sqrt{4,2} \cdot 10^{5 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{4,2} \cdot 10^{5/2}.$$

Hier erhalten wir mit der „direkten“ Rechnung keine Darstellung in Gleitpunktdarstellung. Um zur Gleitpunktdarstellung des Ergebnisses zu gelangen, muss der ganzzahlige Anteil des Exponenten abgespalten werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{4,2 \cdot 10^5} &= \sqrt{4,2} \cdot 10^{5/2} = \sqrt{4,2} \cdot 10^{2+1/2} = \sqrt{4,2} \cdot \sqrt{10} \cdot 10^2 \\ &= \sqrt{4,2 \cdot 10} \cdot 10^2 = \sqrt{42} \cdot 10^2 \approx 6,5 \cdot 10^2 = +6,5 \cdot 10^2. \end{aligned}$$

B.5 Das Lösen quadratischer Gleichungen

Zum Lösen von quadratischen Gleichungen sind die binomischen Formeln nützlich.

Hilfssatz B.19. (binomische Formeln)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) **Erste binomische Formel:**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

(2) **Zweite binomische Formel:**

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

(3) **Dritte binomische Formel:**

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Wir wiederholen zunächst die Definition einer quadratischen Gleichung.

Definition B.20. (quadratische Gleichung)

Eine Gleichung der Form

$$a x^2 + b x + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man eine **quadratische Gleichung**. Indem man durch $a \neq 0$ teilt erhält man die **Standardform** der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + p x + q = 0 \quad \text{mit } p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Beispiel B.21. (quadratische Gleichungen)

(a) $2x^2 - 12x + 16 = 0$ ist eine quadratische Gleichung. Ihre Standardform ist

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

(b) $x^2 - 4 = 0$ ist eine quadratische Gleichung; sie befindet sich bereits in Standardform.

(c) $2x - 7 = 0$ ist **keine** quadratische Gleichung, sondern eine lineare Gleichung.

(d) $x^3 + 5x^2 + x = 0$ ist ebenfalls **keine** quadratische Gleichung, denn hier tritt eine dritte Potenz von x auf.

Ab jetzt betrachten wir nur noch quadratische Gleichungen in Standardform.

Lösungsmethode B.22. (Lösen mit quadratischer Ergänzung)

Durch eine **quadratische Ergänzung** wird der Term $x^2 + p x + q$ als Summe eines Quadrats und einem konstanten Terms dargestellt:

$$x^2 + p x + q = \underbrace{x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4},$$

wobei wir im letzten Schritt die erste binomische Formel (siehe Hilfssatz B.19 (1)) verwendet haben. Dabei gilt $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$, weil Quadrate in den reellen Zahlen immer nicht-negativ sind. Es können nun drei Fälle auftreten, die vom Vorzeichen von $d := p^2 - 4q$ abhängen:

(1) Fall $d = p^2 - 4q = 0$: Ist $p^2 - 4q = 0$ so vereinfacht sich die quadratische Gleichung zu

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

und wir lesen ab, dass die **eine (doppelte) reelle Lösung** $x = -\frac{p}{2}$ ist.

(2) Fall $d = p^2 - 4q > 0$: Ist $p^2 - 4q > 0$ so können wir die dritte binomische Formel (siehe Hilfssatz B.19 (3)) anwenden um die Lösungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \underbrace{\frac{p^2 - 4q}{4}}_{>0} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) \left(x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir lesen die **zwei verschiedenen reellen Lösungen** ab:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

(3) Fall $d = p^2 - 4q < 0$: Ist $p^2 - 4q < 0$, so ist $-\frac{p^2 - 4q}{4} > 0$ und es gilt

$$x^2 + px + q = \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(-\frac{p^2 - 4q}{4}\right)}_{>0} > 0,$$

und die quadratische Gleichung hat **keine reellen Lösungen**.

Es lohnt sich nicht, die Formeln aus Lösungsmethode B.22 auswendig zu lernen. Wenn man die Vorgehensweise verstanden hat, dann kann man sie mit Hilfe der binomischen Formeln als jedem Beispiel direkt durchführen. Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel B.23. (quadratische Ergänzung)

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Wir führen die quadratische Ergänzung durch:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 + 2(-3)x + (-3)^2 - (-3)^2 + 8 = (x - 3)^2 - 1.$$

mit der dritten binomischen Formel (siehe Hilfssatz B.19 (3)) erhalten wir

also

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1^2 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

Also hat die Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ die beiden verschiedenen reellen Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = 2$.

(b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

Wir führen die quadratische Ergänzung durch:

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2(-2)x + (-2)^2 = (x - 2)^2,$$

und wir lesen die (doppelte) reelle Lösung $x = 2$ ab.

(c) $x^2 + 6x + 10 = 0$

Wir führen die quadratische Ergänzung durch:

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 2(3x) + 3^2 - 3^2 + 10 = (x + 3)^2 + 1,$$

und wir lesen ab, dass $x^2 + 6x + 10 = 0$ keine reellen Lösungen hat.

Die Lösungsmethode B.22 kann man die q - p -Formel zum Lösen einer quadratischen Gleichung direkt ablesen

Bemerkung B.24. (p - q -Formel)

Setzt man in Lösungsmethode B.22 $a = p$ und $b = q$, so erhält man

$$0 = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{R},$$

und list an den drei Fällen ab: Die quadratische Gleichung ist in den reellen Zahlen nur dann lösbar, wenn $d := p^2 - 4q \geq 0$ ist. Die Lösungen sind dann

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Dabei erhalten wir für $d = p^2 - 4q = 0$ nur eine (doppelte) reelle Lösung. Für $d = p^2 - 4q < 0$ hat die quadratische Gleichung keine Lösungen in \mathbb{R} .

Ein nützliches Hilfsmittel zum Lösen von manchen quadratischen Gleichungen ist der Wurzelsatz von Vieta.

Hilfssatz B.25. (Wurzelsatz von Vieta)

Sei $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und $p \neq 0$ eine quadratische Gleichung, für die gilt $d = p^2 - 4q \geq 0$ ist. Dann besitzt die quadratische Gleichung zwei reelle (nicht notwendigerweise verschiedene) Lösungen x_1 und x_2 , für die gilt

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = q \quad (\text{B.8})$$

und

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (\text{B.9})$$

Sieht man durch Inspizieren der Gleichung Lösungen x_1 und x_2 von (B.8), so hat man die Lösungen der quadratischen Gleichung gefunden.

Beweis von Hilfssatz B.25: Formel (B.9) ist gerade die Faktorisierung der quadratischen Gleichung. Da per Annahme x_1 und x_2 Lösungen sind, muss (B.9) gelten. Man verifiziert die Formeln in (B.8) durch Ausmultiplizieren und Sortieren der rechten Seite in (B.9):

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1 x - x x_2 + x_1 x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2, \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten der gleichen Potenzen von x auf der linken und der rechten Seite übereinstimmen müssen, liest man ab, dass $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 x_2$ gelten muss. \square

Betrachten wir ein Beispiel zum Wurzelsatz von Vieta.

Beispiel B.26. (Wurzelsatz von Vieta)

Wir lösen die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 27x + 60 = 0 \quad (\text{B.10})$$

mit dem Wurzelsatz von Vieta. Dazu teilen wir erst durch 3, um die Standardform zu bekommen.

$$3x^2 + 27x + 60 = 0 \quad \Big| : 3 \quad \iff \quad x^2 + 9x + 20 = 0.$$

Wir haben also $p = 9$ und $q = 20$. Wegen

$$d = p^2 - 4q = 9^2 - 4 \cdot 20 = 81 - 80 = 1 > 0$$

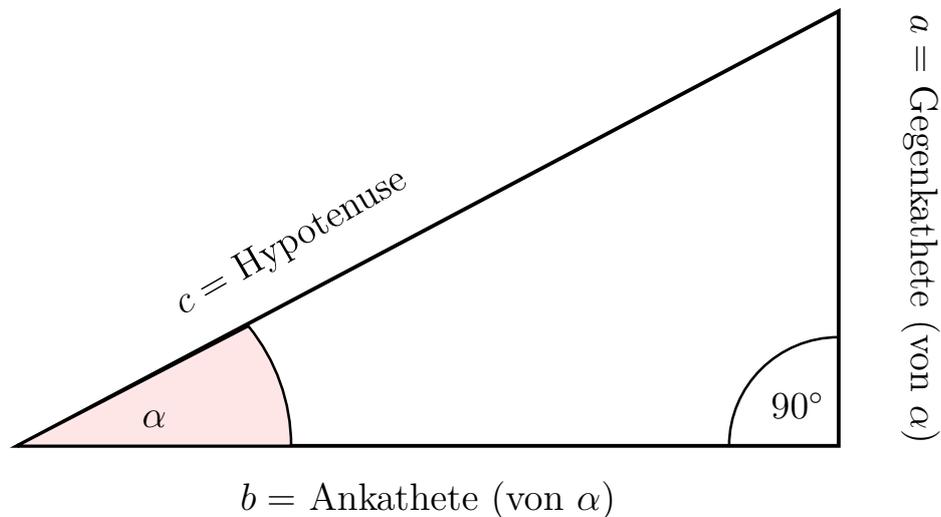


Abb. B.1: Die Definition von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck: $\sin(\alpha) = a/c$ und $\cos(\alpha) = b/c$.

hat die quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen. Nun gilt für $x_1 = -5$ und $x_2 = -4$, dass

$$x_1 + x_2 = -5 - 4 = -9 = -p \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = (-5)(-4) = 20 = q.$$

Daher folgt nach dem Wurzelsatz von Vieta

$$x^2 + 9x + 20 = (x - (-5))(x - (-4)) = (x + 5)(x + 4) = 0,$$

und die beiden reellen Lösungen von (B.10) sind $x_1 = -5$ und $x_2 = -4$.

B.6 Sinus und Cosinus als Kreisfunktionen

Wir beginnen unsere Einführung der trigonometrischen Funktionen mit der Wiederholung der Definition von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck.

Definition B.27. (Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck)

Für Winkel α mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ sind $\sin(\alpha)$ („Sinus von α “) und $\cos(\alpha)$ („Cosinus von α “) im rechtwinkligen Dreieck wie folgt definiert:

$$\sin(\alpha) := \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha)}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\cos(\alpha) := \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete (von } \alpha)}{\text{Hypotenuse}}.$$

Die **Ankathete** (von α), die **Gegenkathete** (von α) und die **Hypotenuse**, sowie die Bezeichnungen der Dreiecksseiten sind in Abbildung B.1 illustriert.

Für Berechnungen an nicht-winkligen Dreiecken sind auch der Sinussatz und der Cosinussatz wichtig.

Hilfssatz B.28. (Sinussatz und Kosinussatz)

In beliebigen Dreiecken gelten:

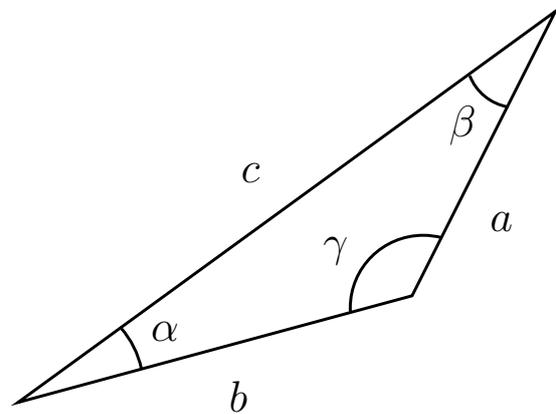
(1) **Sinussatz:**

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

(2) **Kosinussatz:**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Dabei sind die Bezeichnungen der Winkel und der Seiten in der nebenstehenden Skizze festgelegt.



Wir bemerken, dass für rechtwinklige Dreiecke der **Satz des Pythagoras** gilt:

$$[\text{Gegenkathete (von } \alpha)]^2 + [\text{Ankathete (von } \alpha)]^2 = [\text{Hypotenuse}]^2$$

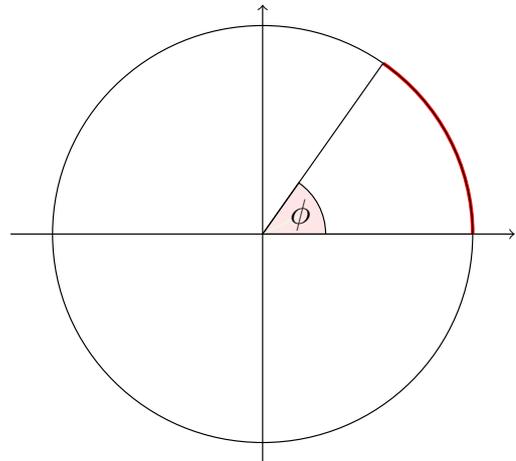
oder in der Beschriftung der Abbildung B.1

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Wir wollen nun den Sinus und den Cosinus für beliebige Winkel definieren, indem wir Sinus und Cosinus als **trigonometrische Funktionen am Einheitskreis** einführen. Es ist dabei üblich, die Variable einer trigonometrischen Funktion nicht in Grad sondern im Bogenmaß anzugeben, welches wir daher zuerst einführen.

Definition B.29. (Bogenmaß)

Das **Bogenmaß** b zu dem Winkel ϕ (gemessen in Grad) ist die Länge des Kreisbogens am **Einheitskreis** mit Radius $r = 1$ zu diesem Winkel ϕ (siehe Skizze rechts). Nach der Formel für den Kreisumfang $2\pi r = 2\pi$ hat der Kreisbogen zum Winkel 360° die Länge 2π . Damit gilt die Gleichheit



$$\frac{\phi}{360^\circ} = \frac{b}{2\pi},$$

mit der wir zwischen Gradmaß und Bogenmaß umrechnen können:

$$b = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \phi \quad \text{und} \quad \phi = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot b.$$

In der Tabelle B.1 ist die Umrechnung für das Gradmaß und das Bogenmaß für einige der wichtigsten Winkel aufgelistet. Sie sollten die Umrechnung zumindest für die in der Tabelle aufgeführten Winkel im Kopf haben.

Gradmaß	0	30	45	60	90	180	270	360	ϕ
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{2\pi}{360} \phi$

Tabelle B.1: Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß.

Nachdem wir das Bogenmaß eingeführt haben, können wir nun die Sinus- und die Cosinusfunktion am Einheitskreis definieren.

Definition B.30. (Sinusfunktion und Cosinusfunktion)

Der **Einheitskreis** ist der Kreis in der (x, y) -Ebene mit Zentrum im Ursprung $(0, 0)$ und mit Radius $r = 1$. Es seien (x, y) die Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis, für den der Winkel gegen den Uhrzeigersinn von der positiven x -Achse aus gerade ϕ (im Bogenmaß) beträgt (siehe Abbildung B.2).

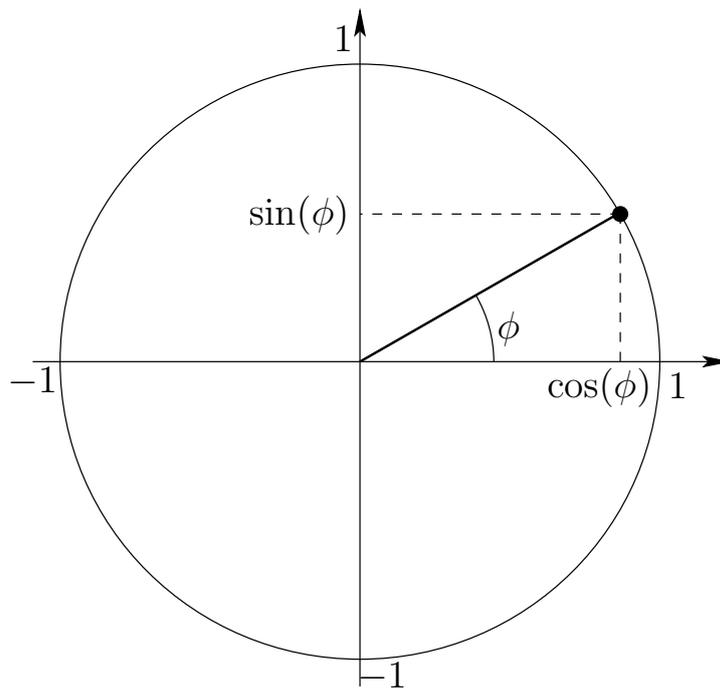


Abb. B.2: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis.

Dann definieren wir den **Sinus** und den **Cosinus** durch:

$$\sin(\phi) := y \quad \text{und} \quad \cos(\phi) := x. \quad (\text{B.11})$$

Dadurch sind $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ für Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$ erklärt. Für andere Werte $\phi \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sin(\phi) := \sin(\phi - 2k\pi) \quad \text{und} \quad \cos(\phi) := \cos(\phi - 2k\pi), \quad (\text{B.12})$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $\phi - 2k\pi \in [0, 2\pi[$ gilt.

Durch (B.11) in Definition B.30 sind $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ für alle $\phi \in [0, 2\pi[$ definiert, d.h. wir haben zunächst jeweils eine Funktion auf dem Intervall $[0, 2\pi[$. Mit (B.12) werden die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion durch sogenannte **2π -periodische Fortsetzung** von $\sin(\phi)$ bzw. $\cos(\phi)$ von dem Intervall $[0, 2\pi[$ auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt.

In Abbildung B.3 haben wir die Graphen der Sinusfunktion und der Cosinusfunktion geometrisch veranschaulicht.

In der Tabelle B.2 sind die Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für einige wichtige Winkel aufgelistet. Diese sollte man im Kopf haben.

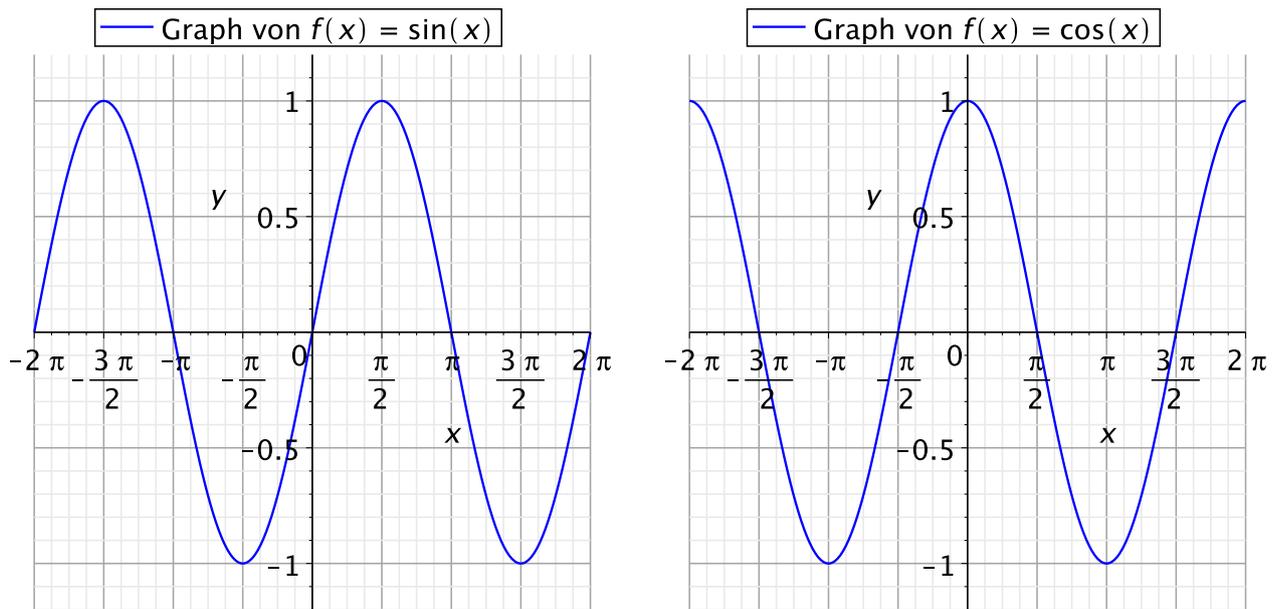


Abb. B.3: Veranschaulichung der Graphen der Sinusfunktion (linkes Bild) und der Cosinusfunktion (rechtes Bild).

x in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x in Gradmaß	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Tabelle B.2: Einige wichtige Werte der Sinus- bzw. der Cosinusfunktion.

Mit der Beobachtung, dass $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$, $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ sieht man, dass die Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in Tabelle B.2 von der Form

$$\pm \frac{\sqrt{k}}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

sind, und kann sich das Muster leicht merken.

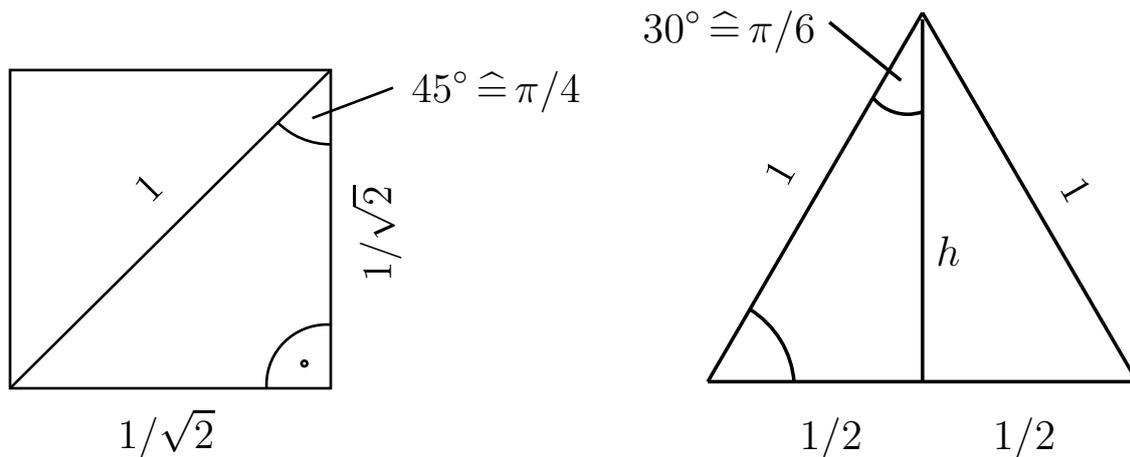


Abb. B.4: Skizzen zur Bestimmung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x = \pi/4$ (linkes Bild) und $x = \pi/6$ (rechtes Bild).

Beispiel B.31. (Berechnung der Werte von Sinus und Cosinus)

Man kann die Werte in Tabelle B.2 einfach mittels der Definition von Sinus und Cosinus über das Dreieck am Einheitskreis ablesen bzw. mit elementargeometrischen Überlegungen berechnen.

- (a) Man sieht am Einheitskreis für den Winkel $x = 0$ direkt, dass

$$\sin(0) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(0) = 1.$$

- (b) Man sieht am Einheitskreis für den Winkel $x = \pi/2$ (also 90°) direkt, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- (c) Für den Winkel $x = \pi/4$ (also 45°) haben wir ein gleichschenkliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge 1, wie in dem linken Bild in Abbildung B.4 eingezeichnet. Nach dem Satz von Pythagoras gilt dann für die Länge $a = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$ der beiden gleichlangen Katheten des Dreiecks

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 = 1 & \iff 2a^2 = 1 & \iff a^2 = \frac{1}{2} \\ & \iff_{a \geq 0} a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Also finden wir

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- (d) Zur Bestimmung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x = \pi/6$ (also 30°) drehen wir das Dreieck am Einheitskreis und ergänzen eine gespiegelte Kopie des Dreiecks, so dass wir mit beiden Dreiecken zusammen ein gleichseitiges Dreieck erhalten, dessen Höhe $h = \cos(\pi/6)$ und dessen halbe Grundseite $\sin(\pi/6)$ ist (siehe das rechte Bild in Abbildung B.4). Wir können dann direkt ablesen, dass gilt $\sin(\pi/6) = 1/2$, und nach dem Satz des Pythagoras finden wir

$$\begin{aligned}
 1 &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]^2 \\
 \implies \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]^2 &= 1 - \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]^2 = 1 - \left[\frac{1}{2} \right]^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
 \implies \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Wir finden also

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

B.7 Summen

Hier erklären wir die Summen-Notation und das Rechnen mit Summen.

Definition B.32. (Summen-Notation)

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Die Summe von $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ schreibt man mit dem **Summenzeichen**:

$$\sum_{k=m}^n x_k := x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n. \quad (\text{B.13})$$

Wir nennen k den **Summationsindex**, und der kleinste Wert des Summationsindexes (also m in (B.13)) wird als **untere Grenze** des Summationsindexes und der größte Wert des Summationsindexes (also n in (B.13)) wird also **obere Grenze** des Summationsindexes bezeichnet. Der Summationsindex ist frei wählbar und hat keine Bedeutung für den Wert der Summe, d.h.

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{j=m}^n x_j.$$

Eine Summe, deren obere Grenze des Summationsindex kleiner ist als deren untere Grenze, wird **leere Summe** genannt. Wir definieren die leere Summe als Summe ohne Summanden und setzen formal

$$\sum_{k=m}^n x_k := 0 \quad \text{für } n < m.$$

Verdeutlichen wir uns die Summennotation an zwei Beispielen.

Beispiel B.33. (Summen-Notation)

(a) Seien $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_k = k, \dots, x_n = n$. Dann gelten:

$$\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n k = 1 + 2 + \dots + n,$$

$$\sum_{k=0}^4 x_k = \sum_{k=0}^4 k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

$$\sum_{k=2}^5 x_k = \sum_{k=2}^5 k = 2 + 3 + 4 + 5 = 14.$$

(b) Sei $x_k = k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^5 x_k = \sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55,$$

$$\sum_{k=10}^{10} x_k = x_{10} = 10^2 = 100.$$

Indem man die Summen in dem nachfolgenden Hilfssatz ausschreibt, erhält man die folgenden Rechenregeln für Summen.

Hilfssatz B.34. (Rechenregeln für Summen)

Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln für Summen:

$$\sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k = \sum_{k=m}^n (x_k + y_k), \quad (\text{B.14})$$

$$\sum_{k=m}^n x_k - \sum_{k=m}^n y_k = \sum_{k=m}^n (x_k - y_k), \quad (\text{B.15})$$

$$\sum_{k=m}^n c x_k = c \sum_{k=m}^n x_k \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k = \sum_{k=m}^n x_k, \quad \text{wenn } p \in \mathbb{Z} \text{ mit } m \leq p < n. \quad (\text{B.16})$$

Formel (B.16) besagt, dass wir die Summe in zwei Teilsummen zerlegen können. Man kann bei einer Summe auch den Summationsindex um $p \in \mathbb{N}$ nach rechts bzw. links verschieben:

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{\ell=m+p}^{n+p} x_{\ell-p} \quad (\text{Indexverschiebung nach rechts}), \quad (\text{B.17})$$

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{\ell=m-p}^{n-p} x_{\ell+p} \quad (\text{Indexverschiebung nach links}). \quad (\text{B.18})$$

Erklärung zu (B.17) und (B.18): Formal werden die Indexverschiebungen (B.17) bzw. (B.18) durchgeführt, indem man den neuen Summationsindex $\ell := k + p$ (Indexverschiebung nach rechts) bzw. $\ell := k - p$ (Indexverschiebung nach links) einführt und damit $k = \ell - p$ (Indexverschiebung nach rechts) bzw. $k = \ell + p$ (Indexverschiebung nach links) erhält und entsprechend ersetzt. In (B.17) erhält man für den neuen Summationsindex $\ell = k + p$ die neue untere bzw. obere Grenze $m + p$ bzw. $n + p$, und der Index k in x_k wird durch $k = \ell - p$ ersetzt. Bei (B.18) geht man analog vor.

Betrachten wir zwei Beispiele, in denen die Rechenregeln für Summen aus Hilfssatz B.34 angewendet werden.

Beispiel B.35. (Rechnen mit Summen)

$$\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (k-1) = \sum_{k=1}^n [k - (k-1)] = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Wie man sieht, ist die Berechnung durch die Regel (B.15) für die Subtraktion von Summen erheblich vereinfacht worden.

Beispiel B.36. (Rechnen mit Summen)

Beim Berechnen von

$$\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (k+1)^2$$

bemerken wir zuerst, dass die Terme hinter dem jeweiligen Summenzeichen durch das Ersetzen von k durch $k+1$ ineinander überführt werden können. Daher führen wir in der zweiten Summe die Indexverschiebung $\ell = k+1$ (vgl. (B.17)) durch und erhalten die neue untere Grenze $1+1=2$ bzw. die neue obere Grenze $n+1$. Anschließend benennen wir ℓ wieder in k um.

$$\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=2}^{n+1} k^2.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Summen besteht nun nur noch in den Grenzen für den Summationsindex. In der ersten Summe wird über $k=1, 2, \dots, n$ summiert, und in der zweiten Summe wird über $k=2, \dots, n, n+1$ summiert. Intuitiv ist damit klar, dass bei der Subtraktion beider Summen genau der erste Term der ersten Summe und der letzte Term der zweiten Summe übrig bleiben. Wir nutzen (B.16), um aus der ersten Summe den Term für $k=1$ und aus der zweiten Summe den Term mit $k=n+1$ herauszuziehen, und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=2}^{n+1} k^2 &= \left(1^2 + \sum_{k=2}^n k^2\right) - \left(\sum_{k=2}^n k^2 + (n+1)^2\right) \\ &= 1^2 + \sum_{k=2}^n k^2 - \sum_{k=2}^n k^2 - (n+1)^2 \\ &= 1 - (n+1)^2 \\ &= -n^2 - 2n. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = -n^2 - 2n.$$

Nützliche Tabellen

Auf den nachfolgenden Seiten finden Sie einige nützliche Tabellen zu:

- wichtigen Ableitungen
- wichtigen Stammfunktionen
- griechischen Buchstaben

**Ableitungen wichtiger
differenzierbarer Funktionen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$**

Definitionsbereich D_f	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
\mathbb{R}	$a = \text{Konstante}$	0
\mathbb{R} bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	x^n mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$	$n x^{n-1}$
$]0, \infty[$	x^r mit $r \in \mathbb{R}$	$r x^{r-1}$
\mathbb{R}	e^x	e^x
$]0, \infty[$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	$\sin(x)$	$\cos(x)$
\mathbb{R}	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
\mathbb{R}	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
\mathbb{R}	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
\mathbb{R}	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$

**Stammfunktionen wichtiger
integrierbarer Funktionen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$**

Definitionsbereich D_f	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
\mathbb{R}	$a = \text{Konstante}$	$ax + c$
\mathbb{R} bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	x^n mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N}_0 \cup \{-1\})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$]0, \infty[$	x^r mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
\mathbb{R}	e^x	$e^x + c$
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$
\mathbb{R}	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
\mathbb{R}	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + c$
\mathbb{R}	$\sinh(x)$	$\cosh(x) + c$
\mathbb{R}	$\cosh(x)$	$\sinh(x) + c$
\mathbb{R}	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x) + c$
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\coth(x) + c$
\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x)) + c$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\cot(x)$	$\ln(\sin(x)) + c$

Griechisches Alphabet

Name	kleiner griechischer Buchstabe	großer griechischer Buchstabe
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε oder ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Theta	θ oder ϑ	Θ
Eta	η	H
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	\omicron	O
Pi	π	Π
Rho	ϱ oder ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	ϕ oder φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Mathematische Aussagen und Beweistechniken

In diesem Anhang lernen wir, wie man mathematische Aussagen (also z.B. die Sätze, Hilfssätze und Definitionen in diesem Skript) liest, d.h. versteht. Dazu gehört, dass wir uns den Unterschied zwischen einer Implikation („wenn dann“-Aussage) und einer Äquivalenz („genau dann wenn“-Aussage) klar machen. Wir lernen auch verschiedene Beweistechniken kennen.

D.1 Mathematische Aussagen

In diesem Teilkapitel diskutieren wir, was eine (mathematische) Aussage ist, und lernen, wie man Aussagen verneint und sie mit „und“ bzw. „oder“ verknüpfen kann. Wir definieren zunächst, was eine (mathematische) Aussage ist.

Definition D.1. (Aussage)

*Unter einer **Aussage** A verstehen wir einen Satz, der entweder wahr oder falsch ist. Jeder Aussage kann man also einen der beiden **Wahrheitswerte** **wahr** (abgekürzt: w) oder **falsch** (abgekürzt: f) zuordnen.*

Betrachten wir ein paar Beispiele für Aussagen.

Beispiel D.2. (Aussagen)

- (a) Die Aussage „Deutschland liegt in Europa.“ ist wahr.
- (b) Die Aussage „ $1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ “ ist wahr.
- (c) Die Aussage „Alle Kühe sind weiß.“ ist falsch, da es auch braune, schwarze und gescheckte Kühe gibt.
- (d) Die Aussage „ $0 \cdot 7 = 1$ “ ist falsch.

Wir können für jede Aussage auch ihre Verneinung, mathematisch „Negation“ genannt, bilden, die ebenfalls eine Aussage ist.

Definition D.3. (Negation/Verneinung)

Die **Negation** (oder **Verneinung**) der Aussage A wird mit $\neg A$ („nicht A “) bezeichnet. Der Wahrheitswert der Negation $\neg A$ hängt vom Wahrheitswert der Aussage A ab: Ist A wahr, so ist die Negation $\neg A$ falsch, und ist A falsch, so ist die Negation $\neg A$ wahr.

Betrachten wir die Negation unserer Aussagen aus Beispiel D.2.

Beispiel D.4. (Negation/Verneinung von Aussagen)

- (a) Die Negation der wahren Aussage „Deutschland liegt in Europa.“ ist die falsche Aussage „Deutschland liegt nicht in Europa.“.
- (b) Die Negation der wahren Aussage „ $1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ “ ist die falsche Aussage „Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot a \neq a$.“.
- (c) Die Negation der falschen Aussage „Alle Kühe sind weiß.“ ist die wahre Aussage „Nicht alle Kühe sind weiß.“ oder (gleichwertig dazu) „Es gibt mindestens eine Kuh, die nicht weiß ist.“ **Achtung:** Die Negation ist **nicht** „Alle Kühe sind nicht weiß.“!
- (d) Die Negation der falschen Aussage „ $0 \cdot 7 = 1$ “ ist die wahre Aussage „ $0 \cdot 7 \neq 1$ “. Beachten Sie, dass die Negation **nicht** „ $0 \cdot 7 = 0$ “ ist.

Bemerkung D.5. (doppelte Negation)

Es gilt für jede Aussage A , dass $\neg(\neg A) = A$ ist.

Wir können zwei Aussagen A und B mit „und“ bzw. mit „oder“ verbinden. Der Wahrheitswert der so erhaltenen Aussage „ A und B “ bzw. „ A oder B “ hängt

natürlich von den Wahrheitswerten der beiden Aussagen A und B ab.

Definition D.6. (Konjunktion und Disjunktion)

- (1) Die **Konjunktion** verknüpft zwei Aussagen A , B durch **und**: „ A und B “, bzw. in Formeln $A \wedge B$. Beide Aussagen A und B müssen wahr sein, damit die Konjunktion $A \wedge B$ wahr ist.
- (2) Die **Disjunktion** verknüpft zwei Aussagen A , B durch das einschließende **oder**: „ A oder B “, bzw. in Formeln $A \vee B$. Es muss mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr sein, damit die Disjunktion $A \vee B$ wahr ist. (Es dürfen aber auch beide wahr sein – im Gegensatz zum alltäglichen Gebrauch von „oder“ als „entweder ... oder“.)

Beispiel D.7. (Konjunktion und Disjunktion)

Eine Geldbörse enthalte 20 Euro. Dann ist die Aussage $A =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro.“ wahr. Die Aussage $B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“ ist falsch.

Die Aussage $A \wedge B$ ist „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und mehr als 30 Euro.“ Diese Aussage ist offensichtlich falsch. Wir wissen aber auch, dass $A \wedge B$ falsch ist, ohne die Aussage $A \wedge B$ zu formulieren, weil eine der beiden Aussagen A bzw. B falsch ist. (Beachten Sie, dass „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und mehr als 30 Euro.“ natürlich gleichwertig zu der Aussage „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“ ist, da aus „mehr als 30 Euro“ automatisch „mehr als 10 Euro“ folgt.)

Die Aussage $A \vee B$ ist „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro oder mehr als 30 Euro.“ Diese Aussage ist offensichtlich wahr. Wir wissen aber auch, dass $A \vee B$ wahr ist, ohne die Aussage $A \vee B$ zu formulieren, weil (mindestens) eine der beiden Aussagen A bzw. B wahr ist.

Die Aussage $A \wedge \neg B$ ist wahr, denn A ist wahr und $\neg B$ ist wahr (da B falsch ist). Die Aussage $\neg B$ lautet „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 30 Euro.“ (oder gleichwertig „Die Geldbörse enthält höchstens 30 Euro.“). Die wahre Aussage $A \wedge (\neg B)$ ist dann „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und nicht mehr als 30 Euro.“

Als Nächstes betrachten wir die Negation/Verneinung der Konjunktion bzw. Disjunktion zweier Aussagen.

Hilfssatz D.8. (Negation zweier durch Disjunktion bzw. Konjunktion verknüpfter Aussagen)

Seien A, B zwei Aussagen.

- (1) Für die **Verneinung von durch Disjunktion verknüpften Aussagen** gilt: Die Aussage $\neg(A \vee B)$ („nicht (A oder B)“) bedeutet dasselbe wie die Aussage $(\neg A) \wedge (\neg B)$ („nicht A und nicht B “).
- (2) Für die **Verneinung von durch Konjunktion verknüpften Aussagen** gilt: Die Aussage $\neg(A \wedge B)$ („nicht (A und B)“) bedeutet dasselbe wie die Aussage $(\neg A) \vee (\neg B)$ („nicht A oder nicht B “).

Betrachten wir wieder die Aussagen aus unserem Beispiel D.7.

Beispiel D.9. (Negation der Konjunktion bzw. Disjunktion)

Eine Geldbörse enthalte 20 Euro. Dann ist die Aussage $A =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro.“ wahr. Die Aussage $B =$ „Die Geldbörse enthält mehr als 30 Euro.“ ist falsch. Die Verneinungen der beiden Aussagen sind: $\neg A =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 10 Euro.“ = „Die Geldbörse enthält höchstens 10 Euro.“ und $\neg B =$ „Die Geldbörse enthält nicht mehr als 30 Euro.“ = „Die Geldbörse enthält höchstens 30 Euro.“

Da die Aussage $A \wedge B$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro und mehr als 30 Euro.“ falsch ist, folgt, dass die Aussage $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ wahr ist. Die Aussage $(\neg A) \vee (\neg B)$ ist „Die Geldbörse enthält höchstens 10 Euro oder höchstens 30 Euro.“. Diese Aussage ist in der Tat wahr.

Da die Aussage $A \vee B$ „Die Geldbörse enthält mehr als 10 Euro oder mehr als 30 Euro.“ wahr ist, folgt, dass die Aussage $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ falsch ist. Die Aussage $(\neg A) \wedge (\neg B)$ ist „Die Geldbörse enthält höchstens 10 Euro und höchstens 30 Euro.“. Diese Aussage ist in der Tat falsch, denn die Geldbörse enthält 20 Euro, also mehr als 10 Euro.

Bemerkung D.10. (Negation von „und“ bzw. „oder“)

Wir können uns als „Faustregel“ merken, dass **bei der Negation einer Verknüpfung von Aussagen aus einem „und“ ein „oder“ wird** und dass **aus einem „oder“ ein „und“ wird**. Vergleiche hierzu auch Lemma D.8.

Wir betrachten nun noch einige mathematische Beispiele.

Beispiel D.11. (Negation von Konjunktion und Disjunktion)

- (a) Die Aussage „Die Lösung von $x^2 = 4$ ist $x = 2$ **oder** $x = -2$.“ ist wahr. Ihre Negation ist die falsche Aussage „Die Lösung von $x^2 = 4$ ist nicht $x = 2$ **und** nicht $x = -2$.“
- (b) Wann gilt $x \notin A \cup B$? Wir haben $A \cup B = \{x : x \in A \text{ **oder** } x \in B\}$. Also folgt dass $x \notin A \cup B$ gilt, wenn $x \notin A$ **und** $x \notin B$ gilt.

Wann gilt $x \notin A \cap B$? Wir haben $A \cap B = \{x : x \in A \text{ **und** } x \in B\}$. Also folgt dass $x \notin A \cap B$ gilt, wenn $x \notin A$ **oder** $x \notin B$ gilt.

Die erste dieser beiden Negationen sieht man relativ leicht, aber bei der zweiten ist es sehr hilfreich, dass wir wissen, wie man eine Konjunktion von Aussagen verneint.

- (c) Es gilt (und dieses ist nicht offensichtlich)

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Nun können wir dieses leicht nachweisen:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \{x \in A : x \notin B \cup C\} \\ &= \{x \in A : x \notin \{y : y \in B \text{ **oder** } y \in C\}\} \\ &= \{x \in A : x \notin B \text{ **und** } y \notin C\} \\ &= \{x \in A : x \notin B\} \cap \{x \in A : x \notin C\} \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten in die dritte Zeile genutzt haben, dass die Verneinung von „oder“ ein „und“ ergibt.

- (d) Sei A eine Menge reeller Zahlen. Dann kann man das Minimum von A (sofern ein solches existiert) wie folgt charakterisieren:

Definition: Eine Menge reeller Zahlen A hat ein Minimum, wenn es eine reelle Zahl m gibt für die gilt: (i) $m \leq x$ für alle $x \in A$ **und** (ii) $m \in A$. Man schreibt dann auch $\min(A) := m$.

Beispiel: $[-1, 1]$ hat das Minimum $\min([-1, 1]) = -1$, aber $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hat kein Minimum.

Wie weist man nach, dass eine Menge kein Minimum hat?

Nach der Negation der Konjunktion folgt:

Eine Menge reeller Zahlen A hat kein Minimum, wenn es keine reelle Zahl m gibt für die gilt: (i) $m \leq x$ für alle $x \in A$ und (ii) $m \in A$.

Eine Menge reeller Zahlen A hat kein Minimum, wenn für jede reelle Zahl m gilt: („ $m \leq x$ für alle $x \in A$ “ ist falsch) **oder** $m \notin A$.

Beispiel: Als mögliches Minimum m von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kommen hier also nur Zahlen der Form $\frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ in Frage (weil $m \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ gelten muss), aber für diese gibt es immer eine kleinere Zahl $\frac{1}{k+1} \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Also kann $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kein Minimum haben.

Hilfssatz D.12. (Negation von Allaussagen und Existenzaussagen)

- (1) Die Negation der **Allaussage** „Alle Objekte (aus einer Menge) haben eine bestimmte Eigenschaft.“ ist die **Existenzaussage** „Es existiert mindestens ein Objekt (aus der Menge), welches die bestimmte Eigenschaft nicht hat.“.
- (2) Die Negation der **Existenzaussage** „Es existiert ein Objekt (aus einer Menge) mit einer bestimmten Eigenschaft.“ ist die **Allaussage** „Alle Objekte (aus der Menge) haben die bestimmte Eigenschaft nicht.“ oder gleichbedeutend „Kein Objekt (aus der Menge) hat die bestimmte Eigenschaft.“.

Beispiel D.13. (Negation von Allaussagen und Existenzaussagen)

- (a) Die falsche Aussage $A =$ „Alle Hunde sind braun.“ hat die Negation $\neg A =$ „Es gibt (mindestens) einen Hund, der nicht braun ist.“ (wahre Aussage).
Das „mindestens“ steht in Klammern, weil man es auch weglassen darf: „Es gibt einen Hund, der nicht braun ist.“ bedeutet automatisch „Es gibt mindestens einen Hund, der nicht braun ist.“. Möchte man sagen, dass es „einen Hund“ aber nicht „nicht mehr als diesen einen Hund“ gibt so würde man sagen „Es gibt genau einen Hund ...“.
- (b) Die falsche Aussage $B =$ „Alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.“ hat als Negation die wahre Aussage $\neg B =$ „Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl, die keine Primzahl ist.“.
- (c) Die wahre Aussage $C =$ „Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \geq n$.“ hat als Negation die falsche Aussage $\neg C =$ „Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 < n$.“.
- (d) Die Negation der Aussage $D =$ „Es gibt (mindestens) ein Schwein mit Fell.“ (wahre Aussage, denn Wildschweine haben Fell) ist die falsche Aussage $\neg D =$ „(Alle) Schweine haben kein Fell.“
- (e) Die Aussage $E =$ „Es gibt mindestens ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < x$.“ ist wahr, denn $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Die Negation ist die falsche Aussage $\neg E =$ „Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq x$.“.
- (f) Die Aussage $F =$ „Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sowohl gerade

aus als auch ungerade ist.“ ist wahr denn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$, erfüllt $f(x) = 0 = f(-x)$ und $f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Negation ist die falsche Aussage $\neg F =$ „Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sowohl gerade als auch ungerade ist.“ oder gleichbedeutend „Alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind nicht gerade oder nicht ungerade.“.

Es gibt Aussagen, die immer (d.h. egal unter welchen Umständen) den Wert „wahr“ (bzw. den Wert „falsch“) annehmen.

Definition D.14. (Widerspruch und Tautologie)

- (1) Eine Aussage, die immer (d.h. egal unter welchen Umständen) den Wert falsch annimmt, bezeichnet man als **Widerspruch**.
- (2) Eine Aussage, die immer (d.h. egal unter welchen Umständen) den Wert wahr annimmt, bezeichnet man als **Tautologie**.

Beispiel D.15. (Widerspruch und Tautologie)

Die Aussage „Es regnet.“ kann je nach der aktuellen Wetterlage wahr oder falsch sein.

- (a) Die Aussage „Es regnet, oder es regnet nicht.“ ist dagegen unabhängig von der aktuellen Wetterlage immer wahr. Daher ist „Es regnet, oder es regnet nicht.“ eine Tautologie.
- (b) Die Aussage „Es regnet, und es regnet nicht.“ ist dagegen unabhängig von der aktuellen Wetterlage niemals wahr. Daher ist „Es regnet, und es regnet nicht.“ ein Widerspruch.

Beispiel D.16. (Widerspruch und Tautologie)

- (a) In den reellen Zahlen ist „ $1 = 2$ “ immer falsch. Daher ist diese Aussage ein Widerspruch.
- (b) „Wenn n eine gerade natürliche Zahl ist, dann ist n eine gerade natürliche Zahl.“ ist immer wahr und somit eine Tautologie.
- (c) „Eine natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.“ ist immer wahr und somit eine Tautologie.

Das Konzept der Tautologie spielt in den meisten Gebieten der Mathematik keine wichtige Rolle. Das Konzept des Widerspruchs ist dagegen sehr wichtig, denn es ist der zentrale Punkt in einem Widerspruchsbeweis. Wir lernen das Konzept des

Widerspruchsbeweises in Teilkapitel D.3 kennen.

D.2 Implikationen und Äquivalenzen

In diesem Teilkapitel lernen wir die zwei grundlegenden mathematischen Aussagetypen Implikation („wenn dann“-Aussage) und Äquivalenz („genau dann wenn“-Aussage) kennen und studieren diese an verschiedenen Beispielen. Natürlich finden Sie überall in diesem Skript weitere Beispiele für solche mathematischen Aussagen; genau genommen ist jeder Satz und Hilfssatz ein Beispiel einer Implikation oder eine Äquivalenz. Definitionen sind als Äquivalenzen zu lesen; auch wenn in der Formulierung meist nur ein „wenn“ (und kein „genau dann wenn“) steht. Die hier gewählten Beispiele sind mit Absicht besonders einfach, damit ihr Inhalt keine Schwierigkeiten bereitet und auch, weil wir diese beweisen wollen. Im nachfolgenden Teilkapitel D.3 werden wir uns mit den verschiedenen Beweistechniken beschäftigen.

Definition D.17. (Implikation/„wenn dann“-Aussage)

Seien A und B zwei Aussagen. Die **Implikation** (oder „wenn dann“-Aussage) „ $A \Rightarrow B$ “ bedeutet „Aus A folgt B .“ oder gleichbedeutend „Wenn A gilt, dann gilt auch B .“ oder gleichbedeutend „ A impliziert B .“ Dabei können wir Aussage A als die **Voraussetzung** für die **Behauptung** der Gültigkeit der Aussage B auffassen.

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel einer Implikation.

Beispiel D.18. (Implikation/„wenn dann“-Aussage)

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n eine gerade Zahl ist, dann ist n^2 eine gerade Zahl.“

Diese Aussage können wir auch wie folgt formulieren:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus der Aussage, n ist eine gerade Zahl, folgt, dass n^2 eine gerade Zahl ist.“

oder kürzer

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: n ist eine gerade Zahl. $\implies n^2$ ist eine gerade Zahl.“

Hier ist „Sei $n \in \mathbb{N}$.“ die allgemeine Voraussetzung (für beide Aussagen). Die Aussage A ist „ n ist eine gerade Zahl.“ und die Aussage B ist „ n^2 ist eine gerade Zahl.“

Diese Aussage ist wahr. Wir beweisen sie mit einem *direkten Beweis*:

$n \in \mathbb{N}$ ist gerade, wenn n durch 2 teilbar ist (mit Ergebnis in \mathbb{N}), also wenn gilt $n/2 = m \in \mathbb{N}$ oder gleichwertig $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $n^2 = (2m)^2 = 2 \cdot (2m^2)$ und $2m^2 \in \mathbb{N}$, d.h. n^2 ist durch zwei teilbar. Also ist $n^2 \in \mathbb{N}$ ebenfalls gerade. \square

Das Symbol \square zeigt an, dass der Beweis zu Ende ist. Man kann statt dessen auch „q.e.d.“ („quod erat demonstrandum“ = „was zu zeigen war“) schreiben oder auch das Symbol \square weglassen (und das Beweisende nicht extra markieren).

Beispiel D.19. (Implikation/„wenn dann“-Aussage)

„Das Produkt einer geraden und einer ungeraden natürlichen Zahl ist eine gerade natürliche Zahl.“

Zunächst müssen wir diese Aussage sauber als Implikationen formulieren. Wir haben die folgende Voraussetzung (Aussage A): „ $n \in \mathbb{N}$ ist eine gerade Zahl und $m \in \mathbb{N}$ ist eine ungerade Zahl.“ Die Behauptung (Aussage B) ist dann: „Das Produkt $n \cdot m \in \mathbb{N}$ ist eine gerade Zahl.“ Also haben wir die folgende Implikation:

„Wenn $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl ist, dann ist das Produkt $n \cdot m \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl.“

bzw.

„Aus der Aussage, $n \in \mathbb{N}$ ist eine gerade Zahl und $m \in \mathbb{N}$ ist eine ungerade Zahl, folgt, dass das Produkt $n \cdot m \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl ist.“

oder kürzer:

„ $n \in \mathbb{N}$ ist eine gerade Zahl, und $m \in \mathbb{N}$ ist eine ungerade Zahl. $\implies n \cdot m \in \mathbb{N}$ ist eine gerade Zahl.“

Wir wollen diese Aussage nun mit einem *direkten Beweis* beweisen:

Da n gerade ist, ist n durch zwei teilbar, d.h. $n/2 = p$ mit $p \in \mathbb{N}$. Also gilt $n = 2p$ mit $p \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $n \cdot m = (2p)m = 2(p \cdot m)$ mit $p \cdot m \in \mathbb{N}$. Also ist $n \cdot m$ durch zwei teilbar und somit gerade. \square

Wir können den *direkten Beweis* auch mit Implikationspfeilen hinschreiben:

$n \in \mathbb{N}$ sei gerade und m sei ungerade.

$\implies n$ ist durch 2 teilbar.

$\implies \frac{n}{2} = p$ mit $p \in \mathbb{N}$

- $$\begin{aligned} \implies & n = 2p \text{ mit } p \in \mathbb{N} \\ \implies & n \cdot m = (2p)m = 2(p \cdot m) \text{ und } p \cdot m \in \mathbb{N} \\ \implies & n \cdot m \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar.} \\ \implies & n \cdot m \text{ ist gerade.} \quad \square \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass wir in dem Beweis gar nicht verwendet haben, dass m ungerade ist. Dieses liegt daran, dass $n \cdot m$ auch gilt wenn n und m beide gerade sind! Genauer gilt:

Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade und $m \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist $m \cdot n \in \mathbb{N}$ gerade.

Wir lernen nun den wichtigen Begriff der Äquivalenz kennen.

Definition D.20. (Äquivalenz/„genau dann wenn“-Aussage)

Zwei Aussagen A, B sind **äquivalent** (in Zeichen „ $A \Leftrightarrow B$ “) wenn die Implikationen „ $A \Rightarrow B$ “, „ $B \Rightarrow A$ “ beide gelten. Man bezeichnet „ $A \Leftrightarrow B$ “ als **Äquivalenz** (oder **Äquivalenzaussage**), und wir sagen „Aussage A gilt **genau dann**, wenn Aussage B gilt.“ oder gleichbedeutend „Aussage A und Aussage B sind **äquivalent**.“

Betrachten wir zwei Beispiele für Äquivalenzaussagen.

Beispiel D.21. (Äquivalenz)

Die Äquivalenzaussage

$$n^2 = 4 \quad \iff \quad (n = 2 \text{ oder } n = -2),$$

oder in Worten

„Die Zahl n^2 hat genau dann den Wert 4, wenn $n = 2$ oder $n = -2$ gilt.“

bedeutet:

$$n^2 = 4 \quad \implies \quad (n = 2 \text{ oder } n = -2), \quad (\text{D.1})$$

$$(n = 2 \text{ oder } n = -2) \quad \implies \quad n^2 = 4. \quad (\text{D.2})$$

Um diese Aussage mit einem direkten Beweis nachzuweisen, müssen wir also beide Implikationen beweisen.

Beweis von (D.1): Sei also $n^2 = 4$. Dann ist $n = 2 = \sqrt{4}$ eine Lösung der Gleichung $n^2 = 4$. Weiter gilt aber auch $(-2)^2 = 4$. Damit sind $n_1 = 2$ und $n_2 = -2$ beides Lösungen von $n^2 = 4$. Eine quadratische Gleichung hat aber aber

maximal zwei verschiedene Lösungen. Also haben wir mit $n_1 = 2$ und $n_2 = -2$ alle Lösungen von $n^2 = 4$ gefunden. \square

Beweis von (D.2): Für $n = 2$ finden wir $n^2 = 2^2 = 4$, und für $n = -2$ finden wir $n^2 = (-2)^2 = 4$. Also gilt in beiden Fällen $n^2 = 4$. \square

**Bemerkung D.22. (Implikationen sind oft keine Äquivalenzen!)
Nicht alle Aussagen sind Äquivalenzen!**

Beispiel: Wir haben in Abwandlung des vorigen Beispiels sehr wohl

$$n = 2 \implies n^2 = 4,$$

aber aus $n^2 = 4$ folgt nicht $n = 2$ (sondern „ $n = 2$ oder $n = -2$ “).

Beispiel D.23. (Äquivalenz)

„Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $m < n$ genau dann, wenn $m^2 < n^2$ ist.“

oder gleichbedeutend aber kürzer:

„Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $m < n \iff m^2 < n^2$.“

Wir müssen also die folgenden beiden Aussagen zeigen:

$$\text{Seien } m, n \in \mathbb{N}. \text{ Dann gilt: } m < n \implies m^2 < n^2. \quad (\text{D.3})$$

$$\text{Seien } m, n \in \mathbb{N}. \text{ Dann gilt: } m^2 < n^2 \implies m < n. \quad (\text{D.4})$$

Direkter Beweis von (D.3): Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ beliebig. Wegen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m > 0$ und $n > 0$. Damit folgt

$$m^2 = \underbrace{m}_{>0} \cdot \underbrace{m}_{0 < m < n} < \underbrace{m}_{0 < m < n} \cdot \underbrace{n}_{>0} < n \cdot n = n^2. \quad (\text{D.5})$$

Also folgt $m^2 < n^2$. \square

Direkter Beweis von (D.4): Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m^2 < n^2$ beliebig. Es muss gelten $m < n$ oder $m \geq n$ (mehr Fälle gibt es nicht).

Für $m < n$ finden wir mit der Ungleichungskette (D.5), dass $m^2 < n^2$ gilt.

Für $m \geq n$ folgt wegen $m > 0$ und $n > 0$ (da $m, n \in \mathbb{N}$), dass gilt

$$m^2 = \underbrace{m}_{>0} \cdot \underbrace{m}_{0 < n \leq m} \geq \underbrace{m}_{0 < n \leq m} \cdot \underbrace{n}_{>0} \geq n \cdot n = n^2,$$

d.h. es gilt $m^2 \geq n^2$. Also kann für $m \geq n$ die Aussage $m^2 < n^2$ nicht gelten.

Aus beiden Falluntersuchungen zusammen sieht man nun, dass aus $m^2 < n^2$ nur $m < n$ folgt. \square

Der Beweis von (D.4) geht eleganter und kürzer mittels Kontraposition (siehe Beispiel D.26 unten).

Nun lernen wir den wichtigen Begriff der Kontraposition einer Implikation kennen.

Hilfssatz D.24. (Kontraposition)

Seien A, B zwei Aussagen. Die Implikation „ $A \Rightarrow B$ “ ist logisch äquivalent zu der Implikation „ $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ “, d.h. aus „ $A \Rightarrow B$ “ folgt „ $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ “, und aus „ $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ “ folgt „ $A \Rightarrow B$ “. In Zeichen

$$(A \Rightarrow B) \iff ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

Die Implikation „ $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ “ wird als die **Kontraposition** der Implikation „ $A \Rightarrow B$ “ bezeichnet.

Bildet man die **Kontraposition der Äquivalenz** „ $A \Leftrightarrow B$ “, so erhält man die **Äquivalenz der Negationen** der Aussagen, also „ $(\neg A) \Leftrightarrow (\neg B)$ “.

Erklärung: Die Implikationen „ $A \Rightarrow B$ “ bzw. „ $B \Rightarrow A$ “ haben jeweils die Kontraposition „ $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ “ bzw. „ $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$ “.

Betrachten wir drei Beispiele.

Beispiel D.25. (Kontraposition einer Implikation)

Wir haben in Beispiel D.18 gezeigt, dass gilt:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n gerade, so ist n^2 gerade.“

Die Kontraposition dieser Implikation ist:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n^2 nicht gerade, so ist n nicht gerade.“

Weil „nicht gerade“ natürliche Zahlen „ungerade“ sind, haben wir:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n^2 ungerade, so ist n ungerade.“

Manchmal ist es einfacher, die Kontraposition einer Aussage zu beweisen anstatt die Aussage selbst zu beweisen. Betrachten wir hierzu zwei Beispiele.

Beispiel D.26. (Kontraposition einer Äquivalenz)

Der Beweis der Rückrichtung der Äquivalenz

„Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $m < n \iff m^2 < n^2$.“

in Beispiel D.23 war umständlich. Einfacher geht es, wenn man die zu

„Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $m^2 < n^2 \implies m < n$.“

logisch äquivalente Kontraposition beweist. Diese lautet:

„Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $m \geq n \implies m^2 \geq n^2$.“

Direkter Beweis der Kontraposition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ beliebig folgt wegen $m > 0$ und $n > 0$ (da $m, n \in \mathbb{N}$), dass gilt

$$m^2 = \underbrace{m}_{>0} \cdot \underbrace{m}_{0 < n \leq m} \geq \underbrace{m}_{0 < n \leq m} \cdot \underbrace{n}_{>0} \geq n \cdot n = n^2,$$

d.h. es gilt $m^2 \geq n^2$. □

Beispiel D.27. (Kontraposition einer Implikation)

Wir haben in Beispiel D.18 gezeigt, dass gilt:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n gerade, so ist n^2 gerade.“

Es gilt aber sogar die Äquivalenz:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: n ist gerade genau dann, wenn n^2 gerade ist.“

Um dieses zu beweisen, müssen wir noch zeigen, dass auch

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n^2 gerade, so ist n gerade.“

gilt. Wir können dieses nachweisen, indem wir die logisch äquivalente Kontraposition nachweisen; also in dem wir beweisen, dass gilt:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n nicht gerade, so ist n^2 nicht gerade.“

Weil „nicht gerade“ natürliche Zahlen „ungerade“ sind, haben wir:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist n ungerade, so ist n^2 ungerade.“

Beweis der Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann ist $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt aber

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{N}_0} + 1,$$

d.h. n^2 ist ebenfalls ungerade. □

(*Ergänzung:* Warum haben ungerade natürliche Zahlen die Form $2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$? – Zunächst einmal ist jede natürliche Zahl von der Form $2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ oder $2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. (Davon überzeugt man sich leicht, indem man sich die ersten paar Zahlen für $k = 1, 2, 3, \dots$ bzw. für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ hinschreibt.) $2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist aber durch 2 teilbar und damit gerade, wohingegen $2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ nicht durch 2 teilbar ist und damit ungerade ist. Also sind ungerade Zahlen von der Form $2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.)

D.3 Beweistechniken

In diesem Teilkapitel lernen wir die klassischen Beweistechniken kennen, von denen uns schon einige im vorigen Teilkapitel in den verschiedenen Beispielen begegnet sind. Die einzige Beweistechnik, die wir hier nicht behandeln, ist die vollständige Induktion. Diese wird in Teilkapitel D.4 dieses Skriptes ausführlich besprochen.

Beweistechnik D.28. (direkter Beweis)

*Beweist man eine Implikation $A \Rightarrow B$ in der Mathematik mit einem **direkten Beweis**, so führt man einige Beweisschritte/Implikationen nacheinander aus, bis man von A nach B kommt: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$. Dabei stellen C_1, C_2, \dots, C_n Aussagen dar, die als Zwischenergebnisse nach den einzelnen Beweisschritten erreicht werden.*

Beispiel D.29. (direkter Beweis)

Die Aussage

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n gerade ist, dann ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$, eine gerade Funktion.“

beweist man mit einem *direkten Beweis* wie folgt: (Zur Erinnerung: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.)

Direkter Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ so dass $n = 2m$, und $f(x) = x^n = x^{2m} = (x^2)^m$. Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^n = ((-x)^2)^m = \underbrace{((-1)^2)}_{=1} x^2)^m = (x^2)^m = x^n = f(x),$$

d.h. f ist gerade. □

Statt eines direkten Beweises von $A \Rightarrow B$ kann man auch einen „Beweis durch

Kontraposition“ geben, indem man die zu $A \Rightarrow B$ logisch äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweist (vgl. Hilfssatz D.24).

Beweistechnik D.30. (Beweis durch Kontraposition)

*Beim **Beweis durch Kontraposition** der Aussage „ $A \Rightarrow B$ “ zeigt man, dass die Kontraposition „ $\neg B \Rightarrow \neg A$ “ wahr ist. Da nach Hilfssatz D.24 die Aussage „ $A \Rightarrow B$ “ und die Aussage „ $\neg B \Rightarrow \neg A$ “ logisch äquivalent sind, haben wir damit dann automatisch auch „ $A \Rightarrow B$ “ bewiesen.*

Warum sollte man statt eines direkten Beweises einen Beweis durch Kontraposition anwenden? Es gibt Aussagen $A \Rightarrow B$, **deren Kontraposition sehr viel einfacher zu beweisen** ist. Wir haben dieses bereits in Beispiel D.26 gesehen.

Betrachten wir ein Beispiel zum Beweis durch Kontraposition.

Beispiel D.31. (Beweis durch Kontraposition)

Die Kontraposition der Aussage

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n gerade ist, dann ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$, eine gerade Funktion.“

aus Beispiel D.29 lautet:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$, keine gerade Funktion ist, dann ist n ungerade.“

(*Achtung:* Wenn eine Funktion keine gerade Funktion ist, so muss sie noch lange keine ungerade Funktion sein!)

Beweis durch Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$, keine gerade Funktion, d.h. es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $f(-x) = (-x)^n \neq x^n = f(x)$. Dann folgt $(-x)^n = ((-1)x)^n = (-1)^n x^n \neq x^n$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$. Da $(-0)^m = 0 = 0^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und insbesondere für $m = n$, gilt, wissen wir, dass das $x \in \mathbb{R}$ mit $(-1)^n x^n \neq x^n$ ungleich null ist, also $x \neq 0$. Dann ist auch $x^n \neq 0$ und wir dürfen in $(-1)^n x^n \neq x^n$ durch x^n teilen. Es folgt $(-1)^n \neq 1$, und dieses gilt nur, wenn n ungerade ist. \square

Eine häufig nützliche Beweistechnik ist der Beweis durch Widerspruch. In manchen Situationen ist der **Beweis durch Widerspruch sehr viel einfacher zu führen** als ein direkter Beweis oder als ein Beweis durch Kontraposition.

Beweistechnik D.32. (Beweis durch Widerspruch)

Eine mathematische Aussage

„Wenn die Aussage A gilt, dann gilt die Aussage B .“

oder

„Unter gewissen Voraussetzungen gilt die Aussage B “

*können wir wie folgt mit einem sogenannten **Widerspruchsbeweis** beweisen: Wir nehmen an, dass die Aussage A bzw. die Voraussetzungen gelten. Dann nehmen wir an, dass die Aussage B nicht gilt, d.h. wir nehmen an, dass die Negation der Aussage B , also $\neg B$, gilt. Wenn wir hieraus einen **Widerspruch** zu bereits bekannten Aussagen oder zu den Voraussetzungen herleiten können, dann war unsere Annahme, dass $\neg B$ gilt, falsch. Also muss die Aussage B gelten.*

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel, um uns klar zu machen, wie ein Widerspruchsbeweis funktioniert.

Beispiel D.33. (Beweis durch Widerspruch)

Wir wollen die folgende Aussage mit einem Beweis durch Widerspruch beweisen:

„Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.“

Als Voraussetzung bzw. Aussage A haben wir dann, dass $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, und als Behauptung bzw. Aussage B haben wir, dass n^2 gerade ist. Für den Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass die Voraussetzung wahr ist, aber dass die Behauptung falsch ist, d.h. dass ihre Negation wahr ist.

Beweis durch Widerspruch: Sei also $n \in \mathbb{N}$ gerade, und es gelte $n^2 \in \mathbb{N}$ ist nicht gerade. Dann ist n^2 nicht durch 2 teilbar. Daraus folgt, dass n nicht durch 2 teilbar ist (denn ansonsten wäre n^2 auch durch 2 teilbar). Also ist n **nicht gerade** ζ , und wir haben einen **Widerspruch** (denn per Annahme war n gerade). – Da wir einen Widerspruch gefunden haben, folgt, dass die Annahme, dass n^2 nicht gerade ist, falsch war. Also muss n^2 gerade sein. \square

Das Symbol ζ schreibt man häufig dort hin, wo der Widerspruch auftritt.

Bemerkung D.34. (Unterschied zwischen einem Beweis durch Widerspruch und einem Beweis durch Kontraposition)

Das Konzept eines Beweises durch Widerspruch ist **nicht** dasselbe wie das Konzept eines Beweises durch Kontraposition! – Dieses macht man sich sofort am folgenden Beispiel klar: Sei A die Aussage „Es regnet.“, und sei B die Aussage „Die Straße ist nass.“.

Angenommen wir wollen „ $A \Rightarrow B$ “ beweisen, dann lautet die zu beweisende Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$: „Ist die Straße nicht nass, so regnet es nicht.“

Beim Beweis durch Widerspruch müssten wir aber die Aussage $B \wedge (\neg A) =$ „Es regnet, und die Straße ist nicht nass.“ zu einem Widerspruch führen. Der Widerspruch ist hier offensichtlich.

Betrachten wir noch ein aufwendigeres Beispiel. Aus der Schule wissen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sondern eine irrationale Zahl ist (d.h. $\sqrt{2}$ ist eine reelle Zahl, die man nicht als einen Bruch schreiben kann). Dieses wollen wir nun beweisen.

Beispiel D.35. (Beweis durch Widerspruch)

Wir wollen die folgende Aussage beweisen:

„Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht in \mathbb{Q} .“

Wir formulieren dieses besser (aber äquivalent) als:

„Sei x die nicht-negative reelle Zahl mit $x^2 = 2$. Dann ist x nicht in \mathbb{Q} .“

Hierbei haben wir benutzt, dass die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ gerade als die nicht-negative Zahl x in \mathbb{R} mit $x^2 = 2$ definiert ist.

Hier ist also die Voraussetzung (Aussage A) „Sei x die nicht-negative reelle Zahl mit $x^2 = 2$.“, und die Behauptung (Aussage B) ist „ x ist nicht in \mathbb{Q} .“

Wir wollen einen *Widerspruchsbeweis* geben. Also nehmen wir an, dass die Voraussetzung (Aussage A) gilt, aber die Behauptung falsch ist, also dass die Negation der Behauptung (also die Aussage $\neg B$) gilt:

Widerspruchsbeweis: Sei x die nicht-negative Zahl in \mathbb{R} mit $x^2 = 2$. Wir nehmen an, dass x in \mathbb{Q} liegt. Dann gibt es Zahlen $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit

$$x = \frac{p}{q}. \quad (\text{D.6})$$

Wir dürfen annehmen, dass wir in dem Bruch $x = p/q$ den Zähler p und Nenner q nicht mehr kürzen können, also dass p und q keine gemeinsamen Teiler haben.

Durch Quadrieren auf beiden Seiten vom (D.6) erhalten wir

$$\underbrace{x^2}_{=2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p^2 = 2q^2.$$

Aus $p^2 = 2q^2$ folgt, dass p^2 durch 2 teilbar ist, denn $p^2/2 = q^2 \in \mathbb{N}$ (da $q \in \mathbb{N}$). Dann ist auch p durch 2 teilbar (denn wäre p nicht durch 2 teilbar, so wäre auch p^2 nicht durch 2 teilbar ζ). Also gilt $p/2 = m$ mit $m \in \mathbb{N}$, d.h. $p = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Einsetzen von $p = 2m$ in $p^2 = 2q^2$ liefert nun

$$(2m)^2 = 2q^2 \implies 2(2m^2) = 2q^2 \implies 2m^2 = q^2. \implies q^2 = 2m^2.$$

Also ist (mit der gleichen Argumentation wie oben) q^2 ebenfalls durch 2 teilbar. Dann ist auch q durch 2 teilbar (denn wäre q nicht durch 2 teilbar, so wäre auch q^2 nicht durch 2 teilbar ζ). Also gilt $q/2 = n$ mit $n \in \mathbb{N}$, d.h. $q = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben also gefunden, dass sowohl p also auch q durch 2 teilbar sind, also $p = 2m$ und $q = 2n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Damit finden wir

$$x = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n},$$

und dieses steht im **Widerspruch** zu unserer Annahme, dass der Zähler p und Nenner q in $x = p/q$ keine gemeinsamen Teiler hatten. ζ

Da wir einen Widerspruch hergeleitet haben, war unsere Annahme, dass $x = \sqrt{2}$ rational ist falsch. Also haben wir gezeigt, dass $x = \sqrt{2}$ irrational ist, also $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. \square

Aussagen, die für eine ganze Klasse von Objekten gelten sollen, (sogenannte „Allaussagen“) kann man durch ein Gegenbeispiel widerlegen, wenn diese falsch sind.

Beweistechnik D.36. (Widerlegen von Allaussagen durch Angeben eines Gegenbeispiels)

*Will man eine Aussage A der Gestalt „Für alle x aus der Menge M gelten die Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_n .“ **widerlegen**, so reicht es **ein Gegenbeispiel**, d.h. ein $x \in M$, für das E_1, E_2, \dots, E_n nicht alle gelten, zu finden und nachzuweisen, dass für dieses mindestens eine der Eigenschaften E_1, E_1, \dots, E_n verletzt ist.*

Erklärung: Man betrachtet die Aussage A : „Für alle x aus der Menge M gelten die Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_n .“. Die Aussage $\neg A$ lautet: „Es gibt ein $x \in M$, für welches die Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_n nicht alle gelten (d.h. mindestens eine der Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_n ist verletzt).“. Wenn man ein solches x angeben kann und nachweist, dass für dieses x die Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_n nicht alle gelten, dann hat man die Aussage $\neg A$ bewiesen. Die Aussage A muss dann falsch sein.

Betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel D.37. (Widerlegen von Allaussagen durch ein Gegenbeispiel)

Wir wollen zeigen, dass die Aussage „Alle Schafe in England sind weiß.“ falsch ist. Dazu reicht es, wenn wir ein Schaf in England finden, das nicht weiß (sondern beispielsweise braun, schwarz oder gescheckt) ist.

Beispiel D.38. (Widerlegen von Allaussagen durch ein Gegenbeispiel)

Betrachten wir die folgende Allaussage:

„Alle Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 sind gerade Funktionen.“

Hier ist die betrachtete Menge M die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 , also

$$M := \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis: Um die Aussage „Alle Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 sind gerade.“ zu widerlegen, reicht es eine Polynomfunktion vom Grad ≤ 2 zu finden, die nicht gerade ist. Betrachte hierzu $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := x$. Dann ist $p(-x) = -x = -p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und für $x \neq 0$ gilt $p(-x) = -x \neq x = p(x)$, d.h. p ist eine ungerade und keine gerade Funktion. Da wir ein Gegenbeispiel gefunden haben, war die Aussage falsch. \square

Existenzaussagen kann man dagegen beweisen, indem man ein Objekt mit den gesuchten Eigenschaften findet.

Beweistechnik D.39. (Beweisen von Existenzaussagen durch Angeben eines Beispiels)

Will man eine Aussage der Form „Es existiert ein Objekt x mit bestimmten Eigenschaften.“ beweisen, so reicht es **ein Beispiel** für ein solches Objekt x zu finden und nachzuweisen, dass dieses die gewünschten Eigenschaften hat.

Beispiel D.40. (Beweisen von Existenzaussagen durch ein Beispiel)

Um die Aussage

„Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sowohl gerade als auch ungerade sind.“

nachzuweisen reicht es, das Beispiel der Nullfunktion anzugeben und nachzuweisen, dass diese die gewünschten Eigenschaften hat.

Beweis: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$. Dann gilt $f(x) = 0 = f(-x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, d.h. f ist gerade. Weiter gilt auch $f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, d.h. f ist ungerade. \square

Will man einen langen Beweis führen, in dem viele Implikationen zu zeigen sind, so kann man natürlich für jede einzelne Implikation eine andere Beweismethode wählen.

D.4 Beweis durch vollständige Induktion

Wir formulieren nun das Prinzip der vollständigen Induktion, mit dem man Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ (mit einem festen $n_0 \in \mathbb{Z}$), beweisen kann. Man hat also für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$, wobei die Aussagen $A(n)$ natürlich nach dem „gleichen Muster“ in Abhängigkeit von n gebildet werden.

Beweistechnik D.41. (vollständige Induktion – Version I)

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und seien $A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$, Aussagen. Angenommen man kann die folgenden beiden Dinge beweisen:

(i) $A(n_0)$ ist wahr.

(ii) Die Implikation „Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.“ ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Praktische Umsetzung: In der Praxis geht man bei der Anwendung des Beweisprinzips der vollständigen Induktion wie folgt vor: Nachdem man $A(n)$ und n_0 identifiziert hat, führt man den Beweis in den folgenden zwei Schritten durch:

- (i) **Induktionsanfang (IA):** Die Aussage $A(n)$ wird für $n = n_0$ bewiesen (oft durch eine direkte Rechnung).
- (ii) **Induktionsschritt (IS):** Für beliebiges $n \geq n_0$ wird unter Benutzung der

Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ bewiesen. $A(n)$ wird dabei als **Induktionsvoraussetzung (IV)** bezeichnet. Die Stelle im Beweis, an der diese eingeht, wird sollte mit „(IV)“ gekennzeichnet sein (um darauf hinzuweisen, dass hier die Induktionsvoraussetzung genutzt wurde).

Für das Induktionsverfahren ist es **unerlässlich**, dass Sie **sowohl den Induktionsanfang als auch den Induktionsschritt** beweisen. Allein sagt keiner dieser Beweisschritte etwas über die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ aus.

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel, an dem wir das Prinzip der vollständigen Induktion anwenden.

Beispiel D.42. (Der kleine Gauß)

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\text{D.7})$$

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 1$ und die Aussage

$$A(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA) $n = 1$: $A(1)$ ist wahr, denn $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \rightsquigarrow n+1$: Wir müssen zeigen:

$$A(n+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (\text{D.8})$$

Dazu starten wir mit der linken Seite von (D.8) und formen diese unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung (IV) so lange geeignet um, bis wir die rechte Seite von (D.8) erhalten:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}_{= \frac{n(n+1)}{2} \text{ nach (IV)}} + (n+1) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

oder mit Summenschreibweise

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{\substack{= \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{nach (IV)}}} + (n+1) \\
&\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung D.43. (Warum funktioniert das Induktionsprinzip?)

- Wir beweisen, dass $A(n_0)$ wahr ist (Induktionsanfang).
- Dann beweisen wir im Induktionsschritt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass aus „ $A(n)$ ist wahr.“ folgt „ $A(n+1)$ ist wahr.“.
- Mit dem Induktionsschritt können wir für $n = n_0$ aus der Gültigkeit von $A(n_0)$ (Induktionsanfang) die Gültigkeit von $A(n_0+1)$ schlussfolgern. Anschließend können wir mit dem Induktionsschritt aus der Gültigkeit von $A(n_0+1)$ die Gültigkeit von $A(n_0+2)$ schlussfolgern, usw.. So erhalten wir die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

Wir formulieren eine zweite Variante des Induktionsprinzips, die natürlich zu der ersten Variante äquivalent ist.

Beweistechnik D.44. (vollständige Induktion – Version II)

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und seien $A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$, Aussagen. Angenommen man kann die folgenden beiden Dinge beweisen:

(i) $A(n_0)$ ist wahr.

(ii) Die Implikation „Wenn $A(k)$ für alle $k = n_0, n_0 + 1, \dots, n$ wahr ist, dann ist auch $A(n + 1)$ wahr.“ ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Gelegentlich ist diese zweite Variante, der vollständigen Induktion nützlich, weil man im Induktionsschritt die Gültigkeit der Aussage $A(k)$ nicht nur für $k = n$ sondern auch für $k = n - 1$ (und gegebenenfalls weitere $k \leq n$) nutzen möchte.

Bemerkung D.45. (Varianten des Induktionsprinzips)

Alternativ hätten wir auch den folgenden Induktionsschritt (IS) durchführen können, der zum selben Ergebnis führt:

- Version I: (ii) Die Implikation „Wenn $A(n - 1)$ wahr ist, dann ist auch $A(n)$ wahr.“ ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > n_0$ wahr.
- Version II: (ii) Die Implikation „Wenn $A(k)$ für alle $k = n_0, n_0 + 1, \dots, n - 1$ wahr ist, dann ist auch $A(n)$ wahr.“ ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > n_0$ wahr.

Man beachte in beiden Fällen die **echte** Größerrelation $n > n_0$ **statt** $n \geq n_0$.

Beweise durch vollständige Induktion gehören zu den grundlegenden Techniken, die ein Mathematiker beherrschen muss. Später im Studium werden einfache Induktionsbeweise in der Vorlesung häufig aus Zeitgründen ausgelassen, und man muss sich diese selber überlegen. Auch in Lehrbüchern werden Aussagen, die man mit vollständiger Induktion zeigen kann, oft ohne Nachweis oder Begründung verwendet.

Das Prinzip der vollständigen Induktion gibt uns leider keine Hilfsmittel, um gültige Sätze zu formulieren. Um das Induktionsprinzip zu nutzen, müssen Sie bereits wissen, was Sie beweisen wollen!

Betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel D.46. (Summe ungerader natürlicher Zahlen)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2. \quad (\text{D.9})$$

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 1$ und die Aussage

$$A(n) : \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Induktionsanfang (IA) $n = 1$: $A(1)$ ist wahr, denn

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \rightsquigarrow n + 1$: Wir müssen zeigen:

$$A(n + 1) : \quad 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2, \quad (\text{D.10})$$

wobei wir auf der linken Seite genutzt haben, dass $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$ ist.

Wir starten mit der linken Seite in (D.10) und formen diese unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung um, bis wir die rechte Seite von (D.10) erhalten:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) &= \underbrace{(1 + 3 + \dots + (2n - 1))}_{= n^2 \text{ nach (IV)}} + (2n + 1) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2, \end{aligned}$$

oder mit Summenschreibweise

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (2k - 1)}_{= n^2 \text{ nach (IV)}} + (2n + 1) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Damit haben wir $A(n + 1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung D.47. (typische Probleme bei Induktionsbeweisen)

Beim Erlernen von Induktionsbeweisen treten oft die folgenden **Probleme** auf, bzw. die folgenden Dinge wurden **nicht** beachtet:

- Anfangs ist es oft ein Problem, herauszufinden, was Sie im Induktionsschritt eigentlich zeigen wollen. Es hilft, sich die im Induktionsschritt zu beweisende Aussage als Erinnerung hinzuschreiben („zu zeigen: ...“).
- Wird die im Induktionsschritt zu zeigende Aussage $A(n+1)$ notiert, erhält man diese aus $A(n)$, indem man in $A(n)$ **überall** n durch $n+1$ ersetzt. (Ersetzt man in $A(n)$ nicht überall sondern nur an einigen Stellen n durch $n+1$, so erhält man nicht $A(n+1)$ sondern eine andere (meistens falsche) Aussage.)
- Beachten Sie, dass Sie im Induktionsschritt (IS) $n \rightsquigarrow n+1$ **nicht** zeigen müssen, dass die Aussage $A(n)$ für n gilt. Dieses ist die Induktionsvoraussetzung (IV). Es hilft, wann man sich diese gesondert notiert.

Betrachten wir noch ein Beispiel, in dem eine Ungleichung mit vollständiger Induktion bewiesen wird. In diesem Beispiel kommen Fakultäten vor:

n -Fakultät, in Zeichen $n!$, ist für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$0! := 1; \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt also

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad \dots$$

Beispiel D.48. (Ungleichung)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 4$ und die Aussage

$$A(n) : \quad n! > 2^n$$

Induktionsanfang (IA) $n = 4$: $A(4)$ ist wahr, denn $4! = 24 > 16 = 2^4$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \rightsquigarrow n+1$: Wir müssen zeigen: $(n+1)! > 2^{n+1}$

Dazu starten wir auf der linken Seite von $(n+1)! > 2^{n+1}$ und formen um bzw. schätzen nach unten ab, bis wir die rechte Seite von $(n+1)! > 2^{n+1}$ er-

halten:

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}_{=n!} \cdot (n+1) = \underbrace{n!}_{>2^n} (n+1) \stackrel{(IV)}{>} 2^n \underbrace{(n+1)}_{>2 \text{ weil } n \geq 4} > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Damit haben wir $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

□

Als Letztes beweisen wir eine Teilbarkeitsaussage mit vollständiger Induktion.

Beispiel D.49. (Teilbarkeitsaussage)

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n^3 + 3n^2 + 2n$ durch 6 teilbar.

Beweis mit vollständiger Induktion: Wir haben $n_0 = 0$ und die Aussage

$$A(n) : \quad n^3 + 3n^2 + 2n \text{ ist durch 6 teilbar.}$$

Induktionsanfang (IA) $n = 0$: $A(0)$ ist wahr, denn $0^3 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ ist durch 6 teilbar.

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 0$ fest. Es gelte $A(n)$.

Induktionsschritt (IS) $n \rightsquigarrow n+1$:

Wir müssen zeigen: $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$ ist durch 6 teilbar.

Dazu formen wir $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$ geeignet um und nutzen die Induktionsvoraussetzung aus:

$$\begin{aligned} & (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) \\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + 2(n+1) \\ &= (n^3 + 3n^2 + 2n) + 3n^2 + 9n + 6 \\ &= (n^3 + 3n^2 + 2n) + 3(n^2 + 3n + 2) \\ &= (n^3 + 3n^2 + 2n) + 3(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

wobei man die Faktorisierung $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$ mit dem Satz von Viéta direkt ablesen kann oder diese alternativ mit quadratischer Ergänzung und den binomischen Formeln berechnen kann:

$$n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = (n+1)(n+2).$$

Wir haben also

$$(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 2n) + 3(n+1)(n+2).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung (IV) ist $n^3 + 3n^2 + 2n$ durch 6 teilbar.

$3(n+1)(n+2)$ ist durch 3 teilbar. Weil $n+1$ und $n+2$ zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, muss eine der beiden Zahlen gerade und somit durch 2 teilbar sein. Also ist $3(n+1)(n+2)$ auch durch 2 teilbar. Daraus folgt, dass $3(n+1)(n+2)$ durch 2 und 3 und somit durch 6 teilbar ist.

Als Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen ist $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$ durch 6 teilbar. Damit haben wir $A(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □