

1. Grundlagen

1.1 Logische Grundbegriffe

Aussagen

Unter einer **Aussage** verstehen wir jeden Satz, der entweder wahr oder falsch ist. Jeder Aussage kann also der Wahrheitswert “wahr” (w) oder “falsch” (f) zugeordnet werden.

Beispiel 1.1

3 ist eine ungerade Zahl.

4 ist eine Primzahl.

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat die Lösung $x = 1$.

Wasser hat seinen Siedepunkt bei 100°C .

Mathe macht Spaß.

Deutschland ist Fußballweltmeister 2010.

Negation (“nicht”)

Ist A eine Aussage, so erhält man durch ihre **Negation** die neue Aussage $\neg A$ (“**nicht** A ”).

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	
f	

Beispiel 1.2

A : 3 ist eine ungerade Zahl.

$\neg A$: 3 ist keine ungerade Zahl.

Konjunktion (“und”)

Sind A und B Aussagen, so können diese durch **Konjunktion** zu der neuen Aussage $A \wedge B$ (“ **A und B** ”) verbunden werden.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Beispiel 1.3

A : 3 ist eine ungerade Zahl.

B : 4 ist eine Primzahl.

$A \wedge B$: 3 ist eine ungerade Zahl und 4 ist eine Primzahl.

Disjunktion (“oder”)

Sind A und B Aussagen, so können diese durch **Disjunktion** zu der neuen Aussage $A \vee B$ (“ A oder B ”) verbunden werden.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Beispiel 1.4

A : 3 ist eine ungerade Zahl. B : 4 ist eine Primzahl.

$A \vee B$: 3 ist eine ungerade Zahl oder 4 ist eine Primzahl.

Implikation

Sind A und B Aussagen, so kann man die **Implikation** $A \Rightarrow B$ (“Wenn A , dann B ”, “Aus A folgt B ”, A impliziert B) bilden.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Beispiel 1.5

A : 3 ist eine ungerade Zahl. B : 4 ist eine Primzahl.

$A \Rightarrow B$: Wenn 3 eine ungerade Zahl ist, dann ist 4 eine Primzahl.

Äquivalenz

Sind A und B Aussagen, so kann man die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ (“ A genau dann, wenn B ”, “ A und B sind äquivalent”) bilden.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Beispiel 1.6

A : 3 ist eine ungerade Zahl.

B : 4 ist eine Primzahl.

$A \Leftrightarrow B$: 3 ist eine ungerade Zahl ist genau dann, wenn 4 eine Primzahl ist.

Äquivalenz

$A \Leftrightarrow B$ ist gleichbedeutend mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Kontraposition

Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu ihrer **Kontraposition** $\neg B \Rightarrow \neg A$, d.h. die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ist stets wahr:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Aussageformen

Ist $A(x)$ ein Ausdruck, der eine Aussage darstellt, wenn für x ein Objekt einer vorgegebenen Klasse von Objekten eingesetzt wird, so heißt A **Aussageform**.

Beispiel 1.7

Objekte: natürliche Zahlen

$A(n)$: n ist eine Primzahl.

$A(3)$: 3 ist eine Primzahl.

$A(4)$: 4 ist eine Primzahl.

Beispiel 1.8

Objekte: reelle Zahlen

$A_1(x)$: $3x = 9$ $A_2(x)$: $2x = 6$

$A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)$ ist wahr für alle Objekte x .

Aussageformen

- **allgemeingültige** Aussageform:
 $A(x)$ ist wahr für alle zugelassenen Objekte x .
Man schreibt: $\forall x : A(x)$.
- **erfüllbare** Aussageform:
Es gibt mindestens ein Objekt x , für das $A(x)$ wahr ist.
Man schreibt: $\exists x : A(x)$.
- **nicht erfüllbare** Aussageform:
 $A(x)$ ist für kein zugelassenes Objekt wahr.
Man schreibt: $\nexists x : A(x)$.

Beispiele 1.9

Objekte: reelle Zahlen

$x^2 + 1 = 0$ ist _____; in Formeln

$x + x = 2x$ ist _____; in Formeln

$3 + x < 9$ ist _____; in Formeln