1. Grundlagen
1.2 Mengen und Zahlen

Mengen und ihre Darstellung

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen. Die in der Menge enthaltenen Objekte werden **Elemente** der Menge genannt.

Eine Menge M lässt sich angeben durch

- die Aufzählung der einzelnen Elemente
  z.B. $M = \{1, 2, 3\}$;
- die Angabe der Auswahleigenschaft: $M = \{x : A(x)\}$,
  z.B. $M = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl und } x < 4\}$.

Beispiel 1.11

$M_1 = \{x : x \text{ ist eine reelle Zahl und löst } x^2 = 1\} =$

Elemente

Aus formalen Gründen definiert man die **leere Menge** als Menge ohne Elemente. Die leere Menge wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Beispiel 1.12

$\{x : x \text{ ist eine reelle Zahl und löst } x^2 + 5 = 0\} =$

Die Aussage "*a* ist ein Element der Menge *M*" schreibt man auch kurz $a \in M$.

Die Negation der Aussage $a \in M$ ist "*a* ist kein Element der Menge *M*" und wird $a \notin M$ geschrieben.

Beispiel 1.13

$M = \{1, 3, 4, 7\}$
Dann ist $3 \in M$ und $5 \notin M$.

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen *A* und *B* heißen **gleich**, wenn jedes Element von *A* auch Element von *B* ist und umgekehrt. Kurz: $A = B$.

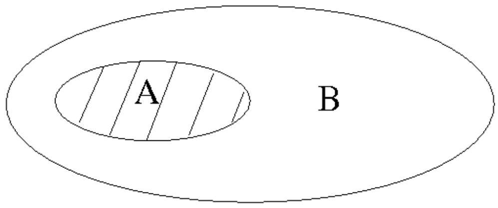
Beispiel 1.14

$A = \{0, 1, 2, 4, 8\}$, $B = \{8, 2, 0, 4, 1\}$
Jedes Element von *A* ist auch Element von *B* und umgekehrt. Die beiden Mengen unterscheiden sich lediglich in der Anordnung ihrer Elemente und sind daher gleich: $A = B$.

Teilmenge und Obermenge

A heißt **Teilmenge von** B, falls jedes $a \in A$ auch zu B gehört;
B heißt dann **Obermenge von** A, kurz $A \subseteq B$, und $B \supseteq A$.
$A = B$ bedeutet $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Euler-Venn-Diagramm:



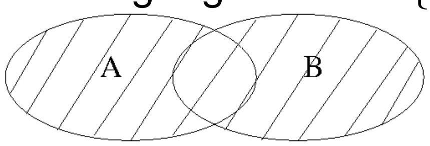
Beispiel 1.15

$A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$
Dann ist A Teilmenge von B: $A \subseteq B$.

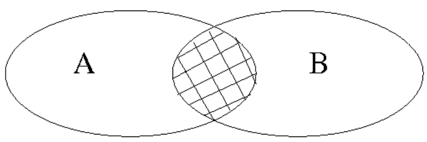
Beachte: Bei $A \subseteq B$ ist Gleichheit *nicht* ausgeschlossen; für $A \subseteq B$ und $A \neq B$ schreibt man $A \subsetneq B$ und nennt A eine **echte Teilmenge von** B.

Mengenoperationen

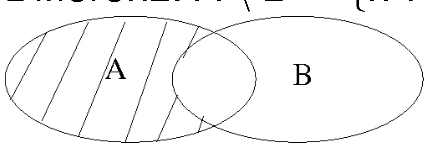
- Vereinigung: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$



- Durchschnitt: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$



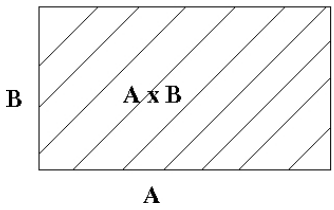
- Differenz: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$



A und B heißen **disjunkt**, falls sie kein gemeinsames Element haben, d.h. falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Kartesisches Produkt

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ heißt **kartesisches Produkt** der Mengen A, B.



Dabei ist (a, b) ein geordnetes Paar, also ist die Reihenfolge wichtig: $(2, 3) \neq (3, 2)$.

Beispiel 1.16

$A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2, 4\}$
$A \times B =$

Entsprechend: $A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$ etc.

1. Grundlagen 1.2 Mengen und Zahlen

Zahlenmengen

Die wichtigsten Mengen in der Mathematik haben Zahlen als Elemente. Beispiele sind folgende **Grundmengen von Zahlen**:

- die **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$,
- die **nichtnegativen ganzen Zahlen** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- die **rationalen Zahlen (Brüche)** $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$,
- die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Es gilt

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Sina Ober-Blöbaum Mathematik für Chemiker