1. Grundlagen
1.3 Gleichungen

Definitions- und Lösungsmenge

Die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ einer Gleichung ist die Menge aller Objekte (Zahlen), die in die Gleichung eingesetzt werden dürfen.
Die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ einer Gleichung ist die Menge aller Elemente der Definitionsmenge, für die die Gleichung wahr ist.

Beispiel 1.17

$3x = 7$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \implies \mathbb{L} =$

$\mathbb{D} = \mathbb{N} \implies \mathbb{L} =$

Beispiel 1.18

$\frac{1}{x} = x$

$\mathbb{D} =$

Polynomgleichungen

Wir betrachten zunächst Gleichungen der Form

$$P(x) = 0.$$

Hierbei P ist ein **Polynom**, d.h.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_n \neq 0.$$

Der höchste Exponent n heißt **Grad** des Polynoms. Wir betrachten hier reelle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und suchen Lösungen in $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.19

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 7$ Polynom 3. Grades

Äquivalenzumformungen

Viele Gleichungen lassen sich durch **Äquivalenzumformungen** auf Polynomgleichungen zurückführen. Äquivalenzumformungen sind:

- Termumformungen,
- Addition bzw. Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung,
- Multiplikation der Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$ bzw. Division der Gleichung durch eine Zahl $\neq 0$.

Lineare Gleichungen ($n = 1$): Ein Beispiel aus der Chemie

Beispiel 1.20

Eine 0,1 molare Lösung habe die Dichte 1,004 g/cm^3. Der gelöste Stoff hat eine molare Masse von 184 g/mol. Welche Molalität hat die Lösung?

Zur Erinnerung:

- Die Molarität, d.h. die molare Konzentration einer Lösung ist definiert als $c = \frac{n}{V}$ mit Stoffmenge n in mol und Volumen V der Lösung in Liter. Die Molarität ist temperaturabhängig!
- Die Molalität ist definiert als $\mu = \frac{n}{m_L}$ mit Masse m_L des Lösungsmittels in kg. Die Molalität ist nicht temperaturabhängig.

Das Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet.

Quadratische Gleichungen ($n = 2$)

Quadratische Gleichung: $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_2 \neq 0$
in Normalform: $x^2 + px + q = 0 \qquad p = \frac{a_1}{a_2},\ q = \frac{a_0}{a_2}$
Wir suchen *reelle* Lösungen, d.h. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Satz 1.21

Gegeben sei eine quadratische Gleichung in Normalform mit Diskriminante $D = (\frac{p}{2})^2 - q$. Für ihre Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt:
Falls $D < 0$: $\mathbb{L} = \emptyset$.
Falls $D = 0$: $\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2}\}$.
Falls $D > 0$: $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$ mit

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}. \qquad \textit{(p-q-Formel)}$$

Anhang: Beweis von Satz 1.21

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^2 + px + q = 0 \iff x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = D$$

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:
Fall 1: $D < 0$. Die Gleichung hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.
Fall 2: $D = 0$. $-\frac{p}{2}$ ist einzige Lösung der Gleichung: $\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2}\}$.
Fall 3: $D > 0$.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = D \iff x + \frac{p}{2} = \sqrt{D} \text{ oder } x + \frac{p}{2} = -\sqrt{D}$$
$$\iff x = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \text{ oder } x = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}.$$

Also: $\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\}$. $\square$