1. Grundlagen
1.6 Binomialkoeffizienten und Binomialsatz

Erinnerung: Binomische Formeln

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

n-Fakultät

Wir definieren

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad 0! = 1$$

$n!$ wird „n-Fakultät“ gelesen.

Beispiel 1.33

$0! = \qquad 1! = \qquad 2! = \qquad 3! = \qquad 4! = \qquad 5! =$

Es gilt $(n+1)! = n!(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Produktnotation: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Damit ist $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Binomialkoeffizienten

Definition 1.34

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ heißt die Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient „n über k“.

Beispiel 1.35

$\binom{4}{2} =$

$\binom{14}{12} =$

$\binom{10}{0} =$

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mt $k \leq n$. Dann gelten:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
- $\binom{n}{k} = \dfrac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)k}.$
- $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, falls $k \geq 1$.

Pascalsches Dreieck

Wie lauten die Koeffizienten nach Ausmultiplikation des Produktes $(a+b)^n$?

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
{\scriptstyle k=0} & & {\scriptstyle k=1} & & {\scriptstyle k=2} & & & &
\end{array}
$$

Die Einträge im Pascalschen Dreieck entstehen als Summe der unmittelbar darüberstehenden Nachbarn. Der k-te Eintrag in Zeile n ist $\binom{n}{k}$.

Der Binomialsatz

Satz 1.36 (Binomialsatz)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beispiel 1.37

$(x+2)^4 =$

Anhang: Beweis des Binomialsatzes

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir verwenden vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$A(n)$: $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Induktionsanfang $n = 0$: $(a+b)^0 = 1 = a^0 b^0$, d.h. $A(0)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $A(n)$.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

In der zweiten Summe setzen wir $j = k+1$ und erhalten

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^j.$$

Anhang: Beweis des Binomialsatzes (Fortsetzung)

In der zweiten Summe schreiben wir wieder k für j und fassen zusammen:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}
$$

$\square$