

2. Rechentechniken

2.1 Potenzen

Motivation

Beispiel 2.1

Wieviele Sauerstoffatome sind in 10 m^3 Luft bei Normalbedingungen (also 0°C , 10130 Pa) enthalten?

Daten:

- Luft enthält 20.8 Volumenprozent Sauerstoff.
- 1 mol Gasteilchen beanspruchen bei Normalbedingungen ein Volumen von 22.41 (Molvolumen; A. AVOGADRO (1776-1856)).
- 1 mol eines chemischen Stoffes enthält $L := 602\,300\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ Teilchen (Loschmidt'sche Zahl).

Probleme:

- Unterschiedliche Einheiten für gleiche Größen verwendet:
- Rechnen mit derart großen bzw. kleinen Zahlen ist sehr unhandlich!

Normalisierte Gleitpunktzahlen

Eine **k -stellige normalisierte Gleitpunktzahl zur Basis E** ist eine reelle Zahl $x \neq 0$ der Form $x = v \cdot a \cdot E^b$ mit

- dem **Vorzeichen** $v \in \{-1, 1\}$,
- der **Basis** $E \in \mathbb{N}$, $E > 1$,
- dem **Exponenten** $b \in \mathbb{Z}$,
- der **Mantisse** $a = a_1 E^{-1} + a_2 E^{-2} + \dots + a_k E^{-k}$.

Dabei ist k die Mantissenlänge und a_j sind Ziffern des Zahlensystems (d.h. $0 \leq a_j \leq E - 1$) und $a_1 \neq 0$.

Beispiel 2.2

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ l} = \\ 1 \text{ l} &= 0,001 \text{ m}^3 = \\ L &= 0,6023 \cdot 10^{24}. \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Erinnerung:

- bei gleicher Basis: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- bei gleichem Exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Für $x = c_1 \cdot 10^n$ und $y = c_2 \cdot 10^m$ in exponentieller Darstellung folgt:

$$xy = c_1 \cdot c_2 \cdot 10^{n+m}, \quad \frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2} \cdot 10^{n-m}.$$

Beachten Sie: Das Ergebnis ist *nicht* automatisch normalisiert!

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned} x &= 0,72 \cdot 10^5, \quad y = 0,11 \cdot 10^{-2} \\ \implies x \cdot y &= \end{aligned}$$

Zu Beispiel 2.1

- 10 m^3 Luft enthalten $\frac{20,8}{100} \cdot 10 \text{ m}^3 = 2,08 \text{ m}^3 = 0,208 \cdot 10^4 \text{ l}$ Sauerstoff.
- $0,208 \cdot 10^4 \text{ l}$ Gas entsprechen $\frac{0,208 \cdot 10^4}{0,224 \cdot 10^2} \text{ mol} = \frac{0,208}{0,224} 10^2 \text{ mol} \approx 0,929 \cdot 10^2 \text{ mol}$
- $0,929 \cdot 10^2 \text{ mol}$ Gas enthalten $0,929 \cdot 10^2 \cdot 0,6023 \cdot 10^{24} = 0,929 \cdot 0,6023 \cdot 10^{26} = 0,560 \cdot 10^{26}$ Teilchen.

Zusammen:

10 m^3 Luft enthalten ca. $0,560 \cdot 10^{26}$ Sauerstoffmoleküle (O_2), also ca. $2 \cdot 0,560 \cdot 10^{26} = 1,120 \cdot 10^{26} = 0,112 \cdot 10^{27}$ Sauerstoffatome.

Potenzieren

Erinnerung: Für $a > 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Damit folgt

$$(x \cdot 10^m)^n = x^n \cdot (10^m)^n = x^n \cdot 10^{m \cdot n}$$

Das Ergebnis muss *nicht* normalisiert sein!

Beispiel 2.4

$$(0,21 \cdot 10^3)^2 =$$

Wurzelziehen

Erinnerung: Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

Beispiel 2.5

$$\sqrt{0,16 \cdot 10^6} =$$

Gegebenenfalls kann hier eine Potenz mit gebrochenem Exponenten entstehen. In diesem Fall muss der ganzzahlige Anteil des Exponenten abgespalten werden:

Beispiel 2.6

$$\sqrt{0,42 \cdot 10^5} =$$

Addition und Subtraktion

Falls die Zehnerpotenzen gleiche Exponenten haben:

$$c_1 \cdot 10^n + c_2 \cdot 10^n = (c_1 + c_2) \cdot 10^n.$$

Beispiel 2.7

$$0,74 \cdot 10^{-3} + 0,42 \cdot 10^{-3} =$$

Sind die Exponenten verschieden, so müssen die Zahlen erst umgeformt werden:

$$c_1 \cdot 10^n + c_2 \cdot 10^m = c_1 \cdot 10^n + (c_2 \cdot 10^{m-n}) \cdot 10^n = (c_1 + c_2 \cdot 10^{m-n}) \cdot 10^n$$

Das Ergebnis muss *nicht* normalisiert sein!

Beispiel 2.8

$$0,604 \cdot 10^4 + 0,36 \cdot 10^3 =$$

Beispiel 2.9: Dissoziation von Essigsäure H Ac

Beim Auflösen von H Ac (Ac: Säurerest) in Wasser findet eine Aufspaltung von H Ac in H^+ und Ac^- statt: $H Ac \rightarrow H^+ + Ac^-$. Diese Reaktion findet mit der Reaktionsrate $r_{Hin} = k_{Hin} c_{H Ac}$ statt; dabei ist k_{Hin} die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante und $c_{H Ac}$ die Konzentration der Essigsäurelösung.

Simultan findet auch die Rückreaktion $H^+ + Ac^- \rightarrow H Ac$ mit der Rate $r_{Rück} = k_{Rück} c_{H^+} c_{Ac^-}$ statt. Dieser Prozess läuft so lange, bis Hin- und Rückreaktion mit genau der gleichen Rate stattfinden (chemisches Gleichgewicht), d.h. $r_{Hin} = r_{Rück}$. Außerdem kennt man $K := \frac{k_{Hin}}{k_{Rück}} = 0,174 \cdot 10^{-4}$ bei $20^\circ C$.

Wie groß ist die Konzentration von H^+ im Gleichgewicht, wenn die Konzentration von H Ac 0,1 mol/l beträgt und die Dissoziation von Wasser vernachlässigt wird?